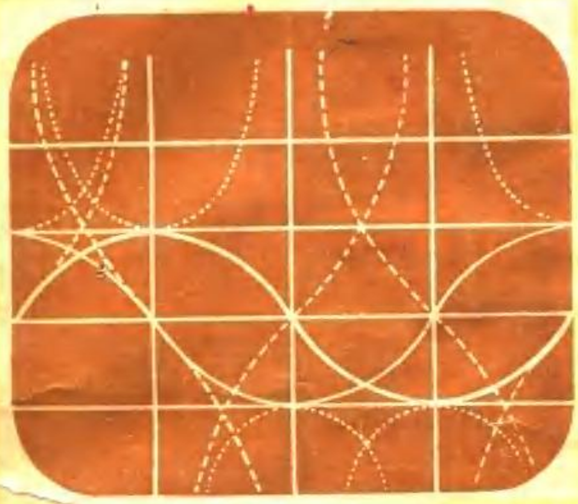


单墫

几何不等式

上海教育出版社

几何不等式

单墫

上海教育出版社

几何不等式

单墫

上海教育出版社出版

（上海永福路 123 号）

新华书店上海发行所发行　上海市印刷四厂印刷

开本 787×1092 1/32　印张 4　字数 87,000

1980 年 2 月第 1 版　1980 年 2 月第 1 次印刷

印数 1—100,000 本

统一书号：7150·2317　　定价：0.29 元

前　言

不少几何问题中出现不等式，解决这类不等问题往往需要综合地运用几何、代数、三角甚至力学、光学等方面的知识。这本小册子叙述了这方面的问题，希望能对读者有所帮助.

本书的内容是初等的，以平面几何中的不等式为主．全书共分为八节，前面用的是几何方法，后面则要用到一些代数、三角的知识，最后一节是立体几何中的不等式．各节之间虽有联系，但是并没有绝对的依赖关系，因此读者可以根据自己的需要，选读某几节或某些例题.

本书有习题一百多个，分散在各节，有的习题是该节内容的补充，有的是定理或例题的应用，也有若干难度稍大，可供讨论的问题．习题均有扼要的解答或提示.

本书是在常庚哲老师的关怀与指导下完成的．在习作中，从李克正、肖刚同志处得到许多启发与帮助，他们还提供了不少问题和解法．李克正同志仔细地校阅了初稿，提出不少改进意见．作者谨表示衷心的感谢．作者还要感谢李亚非同志为本书绘制了附图.

囿于水平，错误和不妥之处恐难避免，切望读者批评指正。

目　录

§1 定理 I 及化直法

在几何量(长度、角度、面积、体积等)的大小比较中,线的长短比较是最基本的.

这一节的内容就是比较线的长短. 主要的依据是下面的定理.

定理 I 连结 A、B 两点的最短线是线段 AB.

如图 1·1 曲线 AmB 比折线 $AEFB$ 长, 折线 $AEFB$ 比折线 AFB 长, 折线 AFB 比线段 AB 长. 最后的一句话也就是:三角形的两条边的和大于第三条边.

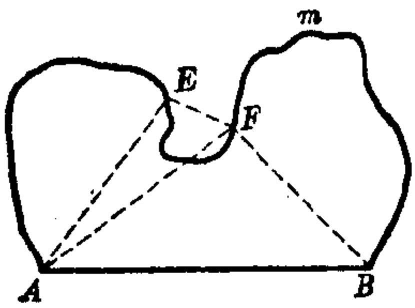


图 1·1

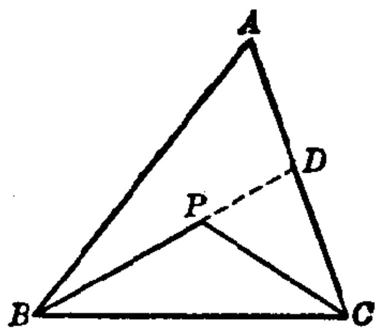


图 1·2

定理 I 在直观上是很明显的, 它的证明可以在通常的几何书中找到,我们这里就不详述了.

看上去很简单的定理 I, 应用却很广泛. 它是一个非常重要的基本定理,许多命题的证明都少不了它.

