[美] John D. Baum 著

点集拓扑学原理

蒲思立 译 刘应明 校

人民教育出版社

点集拓扑学原理

[美] John D. Baum 著

蒲思立 译　刘应明 校

人民教育出版社

本书是译者根据John D. Baum著Elements of Point Set Topology一书译出. 原书初稿曾在Oberlin学院试用. 译者对原书个别定理证明中不够清楚的地方，稍作改动. 本书可作数学系高年级学生拓扑学课程的教学参考书。

点集拓扑学原理

[美] John D. Baum 著

蒲思立 译　刘应明 校

*

人民教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

人民教育出版社印刷厂印装

*

开本 850×1168 1/32　印张 5　字数 120,000

1981年6月第1版　1982年7月第1次印刷

印数 00,001—11,500

书号 13012·0630　定价 0.69 元

序　言

在写这本书时，我经常考虑的是小型学院的大学生．在他们的大学生活中，人们通常强调尽早介绍近世代数的重要性．然而，在大学课程中开设拓扑学的必要性似乎没有受到同样重视．由于我感到泛函分析在数学中是各个分支的一种较大的综合，以及了解到作为分析的基础的代数和拓扑学的根本重要性，因此，我试图提供一个与近世代数许多现代教材的精神相平行的拓扑学初等教材．希望在不太远的将来，一学期的拓扑学课程将被主修数学的大多数学生所修习，从而能为大学生开设近代分析的课程．

本书注意几何直觉以及公理方法．强调几何直觉的原因是，我相信这些学生在几何方面已经具有许多经验．如果他们能运用自己的几何直觉，学习拓扑学是不困难的．强调公理方法有双重原因：首先，这与学生在近世代数中的经验相平行，其次，它使本书与数学的近代发展趋势一致．

除去上面提到的主要目的之外，还需指出两点．因为点集拓扑学的一个初等课程不仅是分析的基础，而且也是在点集拓扑学和代数拓扑学方面进一步进行工作的基础，因而本书试图包括一些这样的题材，它们将为具有分析学以外的兴趣的学生服务．当然，主要的题材是在分析中重要的那些内容．但是也有一些内容偏离了主要题材．这些内容虽然在分析中不太重要，但将使那些希望继续学习点集拓扑学或是代数拓扑学的学生感兴趣．

在某种意义上，本书预计的阅读对象决定了这本书的形式．开始部分的证明很详细，这在职业数学家看来是太详细了．然而，根据我的经验，通过这种性质的课程初次接触公理数学的学生在

开始阶段通常都需要一些帮助. 后面章节的内容则需要学生更多地依靠自己的才智，因为证明已经不再如前面那样详细. 对于证明所谈到的这些同样也适用于练习. 本书开始部分的练习是简单的，而且有时有些琐碎. 然而，特别是最后一章的练习则需要学生下相当的功夫才能解决. 我们没有提供书中概念的最初来源，但是列出了有兴趣的学生进一步阅读的参考书目. 在所列出的许多参考书中都能找到原始资料的详细目录，以至把它们包括在本书内似乎是多余的.

奥柏林(Oberlin)学院使用本书初稿的经验表明，在有十五周的一个学期内就能将书中内容轻松地讲授完毕. 如果感到分量太重，可以删去某些内容而不至于影响本书的连贯性. 如果需要一个比较简短的教程，本书第一章第八节，第三章第三节、第四节，第四章第四节、第五节以及第五章第三节可以删去. 本书练习中包括许多说明理论的不可缺少的例子. 我极力主张，如果不是全部，至少也应该作完大部分练习. 有几个练习归作"学期论文"一类，这可以作为学生进一步研究的课题；对于愿意指定学生作学期论文而不进行传统的期终考试的教师，这些练习可供参考.

