



# 弹性力学

程昌钧 编著

兰州大学出版社

# 弹 性 力 学

程昌钧 编著

兰州大学出版社

(甘) 新登字第 08 号

## 内容简介

本书系统全面地介绍了弹性力学的基本理论、基本原理、基本方法及其应用,全书共分为十一章。在前五章中论述了弹性力学的基本概念、边值问题的提法以及一些基本定理;第六章——第八章详细讨论了弹性力学平面问题、柱体的扭转与弯曲问题以及空间问题的求解;第九章系统介绍了弹性力学的变分原理及其应用;第十章论述了平面弹性力学问题的复函数方法;第十一章介绍了线性热弹性理论及其应用。在各章的开头都简洁地介绍了有关内容的发展;同时在各章之后附有结束语、习题及答案;对一些难点和概念上容易混淆之处已给出了相应的注释。

本书可作为理工科力学系本科生及研究生的教材,同时也可作为相近专业的学生、教师和工程技术人员的教学用书及参考书。

## 弹性力学

程昌钧 编著

兰州大学出版社出版发行

兰州市天水路 216 号 电话:8617156 邮编:730000

甘肃静宁印刷厂印刷

开本: 850 × 1168 毫米 1/32 印张: 16.75

1995 年 11 月第 1 版 1996 年 5 月第 2 次印刷

字数: 415 千字 印数: 10,410 册

ISBN 7-311-06899-9/O · 112 定价: 19.80 元

## 重 印 前 言

“弹性力学”于去年11月正式出版以来,不到半年的时间已销售上千册,目前仍在不断的征订之中。本书得到广大读者的如此厚爱,使作者深受感动并倍加感激!

为了了解“弹性力学”一书的使用效果,作者于1995年下半年专门为兰州大学力学系本科生及相关专业的研究生再次系统和完整地讲授了弹性力学,实践表明:本书无论对教和学都是一本较好的教材。由于框架清晰、结构合理、观点明确、论证严谨、实际背景强、集科学性、逻辑性和先进性为一体等特点,为教师的备课和讲授提供了良好的条件,虽然只有80小时的课时(包括习题课)亦能轻松自如地讲完该书的基本内容。对学生而言,由于手中有一本适当的教材,提高了他们课堂的听课效率,不仅使他们能更好更全面地掌握和理解弹性力学的内容和方法,达到教学大纲的要求;同时亦使他们开拓了视野,提高了学习兴趣和积极性。

作者于96年初对本教材的使用情况进行了一次书面调查。填表者有本校和兄弟院校力学专业的教师、本科生、相关专业的研究生和青年教师。50多份的调查表中不同层次的读者从各个不同的角度和方面对“弹性力学”都作了充分的肯定。他们普遍认为这是一本具有鲜明特色和创新性的好书,其最大的优点是适合于不同层次、不同专业的读者,使他们从书中都能学到各自所需的东西并受到启迪。借此机会,本人对读者对弹性力学一书的高度评价和赞赏表示衷心感谢!

最后,借本书重印之际,本人已订正原书中的一些印刷错误。  
希望本书能得到更多读者的喜爱,并衷心欢迎大家批评指正!

程昌钧

1996年3月兰州

# 目 录

|                          |      |
|--------------------------|------|
| 前言                       | (1)  |
| 第一章 绪论                   | (1)  |
| 1.1 弹性力学                 | (1)  |
| 1.2 弹性力学的基本假设和基本规律       | (3)  |
| 1.3 弹性力学的研究方法            | (6)  |
| 1.4 弹性力学的发展梗概            | (7)  |
| 第二章 应力分析                 | (10) |
| 2.1 外力和内力                | (10) |
| 2.2 应力和应力张量              | (12) |
| 2.3 坐标变换下应力张量的交换公式       | (17) |
| 2.4 主应力和应力主方向、应力张量的不变量   | (21) |
| 2.5 最大剪应力和正应力的极值         | (24) |
| 2.6 平衡(运动)微分方程、力的边界条件    | (28) |
| 2.7 正交曲线坐标系中的应力张量和平衡微分方程 | (32) |
| 2.8 结束语                  | (36) |
| 习题                       | (37) |
| 第三章 应变分析                 | (41) |
| 3.1 位移和变形                | (42) |
| 3.2 应变张量和转动张量            | (44) |
| 3.3 长度和角度的变化             | (49) |
| 3.4 坐标变换下应变张量的变换公式       | (53) |
| 3.5 主应变和应变主方向、应变张量的不变量   | (56) |
| 3.6 变形协调条件或相容性条件         | (60) |
| 3.7 多连通域、位移单值性条件         | (67) |
| 3.8 正交曲线坐标系中的有关公式        | (71) |