[例题 1] P 为 $\triangle ABC$ 内一点 (图 1·2), 证明: $PB+PC<AB+AC$.

解 延长 BP 与 AC 相交于 D, 由定理 I,

$$AB+AC=AB+AD+DC$$
$$>BD+DC=BP+PD+DC$$
$$>BP+PC.$$

[例题 2] P 为 $\triangle ABC$ 内一点(图 1·3), 证明:

$$\frac{1}{2}(AB+AC+BC)$$
$$<PA+PB+PC<AB+AC+BC.$$

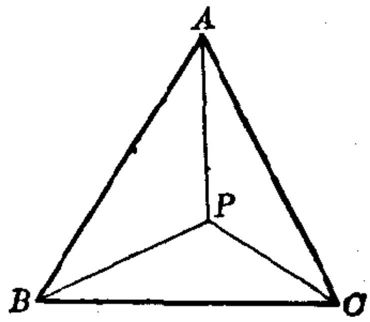


图 1·3

解 $AB<PA+PB$,

$BC<PB+PC$,

$CA<PC+PA$,

三式相加, 即得

$$AB+BC+CA<2(PA+PB+PC).$$

$$\therefore\quad \frac{1}{2}(AB+BC+CA)<PA+PB+PC.$$

又由例题 1,

$$AB+AC>PB+PC,$$
$$AB+BC>PA+PC,$$
$$BC+AC>PA+PB.$$

三式相加并除以 2 即得

$$AB+BC+CA>PA+PB+PC.$$

[例题 3] 点 A、B 在直线 MN 两侧(图 1·4), 在 MN 上求一点 S, 使 $SA+SB$ 为最小.

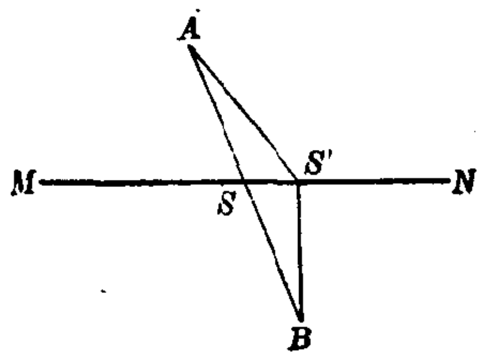


图 1·4

解 这个问题是很简单的. 只要连结 A、B, AB 与 MN 的交点 S 就是所求的点.

为了证明 S 确实是合乎要求的点, 只要在 MN 上任取一点 S', 由定理 I,

$$S'A+S'B \geqslant AB=SA+SB,$$

并且当 S' 与 S 不相同时，$\geqslant$ 可改为严格的不等号 $>$.

在一个不等式中，"$\geqslant$"能否改为"$>$"，等号什么时候才成立，往往是一个值得讨论的问题．但在下面我们不一一指出，请读者自己留意.

[例题 4]　点 A、B 在直线 MN 的同侧(图 1·5)，在 MN 上求一点 S，使 $SA+SB$ 为最小.

解　作点 B 关于 MN 的轴对称点 B'，这一题便化成上一题，即 AB' 与 MN 的交点 S 就是所求的点.

理由是对于 MN 上任一点 S'，

$$S'A+S'B=S'A+S'B' \geqslant AB'=AS+SB'=AS+SB.$$

大家知道光是沿最短线传播的，因此光从 A 到 B 是沿着直线(段) AB 前进的．这就是定理 I．光的这种性质常常给我们以启发，帮助我们找到一些几何问题的解.