定理、定义、引理和推论在每一章连续编号. 因此，第三章中的第十个定理(或定义、引理、推论)编号为 3.10. 每一章的练习都从 1 开始连续编号. 例如练习 2.12 表示第二章的第十二题. 定理证明完毕记以符号 "▌".

我感谢 R. H. Bing 和 M. L. Curtis 两位教授的有益建议. 感谢 Ruth Edwards 和 Elizabeth Carter 帮助打印原稿. 感谢许多学生找出本书初稿的不少打印错误. 鉴于他们人数太多，这里不再一一提及. 尽管如此，本书的任何错误都应当由我承担全部责任.

J. D. 包姆(John D. Baum)

目　录

预 备 知 识

§1 引 言

近代的多数数学领域都是从一组未被定义的对象以及刻划这些对象性态的一组公理开始的. 以这样的方式探讨一门数学学科有许多优点. 也许,这样做的最大优点是,对于我们遇到的任何一个数学系统,如果它服从一个特殊数学领域的公理,则它也将服从在这个领域内成立的一切定理. 因为任何公理的发展都是从一个未被定义的对象的集合开始的,因此,我们在发展公理体系之前研究一些集合理论就显得是必不可少的了.

§2 集 合

作为数学一个领域的集合论, 可以用公理法展开. 但在这里我们不采用这样的观点, 而宁愿充分依赖我们的直觉来发展这一理论. 按照 Cantor 的说法,"集合"是由"确定的, 各别的对象 m 组成的一个整体(记为 M), 而这些对象是我们感觉到的或我们想象到的."用来形成集合的对象称为该集合的元素或元. 我们认为整个集合是一个单独的实体. 一般说来, 用大写字母表示集合, 比如, 用罗马字母 A, B, …, 或草书体字 $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$, …, 或德文字母 $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, …. 集合的元素一般用小写罗马字母表示.

我们可以用两种方式表示一个集合的元素是什么. 如果一个集合的元素不多,则可以直接列出它的全部元素. 约定一个统一的写法: 在大括弧内直接写出集合的全部元素. 例如, $A=\{1, 2, 3\}$. 元素之间要用逗点分开. 如果一个集合的元素很多, 用上面的方

法表示是很麻烦的．这时，我们可以用写出集合全体元素都满足的共同性质的办法来表示集合．例如，$A=\{x|x$ 是小于 4 的正整数$\}$．我们的表示法为，写出大括弧，用某一个字母表示集合的一般元素（上面是用 x），画出竖直线并写出集合的一般元素连同全体元素都满足的共同性质．

某元是一个集合的元素可以写作，例如 $2\in A$ 的形式，读作"2 是集合 A 的元素"或"2 是 A 的元"或简单读为"2 属于 A"．如果一个元素不属于一个集合，可以记为，例如 $4\notin A$ 的形式，读作"4 不属于 A"，"4 不是集合 A 的元素"或"4 不是 A 的元"．

如果对于每一个 $x\in A$ 都有 $x\in B$，则称集合 A 是集合 B 的**子集**，或称 B 包含 A，记为 $A\subseteq B$ 或 $B\supseteq A$．若 $A\subseteq B$ 与 $B\subseteq A$ 都成立，则集合 A 与 B 的元素完全相同，记为 $A=B$．符号 ϕ 表示空集，也就是不包含任何元素的集合．应当注意到下列关系式恒成立：$A\subseteq A$，$A=A$，$\phi\subseteq A$ 以及 $A\subseteq\phi$ 当且仅当 $A=\phi$．"$\subseteq$"是一个传递关系，也就是说，如果 $A\subseteq B$ 与 $B\subseteq C$，则有 $A\subseteq C$．

符号 $A\subset B$ 表示 $A\subseteq B$ 同时 $A\neq B$．这个符号有时会遇到．一个集合不被包含于另一个集合，例如 $A\subseteq B$ 不成立，我们记为 $A\nsubseteq B$．

我们在这里第一次向学生指出，今后在学习本书的进程中还要继续指出，在不同的书中，同一个数学符号的含意可能是很不相同的．集合包含符号$\subseteq$与集合真包含符号$\subset$就是这样．有的著者对集合的包含使用符号$\subset$而不引进集合真包含符号．在阅读其它著作时学生应当弄清楚书中各种符号的确切含意．

练　习

0.1　证明上面叙述的几个关系式恒成立，即是对任意集合 A，下列关系式成立

(a) $A\subseteq A$.