|            |                               |              |
|------------|-------------------------------|--------------|
| 3.9        | 有限变形理论简介 .....                | (75)         |
|            | 习题 .....                      | (83)         |
| <b>第四章</b> | <b>应力应变关系 .....</b>           | <b>(87)</b>  |
| 4.1        | 热力学基本定律、应变能 .....             | (88)         |
| 4.2        | 各向异性弹性介质的应力应变关系、广义胡克定律 .....  | (93)         |
| 4.3        | 各向同性弹性介质的应力应变关系 .....         | (96)         |
| 4.4        | 各向同性弹性介质的弹性常数 .....           | (103)        |
| 4.5        | 各向同性弹性介质的应变能 .....            | (106)        |
| 4.6        | 结束语 .....                     | (108)        |
|            | 习题 .....                      | (109)        |
| <b>第五章</b> | <b>线性弹性力学的边值问题与一般原理 .....</b> | <b>(111)</b> |
| 5.1        | 线性弹性力学的基本方程和边界条件 .....        | (111)        |
| 5.2        | 弹性力学边值问题的位移解法 .....           | (115)        |
| 5.3        | 弹性力学边值问题的应力解法、应力协调方程 .....    | (119)        |
| 5.4        | 线性弹性力学边值问题解的迭加原理 .....        | (123)        |
| 5.5        | 应变能定理 .....                   | (126)        |
| 5.6        | 弹性力学边值问题解的唯一性定理 .....         | (128)        |
| 5.7        | 功的互等定理 .....                  | (132)        |
| 5.8        | 圣维南原理—力作用的局部性原理 .....         | (137)        |
| 5.9        | 某些简单弹性力学问题的求解 .....           | (140)        |
|            | 习题 .....                      | (149)        |
| <b>第六章</b> | <b>弹性力学的平面问题 .....</b>        | <b>(153)</b> |
| 6.1        | 平面弹性力学问题的边值问题 .....           | (154)        |
| 6.2        | 平面弹性力学基本边值问题的解法 .....         | (160)        |
| 6.3        | 应力函数及其性质 .....                | (162)        |
| 6.4        | 位移的积分表达式与位移单值性条件 .....        | (172)        |
| 6.5        | 基本边值问题的应力函数表示 .....           | (176)        |
| 6.6        | 多项式应力函数及其应用举例 .....           | (180)        |
| 6.7        | 极坐标系中平面弹性力学问题的基本方程 .....      | (190)        |
| 6.8        | 轴对称问题的一般解及其应用 .....           | (196)        |

|            |                                  |              |
|------------|----------------------------------|--------------|
| 6.9        | 曲梁的弯曲问题                          | (201)        |
| 6.10       | 圆孔附近的应力集中                        | (206)        |
| 6.11       | 半无限楔形体与半无限平面问题                   | (210)        |
| 6.12       | 结束语                              | (219)        |
|            | 习题                               | (220)        |
| <b>第七章</b> | <b>Saint-Venant 问题——柱体的扭转与弯曲</b> | <b>(228)</b> |
| 7.1        | 圣维南问题                            | (231)        |
| 7.2        | 柱体扭转问题的应力解法、应力函数                 | (240)        |
| 7.3        | 柱体扭转问题的位移解法、扭曲函数                 | (244)        |
| 7.4        | 椭圆截面杆的扭转                         | (248)        |
| 7.5        | 带半圆槽的圆柱体的扭转                      | (250)        |
| 7.6        | 等边三角形截面柱体的扭转                     | (253)        |
| 7.7        | 矩形截面柱体的扭转                        | (257)        |
| 7.8        | 扭转问题的复变函数解法                      | (265)        |
| 7.9        | 薄膜比拟法                            | (266)        |
| 7.10       | 薄壁杆件的自由扭转                        | (268)        |
| 7.11       | 柱体在端部剪力作用下的弯曲                    | (275)        |
| 7.12       | 椭圆截面杆的弯曲                         | (282)        |
| 7.13       | 结束语                              | (285)        |
|            | 习题                               | (285)        |
| <b>第八章</b> | <b>弹性力学空间问题的解</b>                | <b>(290)</b> |
| 8.1        | 拉梅方程的特解                          | (291)        |
| 8.2        | Папкович-Neuber 通解               | (296)        |
| 8.3        | Boussinesq-Галеркин 通解           | (300)        |
| 8.4        | 拉梅位移势函数及其应用                      | (303)        |
| 8.5        | 半无限体弹性表面上受载荷作用的解                 | (306)        |
| 8.6        | 半空间体边界面上受分布压力的问题                 | (313)        |
| 8.7        | 两个弹性球体的接触问题                      | (319)        |
| 8.8        | 用应力求解空间问题、应力函数                   | (324)        |
| 8.9        | 按应力求解空间轴对称问题                     | (327)        |