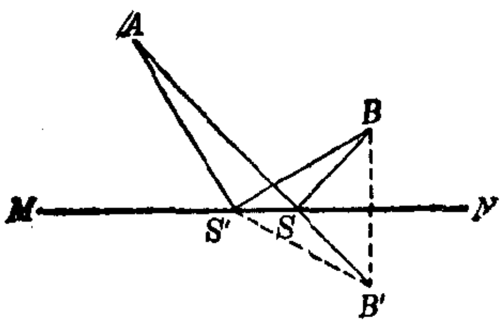


图　1·5

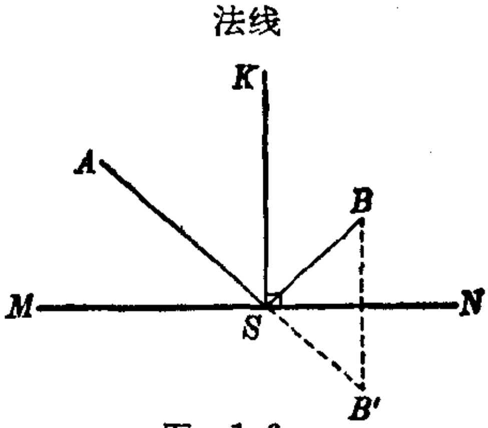


图　1·6

如在例题 4 中，设想 MN 是一面镜子，那么 B 关于 MN 的对称点 B' 也就是 B 在镜中的象．如果光线从 A 出发，经过镜面上一点 S 再反射到 B，则 $AS+SB=AS+SB'$，但因为光线所走的距离 $SA+SB$ 即 ASB' 应当是最短的．所以 A、S、B' 应该成一直线．这样还同时得到光学上的另一条定律：反射角等于入射角．即应当有 $\angle ASK=\angle BSK$（见图 1·6，

SK 为法线，即 MN 的垂线）．这些都和上面推出的结果是一致的．

［例题 5］ A' 为 $\triangle ABC$ 的外角平分线 AT 上任意一点（图 1·7）．证明：

$$A'B+A'C\geqslant AB+AC.$$

解 我们把这个不等式中较小的量 $AB+AC$ "伸直" 为一条直线段，即延长 BA 到 C' 使 $AC'=AC$，连 A'、C'．显然

$$A'B+A'C'>BC'=BA+AC.$$

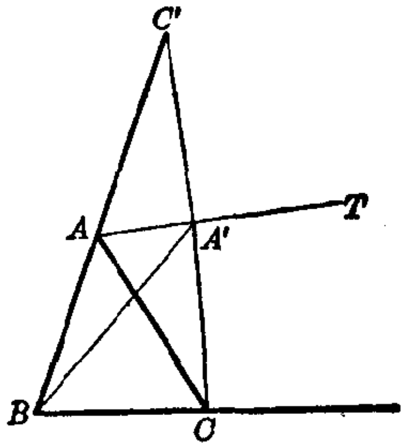


图 1·7

如果 $A'C'=A'C$，那么问题就完全解决了．而这可由 $\triangle AA'C'\cong\triangle AA'C$ 立即推出．

细心的读者会发现，例题 5 与例题 4 实质上是一样的，本题的 AT 便相当于上一题的 MN．

［例题 6］ 在同底等高的三角形中以等腰三角形的周长为最小．

解 设 $\triangle ABC$ 是等腰三角形（图 1·8）：$AB=AC$，$\triangle A'BC$ 与 $\triangle ABC$ 同底等高，即 A' 到 BC 的距离与 A 到 BC 的距离相等．显然 $AA'\parallel BC$，并且 AA' 就是 $\triangle ABC$ 的外角平分线，由上一题立即得到 $AB+AC\leqslant A'B+A'C$．

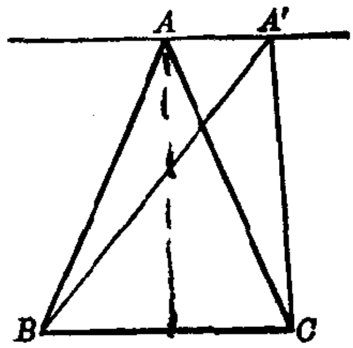


图 1·8

［例题 7］ 一个圆盘被曲线 AmB 分成面积相等的两份，证明：曲线 AmB 的长 $l\geqslant$ 圆盘的直径．

解 这里曲线的形状是任意的，似乎很难下手．但考虑到定理 I，我们可以设法把曲线改成折线，即对于曲线 AmB 上任意一点 E（图 1·9），显然有 $l\geqslant EA+EB$，只要我们能在