(b) $A=A$.

(c) $\phi\subseteq A$.

(d) $A\subseteq\phi$ 当且仅当 $A=\phi$.

0.2 对任意集合 A, B 和 C, 证明

(a) 如果 $A\subseteq B$ 与 $B\subseteq C$ 成立, 则 $A\subseteq C$ 成立.

(b) 如果 $A\subset B$ 与 $B\subset C$ 成立, 则 $A\subset C$ 成立.

§3 集 代 数

我们现在定义集合的两种运算. 第一种运算是两个集合的并 $A\cup B$. 定义 $A\cup B=\{x|x\in A$ 或 $x\in B\}$. 这里"或"的含意还有"并有"之意, 所以同时在 A 与 B 中的元素也在 $A\cup B$ 中. 第二种运算是两个集合的交 $A\cap B$. 定义 $A\cap B=\{x|x\in A$ 与 $x\in B\}$. 由定义可以直接得出集合的下列运算公式:

1. (a) $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$.

   (b) $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$.

2. (a) $A\cup B=B\cup A$.

   (b) $A\cap B=B\cap A$.

3. (a) $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$.

   (b) $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$.

4. (a) $A\cup A=A$.

   (b) $A\cap A=A$.

5. (a) $A\subseteq A\cup B$.

   (b) $A\supseteq A\cap B$.

6. (a) 若 $A\subseteq C$ 与 $B\subseteq C$, 则 $A\cup B\subseteq C$.

   (b) 若 $A\supseteq C$ 与 $B\supseteq C$, 则 $A\cap B\supseteq C$.

7. (a) $A\cup\phi=A$.

(b) $A\cap\phi=\phi$.

如前所述，$A=B$ 当且仅当 $A\subseteq B$ 与 $B\subseteq A$. 这样，为了证明上面所列的大部分关系式，必须证明两个包含关系. 我们用证明2(a)来说明这一点. 设 $x\in A\cup B$, 则 $x\in A$ 或 $x\in B$, 因此 $x\in B$ 或 $x\in A$, 从而 $x\in B\cup A$, 这说明 $A\cup B\subseteq B\cup A$. 相反，设 $x\in B\cup A$, 则 $x\in B$ 或 $x\in A$, 因此 $x\in A$ 或 $x\in B$, 从而 $x\in A\cup B$, 这说明 $B\cup A\subseteq A\cup B$. 由刚才证明的两个包含关系便可得出 $A\cup B=B\cup A$.

我们通常都假定所要讨论的集合是某个基础集合 U 的子集. 由此定义集合 A 的**余集** A^c. 规定 $A^c=\{x|x\in U$ 且 $x\notin A\}$. 将 $A-B=\{x|x\in A$ 且 $x\notin B\}$ 定义为集合 A 与 B 之**差集**. 由这些定义可以得出集合的又一些运算公式:

8. (a) $\phi^c=U$.

   (b) $U^c=\phi$.

9. (a) $A\cup A^c=U$.

   (b) $A\cap A^c=\phi$.

10. $(A^c)^c=A$.

11. 如果 $A\subseteq B$, 则 $A^c\supseteq B^c$. 此命题的逆命题也成立.

12. (a) $(A\cup B)^c=A^c\cap B^c$.

    (b) $(A\cap B)^c=A^c\cup B^c$.

13. $A-B=A\cap B^c$.