|             |                                                 |              |
|-------------|-------------------------------------------------|--------------|
| 8.10        | 回转体在匀速转动时的应力 .....                              | (331)        |
| 8.11        | 结束语 .....                                       | (334)        |
|             | 习题 .....                                        | (335)        |
| <b>第九章</b>  | <b>弹性力学的变分原理及其应用 .....</b>                      | <b>(337)</b> |
| 9.1         | 变分法的若干基本概念和预备定理 .....                           | (338)        |
| 9.2         | 弹性力学中有关变分原理的若干基本概念 .....                        | (346)        |
| 9.3         | 广义虚功原理、高斯积分恒等式 .....                            | (352)        |
| 9.4         | 最小势能原理与力的平衡条件 .....                             | (358)        |
| 9.5         | 最小余能原理与几何连续性条件 .....                            | (361)        |
| 9.6         | 广义变分原理 .....                                    | (365)        |
| 9.7         | 变分原理的应用 .....                                   | (371)        |
| 9.8         | 余能原理在开孔平面应力问题中的应用 .....                         | (379)        |
| 9.9         | 基于变分原理的近似解法 .....                               | (392)        |
|             | 习题 .....                                        | (400)        |
| <b>第十章</b>  | <b>弹性力学平面问题的复变函数解法 .....</b>                    | <b>(405)</b> |
| 10.1        | 弹性力学平面问题的复函数表示 .....                            | (406)        |
| 10.2        | 各复变复数的确定程度 .....                                | (413)        |
| 10.3        | 有限多连通域内 $\varphi_1(z)$ 和 $\psi_1(z)$ 的表达式 ..... | (416)        |
| 10.4        | 无限大域的情形 .....                                   | (420)        |
| 10.5        | 化弹性力学平面问题为复变函数论问题 .....                         | (426)        |
| 10.6        | 复应力函数的幂级数解 .....                                | (430)        |
| 10.7        | 保角映射与曲线坐标 .....                                 | (433)        |
| 10.8        | 圆域问题的解 .....                                    | (439)        |
| 10.9        | 椭圆孔口问题 .....                                    | (446)        |
| 10.10       | 结束语 .....                                       | (559)        |
|             | 习题 .....                                        | (560)        |
| <b>第十一章</b> | <b>热弹性理论及其应用 .....</b>                          | <b>(465)</b> |
| 11.1        | 线性热弹性理论的基本方程 .....                              | (466)        |
| 11.2        | 热弹性位移势 .....                                    | (472)        |
| 11.3        | 平面热应力问题与热应力函数 .....                             | (477)        |

|            |                      |       |
|------------|----------------------|-------|
| 11.4       | 不产生热应力的平面温度场 .....   | (485) |
| 11.5       | 圆筒或圆环内的热应力 .....     | (488) |
| 11.6       | 平面热弹性问题的位移势 .....    | (495) |
| 11.7       | 轴对称变温分布下的二维热应力 ..... | (502) |
| 11.8       | 圆球体的球对称热应力 .....     | (506) |
| 11.9       | 结束语 .....            | (509) |
|            | 习题 .....             | (509) |
| 名词索引 ..... |                      | (513) |
| 参考书目 ..... |                      | (519) |

