HUAZHONG UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY PRESS

实变函数简明教程

SHIBIAN HANSHU JIANMING JIAOCHENG

赵静辉　徐吉华　编著

华中理工大学出版社

实变函数简明教程

赵静辉　徐吉华　编著

华中理工大学出版社

（鄂）新登字第10号

图书在版编目（CIP）数据

实变函数简明教程/赵静辉　徐吉华编著
武汉：华中理工大学出版社 1996年11月
ISBN　7-5609-1411-x
Ⅰ．实…
Ⅱ．①赵…②徐…
Ⅲ．实变函数
Ⅳ．O174.1

实变函数简明教程
赵静辉　徐吉华　编著
责任编辑：李立鹏
*
华中理工大学出版社出版发行
（武昌喻家山　邮编：430074）
新华书店湖北发行所经销
华中理工大学出版社沔阳印刷厂印刷
（邮编：433000）
*
开本：850×1168　1/32　印张：7.75　字数：196 000
1996年11月第1版　1996年11月第1次印刷
印数：1—4 000
ISBN　7-5609-1411-x/O・158
定价：6.80元

内容简介

为适应高等师范教育发展与教学改革的需要，提高中学师资水平与素质，作者受湖北省教委的委托，编写了《实变函数简明教程》. 全书共分六章，首先介绍了集合的概念及其运算，点集的理论和性质；然后引进测度理论和可测函数的类型与性质；最后探讨勒贝格积分的构成与应用，以及和黎曼积分的比较. 每章都有内容小结和例题选解，章末有复习题和自测题，书后有习题解答与提示.

本书的特点是，既注重基本理论的科学性，又充分考虑教材的师范性；既保持实变函数理论的完整性，又力求做到深入浅出，循序渐进.

本书可作为师范院校数学专业学生的教材，亦可作中学师资培训教材或参考书.

《实变函数简明教程》序

自从本世纪初勒贝格（*Lebesgue*）在波雷尔（*Borel*）测度的基础上建立了勒贝格测度和积分以来，在数学的许多领域中，如实分析、复分析、泛函分析、调和分析、微分方程及偏微分方程中，都产生了极大的影响；它还有助于概率理论基础的建立；对于近年发展的分形几何，也起着引导的作用。正是因此，勒贝格测度及积分理论已经成为数学工作者的基础知识，构成数学专业实变函数课程的基本内容。

可是勒贝格测度及积分在概念上和方法上与数学分析中的黎曼积分有很大的差异，对于初学者不免造成一些困难。赵静辉、徐吉华教授根据多年的丰富教学经验，为师范院校本科生、函授生及自学人员编写了这本《实变函数简明教程》，在保证科学性、系统性的前提下，充分考虑到学生的可接受性，在讲述中着重阐明有关基本概念和方法，富于启发性；讲述条理清晰，由浅入深，便于自学。考虑到师范院校的特点，本书除只讲授一维勒贝格测度及积分外，还对各类函数的关系及单调函数的微分性质作了切合实际的处理。

徐吉华、赵静辉教授多年来在教学及科学研究中进行了长期合作，在各方面取得了可喜的成绩，预祝这本教材的出版对于师范院校的教学，对于数学工作者的培养会进一步作出重要贡献。

余家荣

1996年6月于武汉

前　言

实变函数是高等师范院校数学专业的一门重要基础课程，它的任务是使学生掌握近代抽象分析的基本思想，提高抽象思维和数学表述能力，加深对数学分析知识的理解，深化对中学数学有关内容的认识，并为进一步学习现代数学理论作必要的基础准备.

为适应高等师范教育发展与教学改革的形势，我们编写了这套实变函数教材。本教材的特点是：

既注重基本理论的科学性，又充分考虑教材的启发性；既保持理论体系的相对完整性和应有的思想深度，又力求深入浅出、循序渐进，使学生容易上路，也便于自学；注重学习方法与思想方法的指导，注意例题的示范性和习题的训练量；既注意观点与方法的现代化，又尽量联系数学分析与中学数学有关内容，以利于深化对中学数学理论的认识.

本教材供高等师范院校数学教育专业实变函数课程使用. 既可用于全日制本科，也可用于本科函授班或脱产师资培训班，还可用于自学考试或业余学习.

