应用数学丛书

群论

刘木兰　冯克勤　编著

国防工业出版社

应用数学丛书

群　论

刘木兰　冯克勤　编著

国防工业出版社

(京)新登字106号

内 容 简 介

本书共五章，从内容来看可分为两部分。前三章为第一部分，研究群论的基本知识。对小阶群结构和有限生成阿贝尔群的结构则进行了详细讨论。后两章为第二部分，研究的是点群和典型群的结构。这部分内容在常见的群论书中很少讲述，但在几何学、物理学等领域中却有重要应用。

本书的一个重要特色就是给出了大量的计算实例，这有助于掌握群论的抽象概念和培养解决实际问题的能力。

本书适用于数理专业、系统科学、计算机科学、控制理论和经济管理专业的师生、科研和工程技术人员。

应用数学丛书
群 论
刘木兰 冯克勤 编著
*
国防工业出版社出版发行
（北京市海淀区紫竹院南路23号）
（邮政编码 100044）
新华书店经售
北京昌平长城印刷厂印装
*
850×1168毫米 32开本 印张6 1/4 159千字
1992年7月第一版 1992年7月第一次印刷 印数：0001-3000册

ISBN 7-118-00901-6/O·72 定价：5.80元

应用数学丛书目录

第 一 批

1. z变换与拉普拉斯变换	关肇直 王恩平	编著
2. 常微分方程及其应用	秦化淑 林正国	编著
3. 实变函数论基础	胡钦训	编著
4. 正交函数及其应用	柳重堪	编著
5. 沃尔什函数与沃尔什变换	关肇直 陈文德	编著
6. 圆柱函数	刘 颖	编著

第 二 批

1. 集合论	程极泰	编著
2. 图论	王朝瑞	编著
3. 概率论	狄昂照	编著
4. 矩阵理论	王耕禄 史荣昌	编著
5. 复变函数论	杨维奇	编著
6. 逼近论	徐利治 周蕴时 孙玉柏	编著
7. 矢量与张量分析	冯潮清 赵愉深 何浩法	编著
8. 应用泛函分析	柳重堪	编著

第 三 批

1. 网络理论	张正寅	编著
2. 线性系统与多变量控制	叶庆凯	编著
3. 椭圆函数及其应用	高本庆	编著
4. 拓扑理论及其应用	王则柯 凌志英	编著
5. 数理逻辑	沈百英	编著
*6. 误差理论与数据处理	贾沛璋	编著
7. 随机过程理论及应用	熊大国	编著
8. 线性估计与随机控制	卢伯英 陈宗基	编著

---

* 表示即将出版的书目。

出版说明

近二十年来电子工程、控制工程、系统工程及其它领域都获得巨大发展。众所周知，这些科学技术研究的发展是与现代逐渐形成的应用数学学科紧密相联，相辅相成。尤其近年发展起来的边缘学科，更是与数学紧密结合。但一般数学专著比较偏重于论证严谨，全面系统，篇幅较大，理论较深。广大科技工作者学习此类著作，往往需时较多，与工作结合不紧，收效不大。本丛书将为目前在电子工程、控制工程、系统工程等领域工作的同志在数学基础的提高上，提供适合其工作特点的数学参考书。

本丛书是一种介于现代应用数学专著与工程专业理论书籍之间的桥梁参考著作。更着重于科技工作中应用较多的数学概念，分析和解题的基本技巧。也包括一部分适合于实际工作者为学习更高深的现代应用数学专著所需之基础知识。

本丛书选材包括三个方面：基础数学；应用数学有关领域的基础介绍；应用于科技中的典型基础专业理论。出版采用分册形式。各册内容独立，自成系统，但仍有少量交叉，分期分批出版。