# 第一章 绪 论

## 1.1 弹性力学

弹性力学又称弹性理论,是固体力学的一个重要分支,它研究弹性体在外力和其它外界因素作用下所产生的变形和内力。弹性力学可分为数学弹性力学和应用(或工程)弹性力学,当然,这种分法并不是十分严格的。数学弹性理论是用严格的数学分析方法,在相当一般的前提假设下,首先建立起弹性力学的合理数学模型,即弹性力学的基本边值问题(对于弹性静力学问题)或弹性力学的初边值问题(对于弹性动力学问题);然后讨论解的性质,例如存在性、唯一性等,同时寻求适当的数学方法求出问题的解,从而得到弹性体的变形和内力,以供工程实际部门参考和使用。而对于应用弹性理论,例如板壳理论、弹性稳定性理论等,虽然也采用数学分析的手段研究某些具体结构在外力作用下的变形、内力和稳定性,但为了得到可供工程实际问题所需要的结果,人们不得不进一步作出假定,例如板壳理论中的直法线假设等。在本书中我们沿袭数学弹性理论的框架建立弹性力学的基本概念、基本原理和给出某些求解弹性力学问题的方法,以及例证性问题的解。

所谓弹性是指物体在外界因素作用下所产生的应力和应变之间的关系是一一对应的,或者说,应力和应变之间双方互为单值函数。若这种函数关系是线性的,则称物体具有线性弹性性质。反之,若这种函数关系是非线性的,则称物体具有非线性弹性性质。不论在何种情况下,当去掉作用于物体上的外界因素时,物体将立即恢

复它原来的形状,这就是材料的弹性性质。严格地说,只对一定范围内的应力,物体才呈现出弹性性质,而当应力超过这个范围时,物体会发生一定的永久变形,这种现象称为塑性。所以,只在应力状态的一个给定范围内才能预示出一种物体的弹性性质,在应力状态超过这个给定范围时,同一物体的力学性能将由另一组应力应变关系,例如塑性本构关系来代替。

在近代工业中,例如水利工程、机械工程、土木工程、造船工程、航空航天工程许多工业部门中,由于人们必须清楚地知道结构或结构元件在外因作用下的静动力响应,而这些结构或结构元件往往又能视为一种弹性固体。因此,弹性力学与近代工业有着广泛的联系,具有极重要的应用。可以认为,根据弹性力学所提供的结构或结构元件的受力分析、变形分析以及稳定性分析是近代工业技术的重要基础。

弹性力学作为固体力学的重要基础,无疑它与材料力学和结构力学有着重要的关系。一方面,弹性力学是这些学科的继续和深入,研究和处理更为复杂的工程实际问题;另一方面,由于弹性力学的理论更具一般性,所以弹性力学的解可对材料力学所得的解做出正确的评估。同时,弹性力学又是塑性力学、弹性断裂力学、板壳理论、弹性稳定性理论及其它一些交叉学科,例如电磁弹性理论、偶应力理论等的重要基础。正因为如此,掌握弹性理论不但对理工科院校力学专业的学生是必需的,而且对其它相近专业的学生亦是必需的。

在弹性力学的发展过程中,人们可以看到弹性理论与数学的许多分支都有着密切的关系。一方面,数学是弹性力学的重要支柱,没有数学就没有弹性力学;另一方面,弹性理论的建立又促进和推动了数学的发展,数学的许多分支,例如,微分方程、变分学、泛函分析、凸分析、广义函数、奇异摄动理论等都是以弹性力学的某些基本问题为其研究背景的。随着非线性弹性力学的深入研究,

对近代数学的要求不但越来越广,而且也越来越深。因此,弹性力学不仅是一门应用性很强的学科,而且也是一门基础性学科,在自然科学的发展长河中,弹性力学对促进自然科学的发展不但过去起过积极的作用,而且将来亦将会起着更重要的作用。

