Б.П.吉米多维奇

数学分析习题集题解

费定晖　周学圣　编演
郭大钧　邵品琮　主审

山东科学技术出版社

Б.П.吉米多维奇

数学分析习题集题解

（六）

费定晖　周学圣　编演
郭大钧　邵品琮　主审

07

山东科学技术出版社
一九八一年·济南

Б.П.吉米多维奇

数学分析习题集题解

（六）

费定晖　周学圣　编演
郭大钧　邵品琮　主审

山东科学技术出版社出版
山东省新华书店发行
山东青岛印刷厂印刷

787×1092毫米32开本　19.5印张　405千字
1980年12月第1版　1981年11月第2次印刷
印数：62,001—93,000

书号13195·22　定价2.10元

出版说明

吉米多维奇（Б.П.ДЕМИДОВИЧ）著《数学分析习题集》一书的中译本，自五十年代初在我国翻译出版以来，引起了全国各大专院校广大师生的巨大反响。凡从事数学分析教学的师生，常以试解该习题集中的习题，作为检验掌握数学分析基本知识和基本技能的一项重要手段。二十多年来，对我国数学分析的教学工作是甚为有益的。

该书四千多道习题，数量多，内容丰富，由浅入深，部分题目难度大。涉及的内容有函数与极限，单变量函数的微分学，不定积分，定积分，级数，多变量函数的微分学，带参变量积分以及重积分与曲线积分、曲面积分等等，概括了数学分析的全部主题。当前，我国广大读者，特别是肯于刻苦自学的广大数学爱好者，在为四个现代化而勤奋学习的热潮中，迫切需要对一些疑难习题有一个较明确的回答。有鉴于此，我们特约作者，将全书4462题的所有解答汇辑成书，共分六册出版。本书可以作为高等院校的教学参考用书，同时也可作为广大读者在自学微积分过程中的参考用书。

众所周知，原习题集，题多难度大，其中不少习题如果认真习作的话，既可以深刻地巩固我们所学到的基本概念，又可以有效地提高我们的运算能力，特别是有些难题还可以逼使我们学会综合分析的思维方法。正由于这样，我们殷切期望初学数学分析的青年读者，一定要刻苦钻研，千万不要

轻易查抄本书的解答，因为任何削弱独立思索的作法，都是违背我们出版此书的本意。何况所作解答并非一定标准，仅作参考而已。如有某些误解、差错也在所难免，一经发觉，恳请指正，不胜感谢。

本书蒙潘承洞教授对部分难题进行了审校。特请郭大钧教授、邵品琮副教授对全书作了重要仔细的审校。其中相当数量的难度大的题，都是郭大钧、邵品琮亲自作的解答。

参加编演工作的还有黄春朝同志。

本书在编审过程中，还得到山东大学、山东工学院、山东师范学院和曲阜师范学院的领导和同志们的大力支持，特在此一并致谢。

1979年4月

目　录

第八章　重积分和曲线积分

§1. 二 重 积 分

1°二重积分的直接计算法　所谓连续函数 $f(x,y)$ 展布在有限封闭可求积二维域 Ω 内的二重积分乃是指的数

$$\iint_{\Omega} f(x,y)\,dx\,dy=\lim_{\substack{\max|\Delta x_i|\to 0\\ \max|\Delta y_j|\to 0}}\sum_i\sum_j f(x_i,y_j)\Delta x_i\Delta y_j,$$

其中 $\Delta x_i=x_{i+1}-x_i$，$\Delta y_j=y_{j+1}-y_j$，而其和为对所有 i，j 使 $(x_i,\ y_j)\in\Omega$ 的那些值来求的.