曲线 AmB 上选出一个适当的点 E，使 $EA+EB\geqslant$ 圆盘直径就可以了．由于 $\triangle OAB$ 是等腰三角形，根据上面一题，只要过圆心 O 作一条直径 $CD /\!/ AB$，CD 与曲线 AmB 的交点 E 就是符合我们要求的点．

剩下的问题是：CD 是否一定与曲线 AmB 相交？不难看出，如果直径 CD 与曲线 AmB 不相交，那么曲线 AmB 完全在 CD 的一侧，这样圆盘被曲线 AmB 分成的两个部分面积一大一小，与已知两部分面积相等矛盾．

我们顺便证明了这样的事实：如果曲线 AmB 的长度 $l<$ 圆盘直径，那么曲线 AmB 一定在某个半圆（$\odot O$ 的一半）内．这是因为曲线 AmB 一定不与平行于弦 AB 的直径 CD 相交，否则 $l\geqslant$ 圆盘直径．

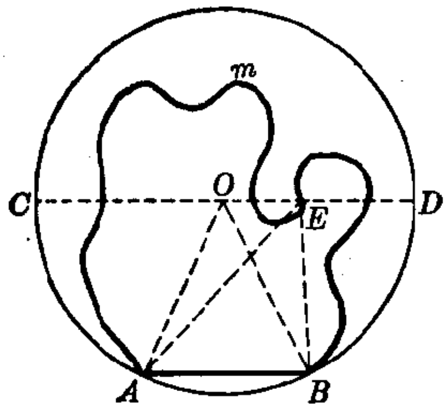


图 1·9

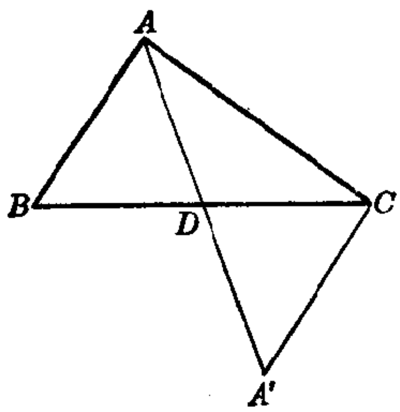


图 1·10

［例题 8］ 在 $\triangle ABC$ 中，AD 为中线，证明：$AD<\frac{1}{2}(AB+AC)$．

解一 题目所要证明的就是：

$$2AD<AB+AC.$$

我们构造一条长为 $2AD$ 的线段，即延长 AD 到 A' 使 $DA'=AD$（图 1·10，在证明与中线有关的命题时，这是常用的方法之一）．连结 $A'C$．由定理 I，

$$AC+A'C>AA'=2AD.$$

而由三角形的全等不难看出 $AB=CA'$.

解二 我们也可以直接用 AD、$\frac{1}{2}AB$、$\frac{1}{2}AC$ 来构成一个三角形，这只要取 AB 的中点 E（图 1·11），连结 DE，$\triangle AED$ 就是我们所需要的三角形.

$$AD<AE+DE=\frac{1}{2}(AB+AC).$$

我们同时证明了 $AD>\frac{1}{2}|AB-AC|$.

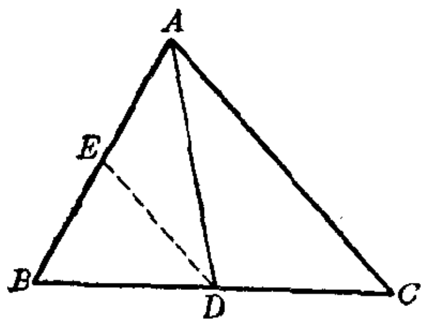


图 1·11

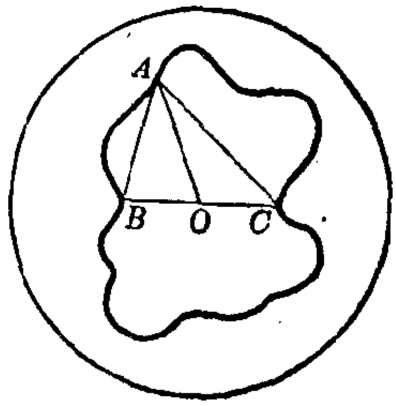


图 1·12

［例题 9］ 证明：长为 $4l$ 的闭曲线 L 一定可以用一个半径为 l 的圆把它覆盖住（注意这里的曲线形状和例题 7 一样，是任意的）.