本教材由赵静辉担任主编，并执笔编写三、四、五、六各章；副主编徐吉华执笔编写一、二两章. 我们的老师余家荣教授为本书作序，李大华教授仔细审阅了书稿，并提出许多宝贵意见，使本书的修改定稿得益不浅. 本书责任编辑李立鹏先生为本书的编辑加工、出版尽心尽力. 在此，我们谨向有关领导、专家和工作同志表示衷心感谢.

限于我们的水平，加之时间仓促，本书缺点、不足甚至错误之处在所难免，殷切希望得到专家、同行和读者的批评指正.

编　者

1996. 4.

目　录

第一章 集 合

自 19 世纪末康托(Cantor)对集合论作出奠基性工作以来，集合论已渗透到所有数学学科，成为现代数学的主要基石之一. 集合论的观点与方法渗入数学分析，便产生了实变函数论. 本章介绍集合论的初步知识，为以后各章提供必要的准备.

学习要点

1. 集合的概念与运算；
2. 集合的对等与基数；
3. 可列集与不可列集.

§1.1 集合及其运算

一、集合与元素

集合是数学中的一个原始概念，它不能用别的、更简单的概念来定义，如同几何中的点、直线、平面一样. 我们通常用描述的方法引入原始概念. 对于**集合**(简称**集**)，我们将它描述为"具有某种性质的对象的全体". 例如，自然数的全体组成了自然数集 N. 类似地，数学中常用到的还有整数集 Z、有理数集 Q、实数集 R、复数集 C，以及$[a,b]$上的连续函数集 $C[a,b]$，等等. 集合中的每个对象称为这个集合的**元素**(简称**元**).

通常用大写字母 A、B、X、Y…表示集合，用小写字母 a、b、x、y…表示元素. 若 x 是集 A 的元素，称 x 属于 A，记为 $x\in A$；x 不是 A 的元素，称 x 不属于 A，记为 $x\overline{\in} A$. 例如$\sqrt{3}\in R$，但$\sqrt{3}\overline{\in} Q$.

应该指出：对于一个集合，其元素应具有确定性. 也就是说，给定一个集合，我们应能明确判定任何一个对象是否为它的元素. 因此，对集 A 而言，任何对象 x 要么属于 A，要么不属于 A，即 $x\in A$ 或 $x\overline{\in}A$，二者必居其一，也只居其一. 诸如"很大的正数的全体"之类就不算一个集合. 还要注意，一个集合中的元素是彼此不同的（互异性），相同的对象只能算一个元素.

常用的集合表示方法有两种：**列举法与特性描述法**. 列举法是在花括号内将其元素一一列举出来，或写出有代表性的部分，例如

$$A=\{a,b,\cdots,z\};$$

$$B=\{1,2,\cdots,n,\cdots\}.$$

特性描述法是将集合 A 中元素 x 所具有的特性以命题形式 $p(x)$ 叙述出来，即

$$A=\{x;p(x)\}\quad \text{或} \quad A=\{x\mid p(x)\}.$$

对此记号，可以这样来理解：集合 A 是由具有性质 $p(x)$ 的 x 的全体所组成. $x_0\in\{x;p(x)\}$，就意味着 x_0 具有性质 $p(x_0)$.

例 1 $\{x;(x-2)(x-3)=0\}$ 表示方程 $x^2-5x+6=0$ 的全体根之集，也就是 $\{2,3\}$.

例 2 $\{x;a<x\leqslant b\}$ 表示的数集就是半开半闭区间 $(a,b]$.

例 3 有理数集 $Q=\{x\mid x=\frac{p}{q},p\in Z,q\in Z,q\neq 0\}$（花括号中的","表示"且"之意）.

例 4 集 $A=\left\{x;x\in R,f(x)=\frac{1}{2}\right\}$ 应这样来理解：定义在 R 上的函数 $f(x)$，凡使 $f(x)$ 之值为 $\frac{1}{2}$ 的那些自变量 x 所成之集就是 A. 如图 1-1，$A=\{x_1,x_2,\cdots\}$.

例 5 集合 $B=\{x;x\in E,f(x)\geqslant c\}$ 应该这样来理解：函数 $f(x)$ 定义在 E 上，凡使 $f(x)$ 之值大于或等于 c 的那些自变量 x 所成之集就是 B. 如图 1-2.