丛书可供大专院校有关专业研究生、教师、从事科研生产的工程师参考。

前 言

群论是从实践中发展起来的一门比较抽象的学科，它不仅在数学中居显著地位，而且在许多现代科学分支中居重要地位。群论的概念和结果远不限于对几何学、拓扑学等纯粹数学方面的应用，实际上它已成为研究物质结构和物质微粒运动的有力工具。随着科学技术的发展，群论的理论和方法获得了愈来愈广泛的应用，除了大家比较熟悉的对物理学、特别是理论物理学和结晶学的应用，它还渗透到计算机科学，通讯理论，系统科学、乃至数理经济等许多领域。因此，今天需要掌握和了解群论知识的人愈来愈多。然而，由于这一学科的高度抽象，尽管国内外关于群论的专著和教材很多，但是多数论著和教材对非数学工作者，甚而对应用数学工作者来说都不易接受，往往是学习了一系列的名词、定义和定理之后不知如何使用。我们撰写本书的目的就是尝试解决这一矛盾。我们在讲述基本概念时，尽量配合较多的简单具体的例子，希望读者获得一些感性认识。为了避免学过群论之后，而对具体问题无从下手的弊病，我们采取对典型例子进行详细讨论，并给出具体计算，从而使读者掌握一些群论计算的技巧和分析问题的方法。

本书的内容分两大部分。第一部分由前三章组成，主要介绍群论的基本概念和结果。为了使读者加深对基本概念的理解和学习运用群论的一般结果来讨论具体问题，我们详细地论述了低阶群的结构。第二部分由后二章组成，主要介绍点群和域上典型群的结构。在一般群论的教材中通常不包含这部分内容。实际上，点群对几何学、结晶学和理论物理的应用是相当精彩的。至于典型群，不管是从它对几何学、物理学的应用角度来看，还是从群论本身的研究来看，它在群论中都占有重要地位。鉴于本书的目

的和读者对象，它没有包含像连续群．群表示论等重要内容，对连续群有兴趣的读者可参见参考文献〔11〕，对群表示论有兴趣的读者可参见参考文献〔2〕。

最后，作者感谢汪栋臣同志对本书的出版给予的热情帮助。由于作者水平有限，谬误一定不少，敬请读者批评指正。

作　者

目　录

第一章　群和它的基本性质

§1.1　集合论的预备知识

群是集合上赋予具有某些性质的二元运算的一种代数结构，所以在讲述什么是群之前，需要介绍集合论中我们今后所需要的一些预备知识。

一些特定的对象放在一起就叫作一个**集合**。例如全体自然数构成一个集合，叫作自然数集合，表示成$\mathbb{N}$。全体整数构成整数集合，表示成$\mathbb{Z}$。类似地有有理数集合，实数集合，复数集合，分别表示成$\mathbb{Q}$，$\mathbb{R}$，$\mathbb{C}$。集合A中的每个对象a叫作是A的**元素**，表示成$a\in A$，说成元素a**属于**集合A。否则，若a不属于集合A，则表成$a\notin A$。设A和B是两个集合，如果A中每个元素均为B中的元素，即

$$a\in A\Rightarrow a\in B$$

则称A是B的一个**子集**，表示成$A\subseteq B$，或者$B\supseteq A$。如果$A\subseteq B$，并且$B\subseteq A$，即A中元素均是B中元素，反之亦然，于是

$$a\in A\Longleftrightarrow a\in B$$

这也相当于集合A和B包含同样的元素。这时，便称集合A和B相等，表示成$A=B$。如果A是B的子集，并且不等于B（即$A\subseteq B$，$A\neq B$），则称A是B的**真子集**，表示成$A\subset B$或者$B\supset A$。不包含任何元素的集合叫作**空集**，表示成$\varnothing$。于是空集是每个集合的子集。

可以有许多方法来表达一个确定的集合。例如若集合A只有有限多个元素a_1，a_2，…，a_n（n是自然数），我们可以把这几个元素全列出来加上括号$\{\ \}$来表示这个集合，即$A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$，只有有限多元素的集合叫**有限集**，否则叫**无限集**，具有n个元素的集合也叫**n元集合**，元素个数n叫作有限集A的**势**，表

示成$|A|=n$。在一般情形下，集合S中具有某个性质P的元素构成的集合通常表成

$$\{x\in S\mid x\text{有性质}P\}$$

例如：偶数集合$\{0，\pm 2，\pm 4，\cdots\}$可以表成$\{n\in\mathbb{Z}\mid z\mid n\}$，而奇自然数集合$\{1，3，5，7，\cdots\}$可以表成$\{n\in\mathbb{Z}\mid 2\nmid n，n\geqslant 1\}$(这里$2\mid n$表示2整除$n$，$2\nmid n$表示2不整除$n$)。