## 1.2 弹性力学的基本假设和基本规律

### 1. 基本假设

任何一门学科都是在一定的基本假设前提下建立起来的,弹性力学也是如此。这些基本假设事实上规定了弹性力学的研究范围,如果超出这种范围,弹性理论必须被修正以便适用于新的前提条件。弹性力学的基本假设和一般变形体力学的基本假设相似,不外乎涉及两个方面,其中一方面是物理假设,即关于物体材料性质的假设;另一方面是为了应用数学分析的工具而所作的几何连续性假设。

#### (1) 连续性假设

所谓连续性假设有两层含义,一方面是认为组成物体的物质粒子连续地充满了物体所占的空间,另一方面是认为物体内的各力学量,例如密度、应力、应变、位移等都是物体所占有空间点的连续函数。同时还认为物体变形后仍是连续的,不产生新的不连续面或不连续线,即变形前物体中的质点与变形后物体中的质点是一一对应的。能够理解,这里所说的连续性假设虽然对一般的变形体力学也是适用的,然而,严格地说,这只是一种近似假设。实际上,由于物体是由原子和分子组成的,对于固体而言,物体可认为是由无数多的多晶体晶粒组成的,而这些物质粒子之间本身存在着空隙,因此,构成物体的物质粒子实际上不可能是连续地充满物体的。不过,因为我们考虑的是物体的宏观力学过程,物体的宏观尺寸远大于粒子之间的相对距离,故可认为连续性假设是成立的。

## (2) 线性弹性假设

所谓弹性是指物体在外界因素作用下发生变形,而当除去外界因素时,物体立即恢复其原来形状的性质。用数学语言来表达就是应力和应变之间双方互为单值函数,而且与变形过程无关。当应力和应变之间服从线性规律,即胡克定律时,则称物体服从线性弹性假设。虽然,胡克定律是可以通过实验得到验证的,但在第四章中可以看到胡克定律亦是可以根据热力学定律导出来的。对于许多工程结构材料而言,当应力不超过一定限度时,线性弹性假设是符合实际的。线性弹性假设是弹性力学与其它连续体力学的本质区别。

除连续性和线性弹性两个基本假设之外,在弹性力学中,为了研究方便,通常还有均匀性假设、各向同性假设、小变形假设、无初应力假设等。所谓均匀性假设是指在弹性体中各点的材料性质是相同的;而各向同性假设则是指弹性体中每一点各个方面的弹性性质是相同的;小变形假设则是指物体的位移、转动和应变都很小,使得位移和应变之间呈线性关系;无初应力假设则是指除去物体所受外力后物体处于无应力的自然状态。在本书中,我们亦将作这些假设。

## 2. 基本规律

和其他连续介质力学相同,弹性力学的基本理论是基于以下三个方面的规律而建立起来的,即:

### (1) 运动(或平衡)规律

物体受外界因素的作用发生运动或处于平衡状态。由于我们所研究的是物体的宏观运动或变形规律,所以,在任何时刻,物体的任何一部分都必须服从牛顿三大定律,即动量平衡原理、动量矩平衡原理以及作用和反作用原理。这将给出物体内的应力与给定体积力之间满足一定的微分方程,即所谓运动(或平衡)微分方程,同时,若在物体的边界  $S_0$  上给定外力,则还将给出边界附近的应

力与给定外力的平衡条件。

同时,在弹性力学中,我们考虑的是热力物质,所以物体的运动或变形过程还必须服从热力学的基本定律。

### (2) 几何连续性规律

因为连续性假设成立,所以要求变形前连续的物体变形后仍为连续体,不产生新的不连续面或不连续线。具体地说,在物体内部,变形由连续的位移得到,并且若物体在表面  $S_0$  上与另一物体  $V_1$  相连接,而后者在  $S_0$  上的位移是已知的,则要求物体变形后仍必须与  $V_1$  在  $S_0$  上相连接,并取  $V_1$  在  $S_0$  上的已知位移值。反之,当物体的变形为已知时,则要求已知的变形能保证给出与之对应的单值连续位移场。这些就是几何连续性规律所必需要求的。

不难看到,前面两个基本规律对于任何的变形体,不管其物质特性如何都是适用的。然而,实验或实践告诉我们:几何形状、大小相同的两个物体,在同样的外界因素作用下,其响应是不同的。例如,大多数固体在不太大的外力作用下其变形是很轻微的,而流体则要流动并取其容器的形状,物质的内部性质不同是造成这种不同响应的基本原因。因此,为了研究弹性力学还必须使物体的性质区别于其它的介质,即必须作物性的规定。