解 这个问题可以分成两步来解决. 第一步是把所说的覆盖圆作出来，也就是设法找到这个圆的圆心 O. 第二步证明曲线 L 上的每一点都在 $\odot O$ 内或圆周上，也就是对于 L 上的任一点 A，证明 $OA\leqslant l$.

首先来确定圆心 O. 如果 L 本身就是一个圆，那么 O 就是直径 BC 的中点，而 BC 平分圆周即曲线 L. 这就启发我们用下面的方法来确定覆盖圆：在 L 上取两点 B、C 使 B、C 将 L 的长分为相等的两部分（图 1·12），即各等于 $2l$，再取

BC 中点 O，以 O 为圆心，l 为半径作圆.

对于 L 上任一点 A，连结 AB、AC，OA 为 $\triangle ABC$ 的中线，由例题 8：

$$OA \leqslant \frac{1}{2}(AB+AC) \leqslant \frac{1}{2}\cdot 2l = l.$$

这就证明了 $\odot O$ 确实将曲线 L 完全盖住.

[例题 10]　$\triangle ABC$ 为正三角形，$\triangle DEF$ 为它的内接三角形，即顶点 D、E、F 分别在 BC、CA、AB 上(图1·13)，证明 $\triangle DEF$ 的周长 $\geqslant \frac{1}{2}\triangle ABC$ 的周长.

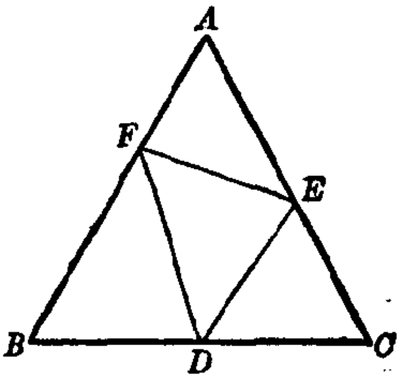


图 1·13

解　设法将 $\triangle ABC$ 的周长化为一条线段，即如图1·14，将 $\triangle ABC$ 连续翻转五次，各次对称轴分别为 CA、CB'、$B'A'$、$A'C'$、$C'B''$，最后得到一个平行四边形 $ABB''A''$，$AA''=\triangle ABC$ 的周长. 这时 $2\triangle DEF$ 的周长成为折线 $FED'F''E''D'''F$，它的长 $\geqslant AA''$.

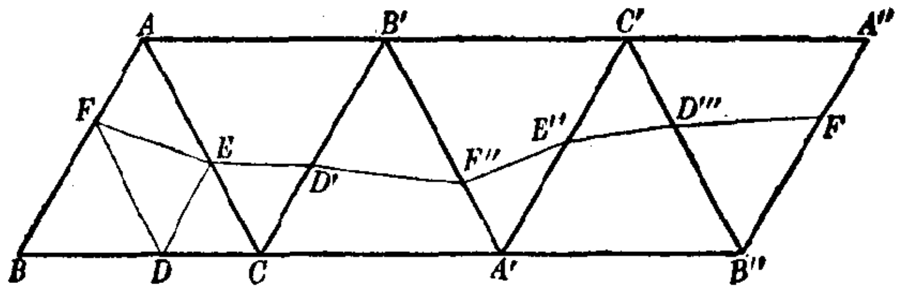


图 1·14

[例题 11]　如果凸多边形 $A_1A_2\cdots A_n$(简称凸多边形 A)在多边形 $B_1B_2\cdots B_m$(简称多边形 B)内，证明：A 的周长 $\leqslant B$ 的周长.

解　首先解释一下什么叫凸多边形. 如果一个多边形的

所有顶点都在它的任一条边的同侧（或这条边上），这个多边形就叫做凸多边形. 如图中 A 是凸多边形，而 B 不是凸多边形 (B_3、B_6 不在 B_4B_5 的同侧).

我们采用如下的步骤来证明.