例 4、例 5 所表示的集合称逆象型集合，本书后面的测度与积

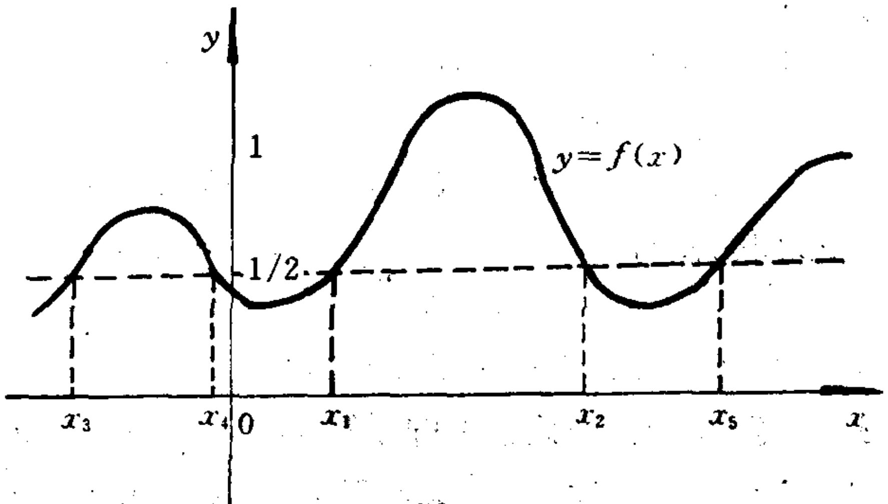

图 1-1

分理论中要经常用到这种形式的集合.

若集合中的元素只有有限个,则称为**有限集**,如例 1;不是有限集的集合称为**无限集**,如例 2,例 3.

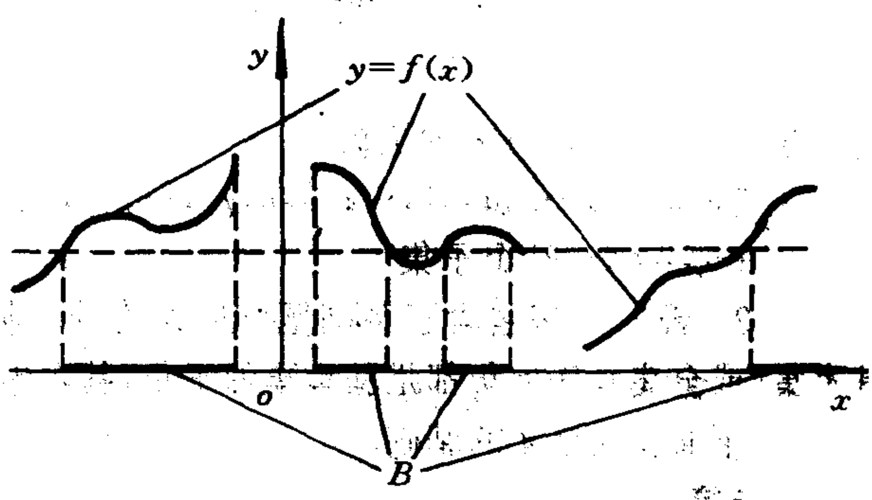

图 1-2

不含任何元素的集合称为**空集**,记为$\varnothing$. 例如

$$\{x;x\in R, x^2+1=0\}=\varnothing.$$

二、集合的包含与相等

1. 集合的包含关系

两个集合 A 与 B,若 A 的任一元素都是 B 的元素,则称 A 为 B 的子集,记为 $A\subset B$,或 $B\supset A$,读作 A 包含于 B,或 B 包含 A.

个概念可叙述为

定义 1.1.1 $A\subset B \Longleftrightarrow \forall x\in A \Longrightarrow A\in B$.

例 6 $N\subset Z\subset Q\subset R\subset C$.

例 7 $C_{[a,b]}$表示$[a,b]$上连续函数之集，$R_{[a,b]}$表示$[a,b]$上黎曼可积函数之集，则有

$$C_{[a,b]}\subset R_{[a,b]}.$$

例 8 $A\not\subset B$ 的含义是：$\exists\, x\in A$ 但 $x\,\overline{\in}\, B$.