### (3) 线性弹性规律

假设物体的弹性性质服从胡克定律。一方面,要求应力分量是变形分量的线性函数;另一方面,应变分量亦是应力分量的线性函数。这是弹性力学与其它变形体力学的本质区别所在。

由于弹性力学是基于上述三方面的规律而建立起来的,因此,在叙述上,首先分别从上述三方面入手,建立起各物理量,即位移、应变和应力相互之间满足的基本关系,以及它们与外部给定力和几何约束之间的关系。在此基础上给出弹性静力学基本边值问题的提法(本书只讨论弹性静力学)或弹性动力学初边值问题的提法。再讨论边值问题的解的性质和一般原理,以及若干类型弹性力

学问题的求解,同时还讨论弹性力学的能量原理及其应用等。

### 1.3 弹性力学的研究方法

和固体力学的其它分支一样,弹性力学的研究方法有实验方法、数学方法以及实验和数学相结合的方法。

实验方法就是用机械的、电学的、光学的、声学的以及其它方法来测定结构或结构元件在外力作用下应力和应变的分布规律。实验方法既为发展新理论提供依据,又是提高工程设计质量和进行失效分析的一种重要手段。在弹性力学中,许多难于计算的问题往往都是由实验方法求解的。

数学方法就是用数学分析的工具由给定的弹性力学边值问题求出物体的位移、应变和应力,这方面的研究成果构成了数学弹性理论的基本内容。不过,我们将看到,由于弹性力学边值问题中涉及 15 个未知量的偏微分方程,所以,一般能用数学分析方法得到的解是很少的,只对一些特殊类型的问题才能得到精确解。常用的数学方法有:

#### 1. 精确解法

精确解法就是采用数学分析的手段求得给定弹性力学边值问题的精确解。在这方面用得较多的有分离变量法和复变函数方法。例如,在球坐标系和柱坐标系中求解球体问题和圆柱体问题便可以用分离变量法。在弹性力学的平面问题和柱体的扭转问题中,由于可分别引入应力函数和扭曲函数,并将问题可化为平面重调和方程和调和方程的边值问题,在这些问题中可借助于复变函数方法求得问题的精确解。另外,对有些较简单的问题可以采用逆法或半逆法得到精确解。

#### 2. 近似解法

对于一些较复杂的问题,常采用近似的方法来求问题的近似

解。虽然,弹性力学的近似解法已有很多,但最为有效的近似解法是基于能量原理的变分方法。其中,主要的有瑞利—李兹法、伽辽金方法、加权残量法等。目前,能量法从原理到解法上,内容已十分丰富,特别是各种广义变分原理的建立,更扩大了能量法的应用范围。

### 3. 数值方法

以电子计算机为基本工具,采用各种数值方法求得弹性力学问题的数值解。例如,作为能量法的一种新发展,目前广泛应用于各种类型弹性力学问题的有限单元法就是十分有效的一种数值计算方法。此外,还有边界积分方程、边界元方法、有限差分方法等对求解某些问题也都是很有效的方法。

对于一个复杂的弹性结构,还常常将数学方法,实验方法以及数值分析方法有机的结合起来,以便给出问题的可靠解答。

## 1.4 弹性力学的发展梗概

弹性力学的建立和发展已经历了一个漫长的历史时期,不可能在一本教科书的绪言中详尽地介绍弹性力学的发展史。这里,仅为了使读者了解弹性力学的发展梗概,极其简略地指出与弹性力学的建立和发展过程有关联的一些概貌。

在日常生活中,人们利用弹性性质的历史可以追溯到非常久远的时代,但探讨其科学基础的最初尝试至今却只有 350 年的历史,这便是 1638 年伽利略所做的尝试。

一般地,人们认为有系统地、定量地研究弹性力学大约是从 17 世纪 70 年代开始的。其标志是英国人 R·胡克和法国人 E·马略特分别于 1678 年和 1680 年提出了弹性体的变形和所受的力成正比的规律,即材料的弹性所应服从的规律,后来被称为胡克定律。之后,1687 年 I. 牛顿奠定了力学的三大定律,并由于数学的发