先沿着直线 A_1A_2 将多边形 B 切成两块(图 1·15)，由于 A 是凸的，它的顶点在同一块中. 去掉不含有 A 的那一块，显然剩下的一块 B' 的周长 $\leqslant B$ 的周长.

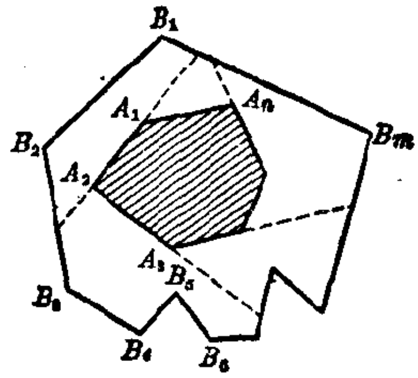


图 1·15

再依次沿 A_2A_3，A_3A_4，…切下去，每次保留含 A 的那一块，所留下的多边形 B''，B'''，…的周长一个小于等于前一个.

这样一直切到 A_nA_1，最后剩下的一块就是 A，

$$\therefore \quad A \text{ 的周长} \leqslant B \text{ 的周长}.$$

注意：(1) 多边形 B 不一定要是凸的，但 A 一定要是凸的，否则命题不成立，请读者自己举出反例；

(2) 如果 B 是由曲线围成的，命题当然也成立；

(3) 例题 1 是本例的特殊情况.

例题 11 可以推广为下面的例题 12.

[例题 12] 如果凸的闭曲线 C 在曲线 C' 内部，证明 C 的周长 $\leqslant C'$ 的周长.

先解释一下凸曲线与凸区域的意义. 凸区域是我们经常看到的一种区域(如三角形、正方形、圆、椭圆等)，它具有如下的性质："如果 A、B 两点在这种区域 D 中，那么整个线段 AB 都在区域 D 中". 凸区域的边界叫做凸曲线. 图中曲线 C 是凸曲线，而 C' 不是，因为 A_1 和 A_2 两点在 C' 的内部但是线段

A_1A_2 并不全在 C' 的内部(图 1·16).

这里的定义包含例 11 的定义,即凸多边形的边界也是凸曲线,凸多边形的内部是凸区域.

现在我们描绘一下例题 12 的证明方法：用 C 的内接凸多边形来"逼近"C,即和用圆的内接正多边形来"逼近"圆的方法相类似,先用点 A_1、A_2、…、A_n 将曲线 C 分为 n 等份,顺次连接 A_1, A_2, …, A_n. 根据 C 的凸性可以证明多边形 $A_1A_2\cdots A_n$(简记为 $C^{(n)}$)也是凸的,由例题 11 的注意(2), $C^{(n)}$ 的周长 $\leqslant C'$ 的周长. 令 $n\to\infty$,取极限就得到

$$C \text{ 的周长} \leqslant C' \text{ 的周长}.$$

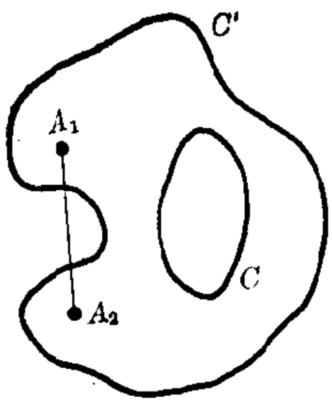


图 1·16

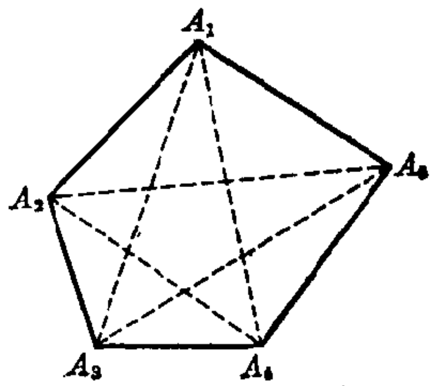


图 1·17

下面介绍一下简单多边形的概念.