由一些已知的集合构作新的集合通常用集合的运算来实现的。下面是集合的一些最基本的运算。设A和B是两个集合，它们的公共元素所构成的集合叫作A和B的**交**，表示成$A\cap B$。于是，$A\cap B=\{x\mid x\in A\text{并且}x\in B\}$。类似地，$n$个集合$A_1,\cdots,A_n$的交是

$$A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n=\bigcap_{i=1}^{n}A_i=\{x\mid x\in A_i(1\leqslant i\leqslant n)\}$$

更一般地，对于任意多个集合形成的集族$\{A_i\mid i\in I\}$(其中I是一个集合，叫该集族的**指标集合**，对于每个$i\in I$，A_i是该集族中的一个集合)，它的交为

$$\bigcap_{i\in I}A_i=\{x\mid x\in A_i(\text{对每个}\ i\in I)\}$$

第二个运算是一些集合的**并**，集合A和B的并表示成$A\cup B$，定义为$A\cup B=\{x\mid x\in A\text{或者}x\in B\}$。类似地，

$$A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n=\bigcup_{i=1}^{n}A_i=\{x\mid x\in A_i\ (\text{对某个}\ i,1\leqslant i\leqslant n)\}$$

一般地，集族$\{A_i\mid i\in I\}$的并是

$$\bigcup_{i\in I}A_i=\{x\mid x\in A_i(\text{对某个}\ i\in I)\}$$

练习1.1.1 设B，$A_i(i\in I)$均是集合，则

$$B\cap\left(\bigcup_{i\in I}A_i\right)=\bigcup_{i\in I}(B\cap A_i),$$

$$B\bigcup\left(\bigcap_{i\in I}A_i\right)=\bigcap_{i\in I}(B\bigcup A_i)。$$

设A是B的子集，令$B-A=\{x\mid x\in B,\ x\notin A\}$，叫作是子集$A$关于$B$的**补集**。如果在讨论问题时所涉及的集合$A,B$，$C$，…均是某个大集合$\Omega$的子集，则$\Omega-A$简称作$A$的补集，表示作$\bar{A}$。

练习1.1.2 求证

$$\overline{\bigcup_{i\in I}A_i}=\bigcap_{i\in I}\bar{A}_i,\quad \overline{\bigcap_{i\in I}A_i}=\bigcup_{i\in I}\bar{A}_i。$$

设A和B是两个集合，我们把集合

$$\{(a,\ b)\mid a\in A,\ b\in B\}$$

叫作是A和B的**直积**，表示成$A\times B$。若$(a,\ b)$，$(a',\ b')\in A\times B$，则$(a,\ b)=(a',\ b')$当且仅当$a=a'$，并且$b=b'$。类似地可定义n个集合A_1，A_2，$\cdots A_n$的直积

$$A_1\times A_2\times\cdots\times A_n=\prod_{i=1}^{n}A_i=\{(a_1,\ \cdots,\ a_n)\mid a_i\in A_i(1\leqslant i\leqslant n)\}。$$

更一般地，集族$\{A_i\mid i\in I\}$的直积定义为

$$\prod_{i\in I}A_i=\{(a_i)_{i\in I}\mid a_i\in A_i(\text{对每个 } i\in I)\}。$$

为了比较不同的集合，我们需要使不同的集合之间发生联系，这就是从一个集合到另一集合的映射。f叫作从集合A到集合B的**映射**，是指对于A中每个元素a，均有确定的办法给出集合B中唯一的一个对应元素，这个对应元素记成$f(a)$，叫作a在映射f之下的**像**，而f把a映成$f(a)$这件事表示成$a\mapsto f(a)$。从A到B的映射f表示成f：$A\to B$或者$A\xrightarrow{f}B$。

设f：$A\to B$和g：$B\to C$都是集合之间的映射。对于每个元素$a\in A$，f把它映成B中元素$f(a)$，然后g又把$f(a)$映

成C中元素$g(f(a))$。由此得到一个从A到C的映射$a\mapsto g(f(a))$。这个映射叫作是f与g的合成，表示成$g\circ f: A\to C$

设f和g均是从集合A到集合B的映射，称f和g相等（表示成$f=g$），是指对于每个元素$a\in A$，均有$f(a)=g(a)$。现在我们证明映射的合成运算满足结合律。