例 9 空集$\varnothing$是任何集合 A 的子集，即$\forall A,\varnothing\subset A$. 其理由是$\forall x, x\,\overline{\in}\, A\Longrightarrow x\,\overline{\in}\,\varnothing$，这正是$\varnothing\subset A$ 的逆否命题. 也可用反证法来说理：若$\varnothing\not\subset A$，则至少存在一个 $x_0\in\varnothing$，但 $x_0\,\overline{\in}\, A$，这与空集定义相矛盾.

例 10 $A\subset B, B\subset C$，证明 $A\subset C$.

证 $\because \forall x\in A \underset{(A\subset B)}{\Longrightarrow} x\in B \underset{(B\subset C)}{\Longrightarrow} x\in C$,

$\therefore A\subset C$.

例 11 集$\{a,b,c,d\}$共有多少子集？

解 子集有$\varnothing$；$\{a\}$，…；$\{a,b\}$，…；$\{a,b,c\}$，…；$\{a,b,c,d\}$. 共有 $C_4^0+C_4^1+C_4^2+C_4^3+C_4^4=2^4$ 个子集.

定义 1.1.2 若一个集包含了某问题中所讨论的一切集，则称其为**基本集**(或**全集**). 任何集都是基本集的子集，基本集起着论域的作用，也是下面定义余集的基础.

2. 集合的相等

定义 1.1.3 若集合 A 与 B 的元素完全相同，则称 A 与 B **相等**，记为 $A=B$.

易知 $A=B\Longleftrightarrow A\subset B$ 且 $B\subset A$.

定义 1.1.4 对集合 A 与 B，若 $A\subset B$，但 $A\neq B$，则称 A 为 B 的真子集.

例 12 证明 Q 是 R 的真子集.

证 1° 任何有理数当然也是实数，故 $Q\subset R$，即 Q 为 R 的子集.

$2°$　$\exists\, x_0=\sqrt{2}$，$x_0\in R$，但 $x_0 \overline{\in} Q$，此即说明 $A\neq B$.

由 $1°$ 与 $2°$，Q 是 R 的真子集.

三、集合的运算

在中学数学中已涉及过集合的并、交、差、余等运算，并用图形（文氏图）加以说明. 现在我们再简述这些运算的数学定义，并归纳与证明它们的运算规律. 需要说明的是：我们总认为在各种运算中所考虑的一切集都是某一基本集 X 的子集.

1. 定义

定义 1.1.5　设 A、B 是任意 2 个集，

(1) $\{x;x\in A$ 或 $x\in B\}$ 称为 A 与 B 的**并集**（简称**并**），记作 $A\cup B$.（集 $A\cup B$ 就是 A 与 B 的全部元素组成的集合）

(2) $\{x;x\in A$ 且 $x\in B\}$ 称为 A 与 B 的**交集**（简称**交**），记作 $A\cap B$.（集 $A\cap B$ 就是 A 与 B 的公共元素组成的集合）

(3) $\{x;x\in A$ 且 $x \overline{\in} B\}$ 称为 A 与 B 的**差集**（简称**差**），记作 $A-B$.（集 $A-B$ 就是由所有属于 A 但不属于 B 的元素所成之集）

(4) $\{x;x\in X$ 且 $x \overline{\in} A\}$ 称为 A 的**余集**（也称**补集**），记作 A^c 或 $\mathscr{C}A$.（A^c 是由在基本集 X 中不属于 A 的元素所组成的集合）

注　表示关系的连词“且”、“或”可用逻辑符号 $\wedge$（析取）、$\vee$“合取”来代替.

两个集合的并与交的概念可推广至一族集合的并与交.

定义 1.1.6 (1)
$$\bigcup_{i=1}^{n}A_i=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n=\{x;\exists\, i_0\leqslant n, x\in A_{i_0}\},$$
$$\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n\cup\cdots=\{x;\exists\, i_0\in N, x\in A_{i_0}\}.$$

(2)
$$\bigcap_{i=1}^{n}A_i=A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n=\{x;\forall\, i\leqslant n, x\in A_i\},$$

$$\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i=A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_r\cap\cdots=\{x;\forall\, i\in N,\ x\in A_i\}.$$

一般地,设$\{A_i;i\in I\}$是一集类,这里I是指标集,i在I中取值,则称$\{x;\exists\ i_0\in I,x\in A_{i_0}\}$为集类$\{A_i;i\in I\}$的并集,记为$\bigcup\limits_{i\in I}A_i$;称$\{x;\forall\ i\in I,x\in A_i\}$为集类$\{A_i;i\in I\}$的交集,记为$\bigcap\limits_{i\in I}A_i$.