如果在平面上给出 n 个一般位置的点(即其中任意三点都不共线),用这些点为顶点可以作出许多 n 边形,如图 1·17 中五个点 A_1、A_2、A_3、A_4、A_5 可以组成五边形 $A_1A_2A_3A_4A_5$ (图中实线) 及 $A_1A_3A_5A_2A_4$ (图中虚线),还可以组成五边形 $A_1A_3A_4A_2A_5$ 等. 这些 n 边形有的边界自身相交(如图中 $A_1A_3A_5A_2A_4$ 的边 A_1A_3 与 A_5A_2 相交),有的边界不自身相交,如图中 $A_1A_2A_3A_4A_5$. 边界不自身相交的多边形称为简单多边形.

凸多边形显然都是简单多边形．除了下面的例题 13，本书中的多边形都是指简单多边形．

[例题 13]　给出平面上 n 个 $(n\geqslant 3)$ 一般位置的点 A_1、A_2、…、A_n，证明一定有一个以这些点为顶点的简单多边形．

这个问题表面上看起来与不等式毫不相干，实际上在证明中定理 I 起了关键的作用．

我们首先证明这样的一个事实：

以 A_1、A_2、…、A_n 为顶点的多边形中，周长最小的一个边界一定不自身相交．换句话说，边界自身相交的一定不是周长最小的．

我们证明后一句话．假设多边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 的边界自身相交，不失一般性可以假定 A_1A_2 与 A_mA_{m+1} 相交于 O（图 1·18），连 A_1A_m、A_2A_{m+1}，那么

$$\begin{aligned}A_1A_m+A_2A_{m+1}&<(A_1O+A_mO)\\&\quad+(OA_{m+1}+OA_2)\\&=(A_1O+OA_2)+(A_mO+OA_{m+1})\\&=A_1A_2+A_mA_{m+1}.\end{aligned}$$

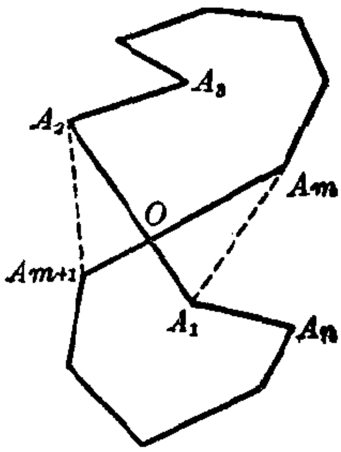


图 1·18

可见

$$\text{多边形 } A_2A_3\cdots A_mA_1A_n\cdots A_{m+1} \text{ 的周长}$$
$$<\text{多边形 } A_1A_2\cdots A_mA_{m+1}\cdots A_n \text{ 的周长}.$$

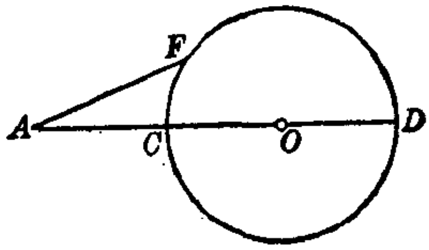
即多边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 不是周长最小的．

现在我们来证明例题 13．以 A_1、A_2、…、A_n 为顶点的多边形只有有限多个（不难算出其总数为 $(n-1)!/2$），所以其中必有一个周长最小的，根据上面所证的，这个周长最小的多边形一定是简单多边形．

这一节所用的方法可以称为"化直法"，即设法将曲线化为折线，折线再化为直线(段)．根据定理I，施行这样的操作后长度总是减少的．当然化直的方法多种多样，应当具体问题具体分析．

习　题　一

1．如图，A 在 $\odot O$ 外，直线 AO 交圆周于 C、D，F 为圆周上任意一点，证明：$AC \leqslant AF \leqslant AD$．$A$ 在圆内或圆周上情况如何？

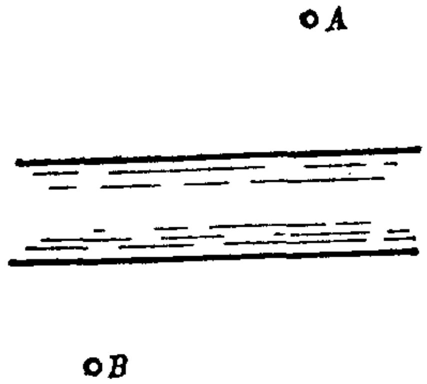


(第1题)