上面的公式12(a)与12(b)称为 **DeMorgan 公式**. 不久之后我们将有这两个公式更一般的形式. 学生应当自己验证上面每一个公式的正确性. 这里再一次向学生提出，我们用来表示集合的余集的符号 A^c 可能与他在其它课本上看到的不一样.

现在已经有的集合运算公式大概已能满足我们的需要. 然而下面一组练习给出了一些有时可能有用的进一步的关系.

练　　习

设 A, B 与 C 表示某基础集 U 中的集合. 证明下列关系式:

0.3　由 $A\subseteq B$ 一般不能得出 $B\subseteq A$.

0.4　$A\subseteq B$ 当且仅当 $A\cup B=B$.

0.5　$A\subseteq B$ 当且仅当 $A\cap B=A$.

0.6　$A\cap(B-C)=B\cap(A-C)=(A\cap B)-C=(A\cap B)-(A\cap C)$.

0.7　$A-B=A-(A\cap B)$.

0.8　$A\cap B=\phi$ 当且仅当 $A\subseteq B^c$.

0.9　如果 $A\cup B=U$ 以及 $A\cap B=\phi$, 则 $B=A^c$.

0.10　$(A-B)^c=B\cup A^c$.

0.11　$(A-B)\cup(A-C)=A-(B\cap C)$.

0.12　$(A-C)\cup(B-C)=(A\cup B)-C$.

0.13　$(A-B)\cup(B-A)=(A\cup B)-(A\cap B)$.

0.14　$A-(A-B)=A\cap B$.

0.15　$A\cup(B-A)=A\cup B$.

0.16　$A\cap(B-A)=\phi$.

对并(或交)使用上面的结合律 1(a)和 1(b), 我们显然能够得到任意有限个集合的并(或交). 对任意集族(未必是有限的集族)求它们的并与交是有用的. 为了定义这样一个概念, 需要用到指标集. 能够想象指标集作为一个标记集. 这样, 集族的每一个元素都被赋予了指标集的一个标记. 设 A 是一个指标集, 对每一个 $\alpha\in A$, 相伴着一个集合 B_α. 我们定义

$$\bigcup_{\alpha\in A}B_\alpha=\{x\,|\,\text{对某个 }\alpha\in A\text{ 有 }x\in B_\alpha\}$$

以及

$$\bigcap_{\alpha\in A}B_\alpha=\{x\,|\,\text{对每一个 }\alpha\in A\text{ 有 }x\in B_\alpha\}.$$

如果 A 是空集，定义

$$\bigcup_{\alpha\in A} B_\alpha=\phi \quad 及 \quad \bigcap_{\alpha\in A} B_\alpha=U.$$

下列运算公式成立：

14．如果 $\alpha\in A$，则 $\bigcap\limits_{\alpha\in A} B_\alpha\subseteq B_\alpha\subseteq\bigcup\limits_{\alpha\in A} B_\alpha$，其中 $A\neq\phi$.

15．(a) 如果对每一个 $\alpha\in A$ 有 $B_\alpha\subseteq C$，则 $\bigcup\limits_{\alpha\in A} B_\alpha\subseteq C$.

(b) 如果对每一个 $\alpha\in A$ 有 $B_\alpha\supseteq C$，则 $\bigcap\limits_{\alpha\in A} B_\alpha\supseteq C$.

16．如果对每一个 $\alpha\in A(A\neq\phi)$ 有 $B_\alpha\subseteq C_\alpha$，则有 $\bigcup\limits_{\alpha\in A} B_\alpha\subseteq\bigcup\limits_{\alpha\in A} C_\alpha$ 和 $\bigcap\limits_{\alpha\in A} B_\alpha\subseteq\bigcap\limits_{\alpha\in A} C_\alpha$.

17．(a) $\bigcup\limits_{\alpha\in A}(B_\alpha\cup C_\alpha)=(\bigcup\limits_{\alpha\in A} B_\alpha)\cup(\bigcup\limits_{\alpha\in A} C_\alpha)$.