例 13 证明关系式$A\cap(A^c)=\varnothing$;$A\cup(A^c)=x$;$(A^c)^c=A$.

证 (只证第一式为例)用反证法.若有$x_0\in A\cap(A^c)\Longrightarrow(x_0\in A)\wedge(x_0\in A^c)\Longrightarrow(x_0\in A)\wedge(x_0\overline{\in}A)$,这与集合概念矛盾.

例 14 $A\subset B\Longleftrightarrow A^c\supset B^c$.

证法 1 $A\subset B\Longleftrightarrow$若$x\in A$,则$x\in B\Longleftrightarrow$若$x\overline{\in}B$,则$x\overline{\in}A\Longrightarrow$若$x\in B^c$,则$x\in A^c\Longleftrightarrow B^c\subset A^c$.

证法 2 (用反证法证必要性)当$x\in B^c$,假定$x\overline{\in}A^c\Longrightarrow x\in A\underset{(A\subset B)}{\Longrightarrow}x\in B$,这与$x\in B^c$矛盾.

例 15 $A\cup B-B=A$是否正确?

答 不正确,一般只能有关系式$A\cup B-A\subset A$.在集合运算中差集不能看作并集的逆运算,二者相继作用没有"还原"关系.(请读者自行举例以明之.)

例 16 求证$A-B=A\cap B^c$.此式可称**差化交**公式.

证 $x\in(A-B)\Longleftrightarrow(x\in A)\wedge(x\overline{\in}B)\Longleftrightarrow(x\in A)\wedge(x\in B^c)\Longleftrightarrow x\in A\cap B^c$.

将在后面举例讲述差化交公式的应用.

2.集合的运算律

将集合的运算律归纳如下:

定理 1.1.1 (1)幂等律$A\cup A=A$;$A\cap A=A$.

(2)交换律(并、交)

$A\cup B=B\cup A$;$A\cap B=B\cap A$.

(3)结合律(并、交)

$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$;

$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$.

(4)分配律

1° $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$,

$(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i)\cap B=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}(A_i\cap B)$ （交对并分配）

2° $(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$,

$(\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i)\cup B=\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}(A_i\cup B)$ （并对交分配）

(5)对偶律 （De-Morgen 法则）

1° $(A\cup B)^c=A^c\cap B^c$,

$(\bigcup\limits_{i\in I}A_i)^c=\bigcap\limits_{i\in I}A_i^c$ （I 为指标集）

2° $(A\cap B)^c=A^c\cup B^c$,

$(\bigcap\limits_{i\in I}A_i)^c=\bigcup\limits_{i\in I}A_i^c$ （I 为指标集）

这五条运算律皆可直接用定义证明，但也可在已证运算律基础上借助集合运算来得到．此处以证(4)之 2°的第一式和(5)之 1°、2°的第一式为例．

证(4)2° $(A\cup C)\cap(B\cup C)\xlongequal{(4)1^\circ}[(A\cup C)\cap B]\cup[(A\cup C)\cap C]$

$\xlongequal{(4)1^\circ}(A\cap B)\cup(C\cap B)\cup(A\cap C)\cup(C\cap C)$

$\xlongequal{\text{结合律、分配律、交换律}}(A\cap B)\cup C$.

证(5)1° （用集合相等定义证） $x\in(A\cup B)^c\Longleftrightarrow x\overline{\in}A\cup B\Longleftrightarrow(x\overline{\in}A)\wedge(x\overline{\in}B)\Longleftrightarrow(x\in A^c)\wedge(x\in B^c)\Longleftrightarrow x\in A^c\cap B^c$.

证(5)2° （借用(5)1°）对题式左、右两边取余运算 $((A\cap B)^c)^c=A\cap B$,

$(A^c\cup B^c)^c\xlongequal{(5)1^\circ}(A^c)^c\cap(B^c)^c=A\cap B$.