若域 Ω 由下面的不等式所给出

$$a\leqslant x\leqslant b,\quad y_1(x)\leqslant y\leqslant y_2(x),$$

其中 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 为在闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数，则对应的二重积分可按下面的公式来计算

$$\iint_{\Omega} f(x,y)\,dx\,dy=\int_a^b dx\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy.$$

2°二重积分中的变量代换　若可微分的连续函数

$$x=x(u,v),\quad y=y(u,v)$$

把平面 Oxy 上的有限闭域 Ω 单值唯一地映射为平面 Ouv 上的域 Ω' 及雅哥比式

$$I=\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\neq 0,$$

则下之公式正确：

$$\iint_{\Omega} f(x,y)\,dx\,dy=\iint_{\Omega'} f[x(u,v),y(u,v)]\,|I|\,du\,dv.$$

特别是，根据公式$x=r\cos\varphi$，$y=r\sin\varphi$变换为极坐标r和φ的情形有

$$\iint_{\Omega} f(x,y)\,dx\,dy=\iint_{\Omega'} f(r\cos\varphi,r\sin\varphi)\,r\,dr\,d\varphi.$$

3901．把积分$\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant 1\\0\leqslant y\leqslant 1}} xy\,dx\,dy$，当作积分和的极限，用直线

$$x=\frac{i}{n},\quad y=\frac{j}{n}\quad(i,j=1,2,\cdots,n-1)$$

把积分域分为许多正方形，并选取被积函数在这些正方形之右顶点的值，计算所论积分的值．

解 由于

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{i}{n}\cdot\frac{j}{n}\cdot\frac{1}{n^2}=\frac{n^2(n+1)^2}{4n^4}\longrightarrow\frac{1}{4}\quad(n\to\infty),$$

其中

$$\sum_{i=1}^{n} i=\frac{n(n+1)}{2},\quad \sum_{j=1}^{n} j=\frac{n(n+1)}{2},$$

故

$$\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant 1\\0\leqslant y\leqslant 1}} xy\,dx\,dy=\frac{1}{4}.$$

3902．用直线

$$x=1+\frac{i}{n},\ y=1+\frac{2j}{n}\quad(i,j=0,1,\cdots,n)$$

把域 $1\leqslant x\leqslant 2$， $1\leqslant y\leqslant 3$ 分为许多矩形．作出函数 $f(x,y)=x^2+y^2$ 在此域内的积分下和 $\underline{S}$ 与积分上和 $\bar{S}$．当 $n\to\infty$ 时，上和与下和的极限等于什么？

解 下和

$$\underline{S}=\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1}\left[\left(1+\frac{i}{n}\right)^2+\left(1+\frac{2j}{n}\right)^2\right]\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{2}{n}$$

$$=\frac{2n}{n^2}\left[n+\frac{2}{n}\sum_{i=0}^{n-1}i+\frac{1}{n^2}\sum_{i=0}^{n-1}i^2+n+\frac{4}{n}\sum_{j=0}^{n-1}j\right.$$

$$\left.+\frac{4}{n^2}\sum_{j=0}^{n-1}j^2\right]$$

$$=\frac{40}{3}-\frac{11}{n}+\frac{5}{3n^2},$$

其中

$$\sum_{i=0}^{n-1}i^2=\frac{(n-1)n(2n-1)}{6},$$

$$\sum_{j=0}^{n-1}j^2=\frac{(n-1)n(2n-1)}{6};$$

而上和

$$\bar{S}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left[\left(1+\frac{i}{n}\right)^2+\left(1+\frac{2j}{n}\right)^2\right]\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{2}{n}$$

$$=\frac{40}{3}+\frac{11}{n}+\frac{5}{3n^2}.$$

当 $n\to\infty$ 时，$\underline{S}$ 与 $\bar{S}$ 的极限均等于 $\frac{40}{3}=13\frac{1}{3}$．

3903．用一系列内接正方形作为积分域的近似域，这些正方形的顶点 A_{ij} 在整数点，并取被积函数在每个正方形距原点的最远的顶点之值．近似地计算积分

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 25}\frac{dxdy}{\sqrt{24+x^2+y^2}},$$

并与精确的值加以比较.