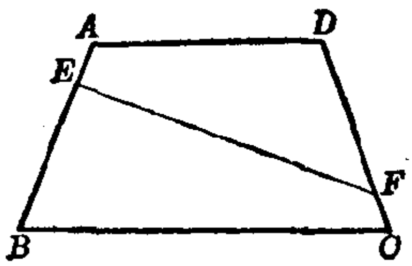
2．已知 $\triangle ABC$ 中，一边为另一边的两倍，证明：最小边在周长的 $\frac{1}{6}$ 与 $\frac{1}{4}$ 之间．

3．A、B 为直线 MN 外两点，$AB \nparallel MN$，在 MN 上找一点 S，使 $|SA-SB|$ 为最大．

4．如图，假定河岸为两条平行直线，怎样垂直于河岸造一座桥 PQ，使 $AP+PQ+QB$ 为最小？



(第4题)

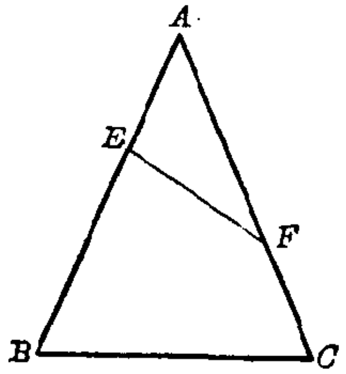


(第5题)

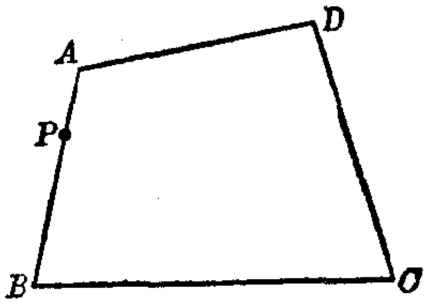
5．图中 $AD \parallel BC$，$AB=CD$，$AE=CF$，

证明：$EF \geqslant \frac{1}{2}(AD+BC)$．

6. $\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，$AE=CF$，证明：$EF\geqslant\frac{1}{2}BC$.



（第 6 题）



（第 7 题）

7. 四边形 $ABCD$ 中，$CD>AB$，P 为 AB 上一点，证明：P 到四个顶点的距离的和 < 四边形的周长.

8. 在凸四边形 $ABCD$ 内任取一点 P，是否一定有

$$PA+PB+PC+PD\leqslant AB+BC+CD+DA?$$

如果一定有，试加以证明，如果不一定有，试举例说明.

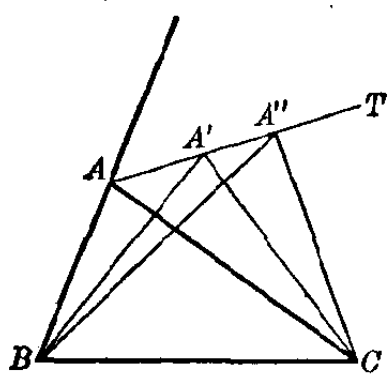
9. 在例 2 中，我们证明了

$$\frac{1}{2}(AB+BC+CA)<PA+PB+PC<1\cdot(AB+BC+CA).$$

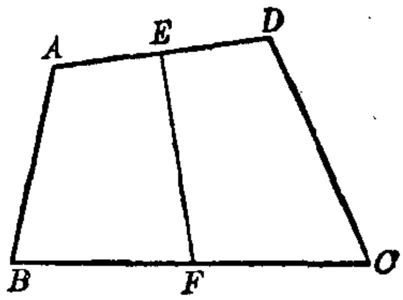
能不能将 $\frac{1}{2}$ 换成更大的数或者将 1 换成更小的数？

10. A'、A'' 都在 $\triangle ABC$ 的外角平分线 AT 上，并且 $AA''>AA'$. 证明：

$$A'B+A'C<A''B+A''C.$$



（第 10 题）



（第 11 题）

11. 凸四边形 $ABCD$ 中，E、F 分别为 AD、BC 的中点，证明：

$$|AB-CD|\leqslant 2\cdot EF\leqslant AB+CD.$$