引理1.1.1 设$f: A\to B$，$g: B\to C$，$h: C\to D$均是集合的映射，则$h\circ(g\circ f)=(h\circ g)\circ f$。

证明 对于$a\in A$，令$f(a)=b$，$g(b)=c$，$h(c)=d$，则$(g\circ f)(a)=c$，$(h\circ g)(b)=d$。于是$h\circ(g\circ f)(a)=h(c)=d$，$((h\circ g)\circ f)(a)=(h\circ g)(f(a))=(h\circ g)(b)=d$，即对于$A$中每个元素$a$，均有$(h\circ(g\circ f))(a)=((h\circ g)\circ f)(a)$，从而$h\circ(g\circ f)=(h\circ g)\circ f$。证毕。

设$f: A\to B$是集合的映射，对于A的每个子集A'，令$f(A')=\{f(x)\mid x\in A'\}$，这是$B$的子集，叫作$A'$在$f$之下的**像**。对于$B$的每个子集$B'$，令$f^{-1}(B')=\{x\in A\mid f(x)\in B'\}$，这是$A$的子集，叫$B'$的**原像**。如果$f(A)=B$，即$B$中每个元素均是$A$中某元素在$f$之下的像，便称$f$是**满射**。另一方面，如果$A$中不同元素在$f$之下映成不同的像元素，即$a, a'\in A$，$a\neq a'\Rightarrow f(a)\neq f(a')$，则称$f$为**单射**。如果$f: A\to B$同时是单射和满射，则称$f$为**一一映射**或者**一一对应**。最简单的例子是：将集合A中每个元素均映成自身的映射$1_A: A\to A$，就是A到A的一一对应，映射1_A叫作集合A上的**恒等映射**，通常采用下面引理来判断一个映射是否为一一对应。

引理1.1.2 映射$f: A\to B$是一一对应的充分必要条件是存在映射$g: B\to A$，使得$f\circ g=1_B$，$g\circ f=1_A$。

证明 如果f是一一对应，根据定义这意味着对于B中每个元素b，均有唯一的原像$a=f^{-1}(b)$，于是可以定义映射$g: B\to A$，$g(b)=f^{-1}(b)$，直接验证$g\circ f=1_A$和$f\circ g=1_B$成立。另一方面，如果f不是满射，则存在$b\in B$，使$f^{-1}(b)=\varnothing$。因此对每个映射$g: B\to A$，均有$(f\circ g)(b)=f(g(b))\neq b$，因

此$f\circ g\neq 1_B$。如果f不是单射，则存在a，$a'\in A$，$a\neq a'$，使得$f(a)=f(a')$。记这个B中元素为b，那么对于每个映射$g:B\to A$，

$(g\circ f)(a)=g(b)=(g\circ f)(a')$，这就表明$g\circ f\neq 1_A$。因此，若存在$g:B\to A$，使得$f\circ g=1_B$，并且$g\circ f=1_A$，则$f$必然是一一对应。证毕。

注记1.1.1 当f：$A\to B$是一一对应时，满足$f\circ g=1_B$和$g\circ f=1_A$的映射$g:B\to A$是唯一存在的，这是因为若$g':B\to A$，也有性质$f\circ g'=1_B$，$g'\circ f=1_A$，则$g'=g'\circ 1_B=g'\circ(f\circ g)=(g'\circ f)\circ g=1_A\circ g=g$。我们将这个唯一存在的映射$g$叫作$f$的**逆映射**，表示成$f^{-1}$。

练习1.1.3 设f：$A\to B$是集合的映射，A是非空集合，则

（a） f为单射$\Longleftrightarrow$存在$g:B\to A$，使得$g\circ f=1_A$。

（b） f为满射$\Longleftrightarrow$存在$h:B\to A$，使得$f\circ h=1_B$，并用此结果证明引理1.1.2。

练习1.1.4 如果$f:A\to B$，$g:B\to C$均是一一对应，求证$g\circ f$：$A\to C$也是一一对应，并且$(g\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}$。

设A是一个集合，则积集$A\times A$的每个子集R叫作集合A的一个**关系**。如果$(a,\ b)\in R$，便称a和b有关系R，写成$a\underset{R}{\sim}b$。例如对于集合

$$R=\{(a,\ b)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\mid a\text{ 比 }b\text{ 大}\},$$