解 由题意知，应取的正方形顶点为(1,1)，(1,2)，(1,3)，(1,4)，(2, 1)，(2, 2)，(2, 3)，(2, 4)，(3, 1)，(3,2)，(3,3)，(3,4)，(4,1)，(4, 2)，(4,3)，故利用对称性知

$$\frac{1}{4}\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 25}\frac{dxdy}{\sqrt{24+x^2+y^2}}\doteq\frac{1}{\sqrt{26}}+\frac{2}{\sqrt{29}}+\frac{2}{\sqrt{34}}$$

$$+\frac{2}{\sqrt{41}}+\frac{1}{\sqrt{32}}+\frac{2}{\sqrt{37}}+\frac{2}{\sqrt{44}}+\frac{1}{\sqrt{42}}+\frac{2}{\sqrt{49}}$$

$$\doteq 0.196+0.371+0.343+0.312+0.177$$

$$+0.329+0.302+0.154+0.285$$

$$\doteq 2.469,$$

即

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 25}\frac{dxdy}{\sqrt{24+x^2+y^2}}\doteq 9.876.$$

下面计算积分的精确值:

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 25}\frac{dxdy}{\sqrt{24+x^2+y^2}}$$

$$=4\int_0^5 \ln(y+\sqrt{24+x^2+y^2})\Big|_0^{\sqrt{25-x^2}}dx$$

$$=4\int_0^5\ln(\sqrt{25-x^2}+7)\,dx-2\int_0^5\ln(24+x^2)\,dx.$$

由于

$$\int \ln(24+x^2)dx = x\ln(24+x^2) - \int \frac{2x^2}{24+x^2}dx$$

$$= x\ln(24+x^2) - 2x + \frac{24}{\sqrt{6}} \text{arc tg}\frac{x}{\sqrt{24}} + C,$$

从而

$$2\int_0^5 \ln(24+x^2)dx$$

$$= \left[2x\ln(24+x^2) - 4x + \frac{48}{\sqrt{6}} \text{arc tg}\frac{x}{\sqrt{24}}\right]\Bigg|_0^5$$

$$= 20\ln 7 - 20 + 8\sqrt{6}\,\text{arc tg}\frac{5}{\sqrt{24}};$$

又

$$4\int_0^5 \ln(\sqrt{25-x^2}+7)dx$$

$$= 4\left[x\ln(\sqrt{25-x^2}+7)\right]\Big|_0^5$$

$$+ 4\int_0^5 \frac{x^2dx}{(\sqrt{25-x^2}+7)\sqrt{25-x^2}}$$

$$= 20\ln 7 + 4\int_0^5 \frac{x^2\,dx}{(\sqrt{25-x^2}+7)\sqrt{25-x^2}},$$

再令$x=5\sin t$，有

$$\int_0^5 \frac{x^2\,dx}{(\sqrt{25-x^2}+7)\sqrt{25-x^2}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{-25\cos^2 t+25}{5\cos t+7}dt$$

$$= -\int_0^{\frac{\pi}{2}}(5\cos t-7)\,dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{24}{5\cos t+7}dt$$

$$= (7t-5\sin t)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - 24\left[\frac{1}{\sqrt{6}}\text{arc tg}\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\text{tg}\frac{t}{2}\right)\right]\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{7\pi}{2}-5-4\sqrt{6}\,\mathrm{arc\,tg}\frac{2}{\sqrt{24}},$$

从而

$$4\int_0^5 \ln(\sqrt{25-x^2}+7)dx$$

$$=20\ln 7+14\pi-20-16\sqrt{6}\,\mathrm{arc\,tg}\frac{2}{\sqrt{24}}.$$

注意到

$$2\mathrm{arc\,tg}\frac{2}{\sqrt{24}}+\mathrm{arc\,tg}\frac{5}{\sqrt{24}}=\frac{\pi}{2},$$

最后便得到

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 25}\frac{dxdy}{\sqrt{24+x^2+y^2}}$$

$$=14\pi-4\sqrt{24}\left(2\mathrm{arctg}\frac{2}{\sqrt{24}}+\mathrm{arc\,tg}\frac{5}{\sqrt{24}}\right)$$

$$=2\pi(7-\sqrt{24})\doteq 13.19.$$

将精确值与近似值作比较，显见误差较大，其原因在于有不少不是正方形的域都被忽略，因而产生较大的绝对误差4.31及较大的相对误差$\frac{4.31}{13.19}\doteq 32.7\%$.

注意，求$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 25}\frac{dxdy}{\sqrt{24+x^2+y^2}}$的精确值若采用极坐标则较为简单：

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 25}\frac{dxdy}{\sqrt{24+x^2+y^2}}=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^5\frac{rdr}{\sqrt{24+r^2}}$$

$$=2\pi(7-\sqrt{24}).$$

但按原习题集的安排，似应在3937题以后才开始使用

极坐标，故本题仍用直角坐标进行计算.