(b) $\bigcap\limits_{\alpha\in A}(B_\alpha\cap C_\alpha)=(\bigcap\limits_{\alpha\in A} B_\alpha)\cap(\bigcap\limits_{\alpha\in A} C_\alpha)$.

18．若 $A\neq\phi$，则 $\bigcap\limits_{\alpha\in A}(C\cup B_\alpha)=C\cup(\bigcap\limits_{\alpha\in A} B_\alpha)$.

19．若 $A\neq\phi$，则 $\bigcup\limits_{\alpha\in A}(C\cap B_\alpha)=C\cap(\bigcup\limits_{\alpha\in A} B_\alpha)$.

20．
$$\left.\begin{aligned}&(a)\ (\bigcup_{\alpha\in A} B_\alpha)^c=\bigcap_{\alpha\in A} B_\alpha^c\\ &(b)\ (\bigcap_{\alpha\in A} B_\alpha)^c=\bigcup_{\alpha\in A} B_\alpha^c\end{aligned}\right\}\text{(DeMorgan 公式)}.$$

并和交的符号除如上所述之外，有时也如下表示．设 $\mathscr{F}$ 是集族 $\{B\}$，则 $\bigcup\limits_{B\in\mathscr{F}} B=\{x\mid 对某个 B\in\mathscr{F} 有 x\in B\}$．对交也有与此相似的表示法．

下面的符号有时也偶然用到．如果 $\mathscr{A}$ 是集族 $\{A\}$，X 是某个确定的集合，则 $\mathscr{A}\cap X$ 表示集族 $\{A\cap X\mid A\in\mathscr{A}\}$.

最后，设 $X_i(i=1, 2, \cdots, n)$是集合，则这些集合的笛卡儿积是 $\bigtimes\limits_{i=1}^{n} X_i=\{(x_1, x_2, \cdots, x_n)\mid x_i\in X_i\}$. 这就是说，$n$ 个集合的笛卡儿积是由所有可能的$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$形成的集合，其中每一个 n 元

组$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$的第 i 个元素取自集合 X_i. 在只有两个集合的情况下，我们常将 $\overset{2}{\underset{i=1}{\times}} X_i$ 记为 $X_1 \times X_2$. 例如，如果 $A=\{1, 2\}$, $B=\{a, b, c\}$，则

$$A\times B=\{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)\}.$$

我们将在以后用较多的篇幅讨论笛卡儿积.

练　　习

0.17 证明 DeMorgan 公式[20(a)与 20(b)]不仅在 $A\neq\phi$ 时成立，而且在 $A=\phi$ 时也成立.

0.18 实直线 R 与自身的笛卡儿积是实平面. 如果第 I 象限是集合$\{(x, y)\mid x>0, y>0$ 且 x, y 是实数$\}$，试将它写成笛卡儿积的形式.

0.19 如果 $R^+=\{x\mid x$ 是实数且 $x>0\}$. 设 $\mathscr{A}$ 是 R^+ 的所有子集所成的集族，$B=[-1, 1]=\{x\mid x$ 是实数且 $-1\leqq x\leqq 1\}$. 试描述 $\mathscr{A}\cap B$.

§4 Euler-Venn 图

在研究集合论中的问题时，集合之间的关系图对我们常有帮助. 这样的图通常称为 Venn 图或 Euler 图，也可以称为 **Euler-Venn 图**. 通常将基础集合画成一个大的矩形而将所讨论的集合画在矩形内部. 例如，图 0.1 就是一个描述 $A\cap B$ 的 Euler-Venn 图.