则实数a和b有关系R即意味着a比b大。这就是“大于”关系，通常将这个关系表成$a>b$。同样地实数集合上还有关系$\geqslant$（大于或等于）$<$（小于），$\leqslant$（小于或等于），$=$（等于）。集合A上的关系$\sim$叫作**等价关系**，是指它满足如下三个条件

（1） 自反性：$a\sim a$（对每个$a\in A$）；

（2） 对称性：若$a\sim b$，则$b\sim a$；

（3） 传递性：若$a\sim b$，$b\sim c$，则$a\sim c$。

设$\sim$是集合A上的等价关系。如果$a\sim b$，则由对称性知

$b\sim a$，这时，称元素 a 和 b **等价**。对于每个 $a\in A$，以 $[a]$ 表示 A 中与 a 等价的全部元素构成的集合，即

$$[a]=\{b\in A\mid b\sim a\}。$$

由自反性可知 $a\in[a]$，而 $[a]$ 叫作 a 所在的**等价类**。由传递性可知，每个等价类中任意两个元素均彼此等价（设 $b,c\in[a]$，则 $b\sim a$，$a\sim c$，于是 $b\sim c$）。进而，对于 a，$b\in A$，如果 $a\sim b$，则 $[a]=[b]$；如果 $a\nsim b$（表示 a 和 b 不等价），则 $[a]\cap[b]=\varnothing$，即 $[a]$ 和 $[b]$ 不相交（请读者证明）。于是任意两个等价类或者相等，或者不相交。再由于 A 中每个元素 a 均属于等价类 $[a]$，综合上述，可知集合 A 是一些等价类 $\{[a_i]\mid i\in I\}$ 的并，而这些等价类是两两不相交的。每个等价类 $[a_i]$ 中取出一个元素 a_i，则 $R=\{a_i\mid i\in I\}$ 具有如下的性质：A 中每个元素均等价于某个 a_i，而不同的 a_i 彼此不等价。我们把具有这样性质的 R 叫作是 A 对等价关系 $\sim$ 的一个**完全代表系**。于是

$$A=\bigcup_{a\in R}[a]\text{（非交并）}\qquad(*)$$

一般地，若集合 A 是它的某些子集 $\{A_i\mid i\in I\}$ 的**非交并**，即 $A=\bigcup\limits_{i\in I}A_i$，并且不同的 A_i 两两不相交，我们便称 $\{A_i\mid i\in I\}$ 是 A 的一个**分拆**。如上所述，A 上的每个等价关系均给出集合 A 的一个分拆（$*$）。反过来，如果 $\{A_i\mid i\in I\}$ 是集合 A 的一个分拆，可以如下定义集合 A 上的一个关系：对于 a，$b\in A$，

$a\sim b\Longleftrightarrow a$ 和 b 在同一个 A_i 之中（对某个 $i\in I$）。请读者验证这是一个等价关系。以 E 表示集合 A 的全部等价关系，以 P 表示 A 的全部分拆，则上述给出从等价关系到分拆的一个映射 $f: E\rightarrow P$ 和从分拆到等价关系的一个映射 $g: P\rightarrow E$。请读者证明 f 和 g 是互逆的，即 $f\circ g=1_P$，$g\circ f=1_E$，从而 f 是一一对应（引理1.1.2）。换句话说，集合 A 上的等价关系和 A 的分拆是一一对应的。

例如　设P是由某些集合构成的集族，在P上定义如下的关系：对于A，$B\in P$，

$A\sim B\Longleftrightarrow$存在着从集合$A$到集合$B$的一一对应。

这是P上的一个等价关系（自反性：1_A：$A\to A$是一一对应，从而$A\sim A$；对称性：若f：$A\to B$是一一对应，则f^{-1}：$B\to A$亦然，从而$A\sim B\Rightarrow B\sim A$；传递性：基于练习1.1.4)，从而$P$由此分拆成一些等价类的非交并，彼此等价的集合叫作是**等势的**。比如说：两个有限集A和B等势当且仅当它们的元素个数相同，即$|A|=|B|$。与自然数集合$\mathbb{N}=\{1，2，\cdots，n，\cdots\}$等势的集合叫作**可数无限集合**，其他无限集则叫作是**不可数集合**。熟知实数集合是不可数的，而偶自然数集合$\{2，4，\cdots，2n，\cdots\}$是可数集合，因为存在着它到自然数集合$\mathbb{N}$的一一对应$2n\mapsto n$。这个例子也表明：无限集合A的一个真子集可以与A等势！请读者证明。