3904. 用直线x=常数，y=常数，$x+y$=常数把域S分为四个相等的三角形，并取被积函数在每个三角形的中线交点之值. 近似地计算积分

$$\iint\limits_S \sqrt{x+y}\,dS,$$

其中S表由直线$x=0$，$y=0$及$x+y=1$所围成的三角形.

解 我们只须以$x=\frac{1}{2}$，$y=\frac{1}{2}$及$x+y=\frac{1}{2}$分域S，即得四个相等的三角形，它们的面积均为$\frac{1}{8}$，重心为$\left(\frac{1}{6},\frac{1}{6}\right)$，$\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$，$\left(\frac{2}{3},\frac{1}{6}\right)$及$\left(\frac{1}{6},\frac{2}{3}\right)$. 于是，得此积分的近似值为

$$\iint\limits_S \sqrt{x+y}\,dS \doteq \frac{1}{8}\left(\sqrt{\frac{1}{6}+\frac{1}{6}}+\sqrt{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}}+2\sqrt{\frac{2}{3}+\frac{1}{6}}\right)$$

$$\doteq \frac{1}{8}(0.577+0.816+2.0913) \doteq 0.402,$$

其精确值为

$$\iint\limits_S \sqrt{x+y}\,dS = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \sqrt{x+y}\,dy$$

$$= \frac{2}{3}\int_0^1 (1-x^{\frac{3}{2}})\,dx = \frac{2}{5} = 0.4.$$

3905. 把域$S\{x^2+y^2\leqslant 1\}$分为有限个直径小于δ的可求积的子域ΔS_i($i=1, 2, \cdots, n$). 对于什么样的值δ能保证不等式：

$$\left|\iint\limits_S \sin(x+y)\,dS-\sum_{i=1}^{n}\sin(x_i+y_i)\Delta S_i\right|<0.001$$

成立？其中 $(x_i,\ y_i)\in\Delta S_i$.

解 记函数 $\sin(x+y)$在ΔS_i中的振幅为ω_i，则

$$\left|\iint\limits_S \sin(x+y)\,dS-\sum_{i=1}^{n}\sin(x_i+y_i)\Delta S_i\right|$$

$$=\left|\sum_{i=1}^{n}\iint\limits_{\Delta S_i}[\sin(x+y)-\sin(x_i+y_i)]dS\right|$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^{n}\iint\limits_{\Delta S_i}|\sin(x+y)-\sin(x_i+y_i)|\,dS$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^{n}\iint\limits_{\Delta S_i}\omega_i\,dS=\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta S_i.$$

由于域 $S\{x^2+y^2\leqslant 1\}$的面积等于π，故只要

$$\omega_i<\frac{0.001}{\pi},$$

便能满足原不等式的要求．但因为

$$\omega_i=\sup_{\substack{(x_i,y_i)\in\Delta S_i\\(x'_i,y'_i)\in\Delta S_i}}|\sin(x'_i+y'_i)-\sin(x_i+y_i)|$$

$$\leqslant\sup_{\substack{(x_i,y_i)\in\Delta S_i\\(x'_i,y'_i)\in\Delta S_i}}|(x'_i+y'_i)-(x_i+y_i)|$$

$$\leqslant\sup_{\substack{(x_i,y_i)\in\Delta S_i\\(x'_i,y'_i)\in\Delta S_i}}[|x'_i-x_i|+|y'_i-y_i|]$$

$$\leqslant\sup_{\substack{(x_i,y_i)\in\Delta S_i\\(x'_i,y'_i)\in\Delta S_i}}\sqrt{2[(x'_i-x_i)^2+(y'_i-y_i)^2]}\,^{*)}$$

$$=\sqrt{2}\,\delta_i,$$

故只要取

$$\delta < \frac{1}{\sqrt{2}\pi} \times 0.001 \doteq 0.00022,$$

则有

$$\left|\iint_S \sin(x+y)dS - \sum_{i=1}^{n} \sin(x_i+y_i)\Delta S_i\right| < 0.001.$$