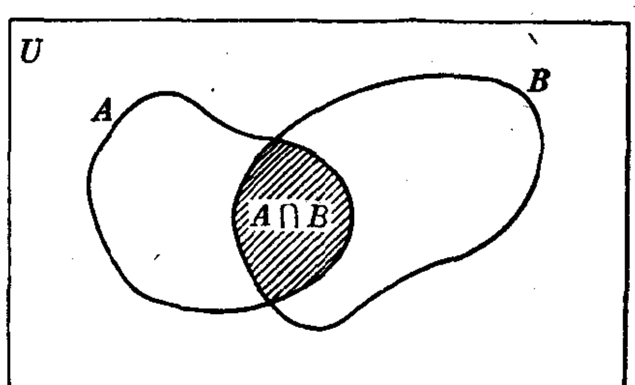

图 0.1

应当注意到，图形本身并不能给出集合论中的某个结果的证明，但它常能启发我们怎

样去作出证明. 例如, 下面的图 0.2 和 0.3 能够提示我们证明等式 $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$ 的途径.

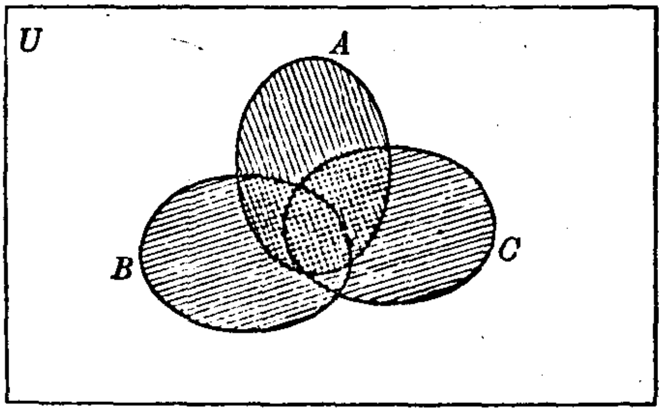

图 0.2 [表示 $A\cap(B\cup C)$]

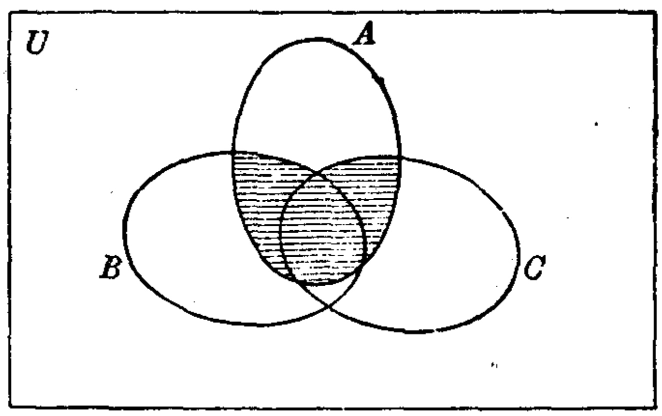

图 0.3 [表示 $(A\cap B)\cup(A\cap C)$]

练　　习

0.20 作出下面每一种情况的 Euler-Venn 图:

(a) $A\subseteq B$.

(b) $A\cap B\neq\phi$.

(c) $A\subset B^c$.

(d) $A\cap B\neq\phi$, $B\cap C\neq\phi$, $C\cap D\neq\phi$, $D\cap A\neq\phi$, $A\cap C=\phi$, $B\cap D=\phi$.

§5 关　　系

我们不一般地研究关系, 而是将注意集中到以后特别有用的

两类关系上. 我们首先一般地定义关系的概念. 简单地说, 集合 A 上的关系是序偶(a, b)所成的一个集合, 此处 $a\in A$, $b\in A$. 我们通常用 R 表示关系, 用 aRb 表示序偶(a, b)是关系集合的元素.

等价关系是满足下面三条性质的关系:

(1) 对每一个 $a\in A$ 有 aRa(**自反性**).

(2) 如果 aRb, 则也有 bRa(**对称性**).

(3) 如果有 aRb 与 bRc, 则有 aRc(**传递性**).