练习1.1.5　证明

（a）每个无限集均包含一个可数无限子集。

（b）集合A是无限的$\Longleftrightarrow A$和它的某个真子集等势。

练习1.1.6　设A是有限集，$P(A)$是A的全部子集（包括空集）所构成的集族，求证$|P(A)|=2^{|A|}$。换句话说，n元集合共有2^n个不同的子集。

练习1.1.7　设A_1，$\cdots$，A_n均是有限集，则

$$|A_1\times\cdots\times A_n|=|A_1|\cdots|A_n|。$$

若集合A和A上的二元关系$a\geqslant b$满足下面的性质：

（1）自反性：$a\geqslant a$；

（2）反对称性：若$a\geqslant b$和$b\geqslant a$，则$a=b$；

（3）传递性：若$a\geqslant b$，$b\geqslant c$，则$a\geqslant c$。则称A为**偏序集**。

一般来说，集合A中的2个元素a和b，可能既没有关系$a\geqslant b$，也没有关系$b\geqslant a$。若A中任何二个元素a和b，总有$a\geqslant b$或者$b\geqslant a$，则称A为**全序集**。例如，我们熟悉的自然数集合，实数集合，按通常数的大小关系成为全序集。集合A的所有子集的集合$P(A)$，按集合的包含定义二元关系，则$P(A)$是

一个偏序集。

偏序集A的元素u称为A的子集A_1的**上界**，如果对每个$a \in A_1$，都有$u \geqslant a$，元素u称为A_1的**最小上界**。如果u是A_1的上界，且对A_1的任何上界v，均有$u \leqslant v$。显然，如果最小上界存在必唯一。类似地可以定义下界和最大下界。偏序集A的元素l称为子集B的**下界**，如果对每个$b \in B$，都有$l \leqslant b$（即$b \geqslant l$）；元素l为B的最大下界，如果l是B的下界，而且对B的任一下界m，均有$l \geqslant m$。如果最大下界存在必定是唯一的。例如$P(A)$，子集A_1和A_2的最小上界是$A_1 \cup A_2$，最大下界是$A_1 \cap A_2$。

在偏序集A中，我们说元素a_1是a_2的**覆盖**，如果$a_1 > a_2$，而且不存在元素u使得$a_1 > u > a_2$。在有限偏序集中，$a > b$当且仅当存在序列$a_1 = a$，a_2，…，$a_n = b$，使得每个a_i是a_{i+1}的覆盖。可以用图表示有限偏序集A。用平面上的点表示A的元素，和如果a_1是a_2的覆盖，将a_1放在a_2的上面，同时用直线段联结a_1和a_2。因此，$a < b$当且仅当存在a到b的折线。如果在a和b（$\neq a$）之间没有线段相连，则表示a和b不可比较，即a和b没有关系。下面的几个图均表示偏序集。

偏序集A，如果它的任何2个元素都有最小上界和最大下界，则称A为格。图1-1图1-2和图1-3都是格，图1-3是一个全序集，而图1-4只是偏序集而不是格。

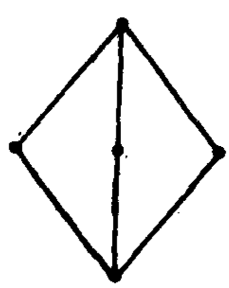

图 1-1

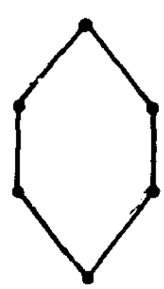

图 1-2

图 1-3

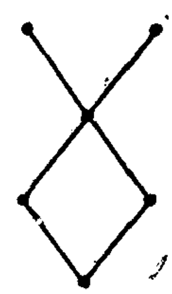

图 1-4

设A是一个集合，则从$A \times A$到A的每个映射$f: A \times A \to A$叫作集合A上的一个(二元)运算。例如：通常的整数加法就是运算$f: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$，其中$f(m, n) = m + n$。类似地，整数