*）对于任意非负实数a，b有

$$2ab \leqslant a^2+b^2 \text{或} (a+b)^2 \leqslant 2(a^2+b^2),$$

从而

$$a+b \leqslant \sqrt{2(a^2+b^2)}.$$

计算积分：

3906. $\int_0^1 dx \int_0^1 (x+y)dy.$

解 $\int_0^1 dx \int_0^1 (x+y)dy = \int_0^1 \left(x+\frac{1}{2}\right)dx = 1.$

3907. $\int_0^1 dx \int_{x^2}^{x} xy^2 dy.$

解 $\int_0^1 dx \int_{x^2}^{x} xy^2 dy = \int_0^1 \left(\frac{x^4}{3} - \frac{x^7}{3}\right) dx = \frac{1}{40}.$

3908. $\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a r^2 \sin^2\varphi dr.$

解 $\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a r^2 \sin^2\varphi\, dr = \frac{a^3}{3}\int_0^{2\pi} \sin^2\varphi d\varphi$

$$= \frac{a^3}{3}\left(\frac{\varphi}{2} - \frac{1}{4}\sin 2\varphi\right)\Big|_0^{2\pi} = \frac{\pi a^3}{3}.$$

3909. 设R为矩形

$$a \leqslant x \leqslant A,\quad b \leqslant y \leqslant B,$$

证明等式

$$\iint\limits_R X(x)Y(y)\,dxdy = \int_a^A X(x)\,dx \int_b^B Y(y)dy.$$

证 根据在矩形域的情况下化二重积分为逐次积分的计算方法，不妨先对y后对x积分，即得

$$\iint\limits_R X(x)Y(y)\,dxdy = \int_a^A dx \int_b^B X(x)Y(y)dy$$

$$= \int_a^A X(x)\,dx \int_b^B Y(y)dy.$$

3910. 设：

$$f(x,y) = F''_{xy}(x,y),$$

计算

$$I = \int_a^A dx \int_b^B f(x,y)dy.$$

解 不妨按先对y后对x积分的顺序计算，即得

$$I = \int_a^A [F'_x(x,B) - F'_x(x,b)]dx$$

$$= F(x,B)\Big|_a^A - F(x,b)\Big|_a^A$$

$$= F(A,B) - F(a,B) - F(A,b) + F(a,b).$$

3911. 设$f(x)$为在闭区间$a \leqslant x \leqslant b$内的连续函数，证明不等式

$$\left[\int_a^b f(x)\,dx\right]^2 \leqslant (b-a)\int_a^b f^2(x)dx,$$

此处仅当$f(x)=$常数时等号成立。

证 因为

$$0 \leqslant \int_a^b dx \int_a^b [f(x)-f(y)]^2 dy$$

$$= (b-a)\int_a^b f^2(x)dx - 2(\int_a^b f(x)dx)^2$$

$$+ (b-a)\int_a^b f^2(y)dy,$$

故有

$$\left[\int_a^b f(x)dx\right]^2 \leqslant (b-a)\int_a^b f^2(x)dx.$$

当$f(x)=$常数时，显然上式中等号成立．反之，设上式中等号成立，则

$$\int_a^b dx \int_a^b [f(x)-f(y)]^2 dy = 0 .$$

由于函数 $F(x) = \int_a^b [f(x)-f(y)]^2 dy$是$a \leqslant x \leqslant b$上的非负连续函数，故$F(x) \equiv 0$ $(a \leqslant x \leqslant b)$.特别$F(a) = 0$，即$\int_a^b [f(a)-f(y)]^2 dy = 0$．又由于函数

$$G(y) = [f(a)-f(y)]^2$$

是$a \leqslant y \leqslant b$上的非负连续函数，故 $G(y) \equiv 0$ $(a \leqslant y \leqslant b)$．因此，$f(y) \equiv f(a)$ $(a \leqslant y \leqslant b)$，即$f(x)=$常数．证毕．

3912．下列积分有什么样的符号：

(a) $\iint\limits_{|x|+|y|\leqslant 1} \ln(x^2+y^2)dxdy$;

(б) $\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 4} \sqrt[3]{1-x^2-y^2}dxdy$;