∴ 左集＝右集．

集合的运算律可用来化简集合关系式，也可用于证明集合等

式

例 17 化简$(A\cup B^c\cup C^c)^c\cap(A\cup B)$

解 原式$\xlongequal[\text{对偶律}]{}[A^c\cap(B^c)^c\cap(C^c)^c]\cap(A\cup B)=(A^c\cap B\cap C)\cap(A\cup B)\xlongequal[\text{分配律}]{}(A^c\cap B\cap C\cap A)\cup(A^c\cap B\cap C\cap B)\xlongequal[\text{交换律、结合律、幂等律}]{}\varnothing\cup(A^c\cap B\cap C)\xlongequal[\text{交换律}]{}B\cap C\cap A^c\xlongequal[\text{差化交}]{}$

例 18 求证$A-(A-B)=A\cap B$.

证 左式$\xlongequal[\text{差化交}]{}A-(A\cap B^c)\xlongequal[\text{差化交}]{}A\cap(A\cap B^c)^c\xlongequal[\text{对偶律}]{}A\cap(A^c\cup(B^c)^c)\xlongequal[\text{分配律}]{}(A\cap A^c)\cup(A\cap B)=\varnothing\cup(A\cap B)=A\cap B$
=右式.

四、集列的上限集与下限集

1. 单调集列

定义 1.1.7 (1)$A_1,A_2,\cdots$为一集合列,若$A_1\supset A_2\supset\cdots\supset A_n\supset\cdots$,则称此集列为**渐缩集列**,简记$A_n\downarrow$.并称$\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n$为**渐缩集列**$\{A_n\}$的极限集,记$\lim\limits_{n\to\infty}A_n$.

(2)$A_1,A_2,\cdots$为一集合列,若$A_1\subset A_2\subset\cdots\subset A_n\subset\cdots$,则称此集列为**渐张集列**,简记$A_n\uparrow$.并称$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$为渐张集列$\{A_n\}$的极限集,记$\lim\limits_{n\to\infty}A_n$.

2. 上限集与下限集

对于一般集合列$\{A_n\}$,若作$B_n=\bigcup\limits_{k=n}^{\infty}A_k$,则易见$B_n\downarrow$;若作$C_n=\bigcap\limits_{k=n}^{\infty}A_k$,则易见$C_n\uparrow$.

定义 1.1.8 对一般集列$\{A_n\}$,称$\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{k=n}^{\infty}A_k$为$\{A_n\}$的**上限集**,记$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n$;称$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\bigcap\limits_{k=n}^{\infty}A_k$为$\{A_n\}$的**下限集**,记$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n$.

定理 1.1.2 $\{A_n\}$为任一集列,则

$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n=\{x\ ;x\in A_n$ 对无穷个 n 成立$\}$；

$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n=\{x\ ;x\in A_n$ 除有限个 n 外皆成立$\}$.

证 只证第一式.

$x\in\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\Longleftrightarrow x\in\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{k=n}^{\infty}A_k\Longleftrightarrow\forall_n,x\in\bigcup\limits_{k=n}^{\infty}A_k\Longleftrightarrow\forall n,\exists k_0$ $\geqslant n,x\in A_{k0}\Longleftrightarrow x\in\{x\ ;x\in A_n$ 对无穷个 n 成立$\}$.

推论 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n\subset\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n$.

定义 1.1.9 若$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n$，则称集列$\{A_n\}$有**极限集**，并记为$\lim\limits_{n\to\infty}A_n=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n$（或$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n$）.

习题 1-1

1. 各举三个是集与不是集的例子.
2. 用特性描述法表示集合$\{3,5,7,9,11\}$.
3. 取 R' 为全集，问下列集是否为空集
   ① $\{x\,|\,x^2+x+3=0\}$；
   ② $\{x\,|\,3x-5<0,|x-8|<1\}$；
   ③ $\{x\,|\,x<0,x+\frac{1}{x}>2\}$.
4. 证明下列集合等式：
   ① $(A\cup B)-C=(A-C)\cup(B-C)$；
   ② $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$；
   ③ $A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$.
5. 设 $A_n=\left(0,1+\frac{1}{n}\right)$，用上、下限集定义求$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n$ 和$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n$，并证明$\lim\limits_{n\to\infty}A_n$ 存在.

§1.2 映射与集合的对等

一、映射

"映射"与"集合"一样，都是近代数学的基本概念. 映射可看成