如果 R 是集合 A 上的一个等价关系, 我们用 $R(a)$, 或$[a, R]$, 或者$[a]$表示集合 $\{b \mid b\in A$ 且 $aRb\}$. 称集合$[a]$是由 a 决定的**等价类**. 设 $\mathscr{F}$ 是 A 的一个子集族, 如果它是不相交的(也就是说如果 $B, C\in\mathscr{F}$, $B\neq C$, 则 $B\cap C=\phi$)而且它的并是 A, 则称 $\mathscr{F}$ 是集合 A 的一个**划分**. 我们有下面的重要定理.

0.1 定理 集合 A 上的每一个等价关系诱导出 A 的一个划分, 此划分将 A 分成诸等价类. 反之, A 的每一个划分 $\mathscr{F}$ 诱导出 A 上一个等价关系, 且此等价关系的等价类正好是 $\mathscr{F}$ 中的集合.

证明 设 $\mathscr{F}=\{[a] \mid a\in A\}$. 对每一个 $a\in A$, 因为 $a\in[a]$, 故

$$\bigcup_{[a]\in\mathscr{F}}[a]=A.$$

现在假设$[a]\cap[b]\neq\phi$, 从而我们可以选出 $c\in[a]\cap[b]$. 根据$[a]$与$[b]$的定义可以得出 cRa 和 cRb. 由 R 的对称性与传递性便可以得出 aRb. 设 $d\in[a]$, 也就是 aRa, 因为我们已经有了 aRb, 再根据 R 的传递性便可以得出 dRb, 所以 $d\in[b]$. 同样可以证明对任意一个 $e\in[b]$, 我们能够得出 $e\in[a]$. 因此$[a]=[b]$. 这样一来我们证明了这些等价类要末不相交, 否则便是相同的, 因此 $\mathscr{F}$ 是 A 的一个划分.

反过来, 设 $\mathscr{F}$ 是 A 的一个划分. 当且仅当 a 与 b 属于同一个 $B\in\mathscr{F}$ 时定义为 aRb. 则 R 是一个等价关系而且 R 的等价类

正好是 $\mathscr{F}$ 中的集合. 详细的证明留给读者. ▌

序关系是我们需要考虑的第二类关系. 一般说来, **序关系**是具有传递性的关系. 下面区别我们需要的两类特殊的序关系. 第一类是**偏序关系**: 我们定义集合 S 上的一个偏序关系是满足下列条件的关系:

(1) 对任意一个 $x\in S$ 有 xRx.

(2) 对任意 $x, y\in S$, 如果有 xRy 与 yRx, 则有 $x=y$.

(3) 对任意 $x, y, z\in S$, 如果有 xRy 与 yRz, 则有 xRz.

偏序关系的一个典型例子是在某个基础集合 U 的所有子集所成的集族上的关系 $A\subseteq B$.

我们需要的第二类序关系是**全序关系**. 为了我们的目的, 定义全序关系是满足下一条件的偏序关系:

(4) 如果 $x, y\in S$, $x\neq y$, 则或者有 xRy 或者有 yRx.

全序关系的一个典型例子是实数集合上的关系 $x\leqq y$.

学生们应当注意, 他们可能遇到与上面不相同的全序关系的定义. 具体说来, 有时也如下定义全序关系:

集合 S 上的一个全序关系是满足下列条件的关系:

(1) 对任意 $x, y\in S$, 下面三条有一条且仅有一条成立:

$$xRy,\ yRx,\ x=y.$$

(2) 对任意 $x, y, z\in S$, 如果有 xRy 和 yRz, 则有 xRz.

这样定义的全序关系的一个典型例子是实数集合上的关系 $x<y$. 不过为了我们的目的, 本书采用前面一个定义作为全序关系的定义.

练　　习

0.21　在正整数集合 Z^+ 中, 设 xRy 意味着 $x-y$ 能被 7 整除(即是 $x-y=7k$, 此处 k 是一个整数). 试证明 R 是一个等价关