多重线性代数基础

王伯英

北京师范大学出版社

多重线性代数基础

王 伯 英

J11/140/01

北京师范大学图书藏书
1527469

北京师范大学出版社

内 容 简 介

本书介绍多重线性代数的基础知识。内容包括：多重线性映射，张量空间，具有一定对称性的多重线性映射，张量的对称类以及各种诱导线性映射的性质。

本书可作为高等学校数学系高年级学生、研究生的选课教材，也可供有关的科学工作者参考。

多重线性代数基础

王伯英

北京师范大学出版社出版
新华书店北京发行所发行
河北省香河县印刷厂印刷

开本：787×1092 1/32 印张：5.75 字数：120千
1985年5月第1版 1988年5月第3次印刷
印数：15 501—16 500

ISBN 7-303-00087-9/O·10
定 价：1.00 元

序　言

鉴于多重线性代数近年来已经成为许多领域的常用工具，本书试图用比较短的篇幅介绍一下多重线性代数的基础内容。为使初学者便于掌握，本书注意用多重线性代数与线性代数对比的方法来阐明各个概念。

本书主要讨论了多重线性映射、张量空间、张量对称类和其上的线性映射，特别是用群的特征标理论比较深入地讨论了张量对称类的性质。对于广义矩阵函数、Grassmann空间及其可合元素等也有一定深度的介绍。

我们假定读者已有一般线性代数和抽象代数的基础。但为了使多重线性代数的结论与线性代数的相应结论便于比较，同时也为了减少读者查找参考书的时间，我们把要用到的线性代数的主要结论列举出来作为第一章。对于没学过群的表示和特征标的读者本书最后有个简短的附录。

本书的练习一般都不太难（较难的有提示），但它们是本书的组成部分，至少应该阅读。

本书的选材主要参考了 M.Marcus 和 R.Merris 以及他们的合作者的著作和论文，符号系统也基本上和他们的一致。本人是从 M.Marcus 那里开始学习多重线性代数的，在此表示深切的感谢。

许多老师和同学都对本课程提过不少宝贵意见，特别是郝钠新老师仔细审阅了全部手稿，提出了许多改进意见，在

此一并表示感谢。

由于作者水平所限，书中一定会有许多不当之处，盼望得到读者指正。

王伯英

1984年1月于北京师范大学

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

目　录

第一章　线性代数的一些内容

这一章主要列举多重线性代数中要用到的一些线性代数结论，以便于读者查阅．叙述力求简明扼要但也保持一定的系统性．对线性代数比较熟悉的读者可从本章最后一节开始阅读．

§1　线性扩张

如无特别说明，以后所说的向量空间都是复数域$\boldsymbol{C}$上的有限维向量空间（维数$\geqslant 1$），而$\boldsymbol{C}$可看作是自身上的1维向量空间．

复数域$\boldsymbol{C}$上所有1行n列矩阵组成具体的n维向量空间$M_{1,n}$，它的一组最简单的基是n个行向量

$$(1,0,\cdots,0),\cdots,(0,\cdots,0,1).$$

这组基称为$M_{1,n}$的**自然基**．类似地$M_{n,1}$也有相应的n个列向量组成它的自然基．

所有m行n列矩阵组成mn维向量空间$M_{m,n}$（当$m=n$时简写为M_n），它的自然基为E_{ij}，$i=1,\cdots,m$，$j=1,\cdots,n$，E_{ij}是(i,j)位置元素为1其余元素为0的m行n列矩阵．

由向量空间V到向量空间W的所有线性映射的集合记为$L(V,W)$，它本身当然也是个向量空间，其运算是：对于$S,T\in L(V,W)$，

$$(S+aT)v=Sv+aTv,\text{ 对所有 } v\in V,\ a\in \boldsymbol{C}.$$

对于 $T\in L(V,W)$，T 的值域（也叫像）定义为 $\mathrm{Im}T=\{Tv|v\in V\}$. $\mathrm{Im}T$ 是 W 的一个子空间，其维数称为 T 的秩，记作 $\rho(T)=\dim(\mathrm{Im}T)$，也常写成 $\mathrm{rank}(T)$.

类似地 $\mathrm{Ker}T=\{v\in V|Tv=0\}$ 是 V 的子空间，称为 T 的核（或核空间）.

对于 $T\in L(V,W)$，如果存在 $S\in L(W,V)$，使得 $TS=I_W$，$ST=I_V$，（I_W,I_V 分别是 W 和 V 上的恒等映射）则称 T 是可逆的. 容易验证，T 的逆若存在则是唯一的，这个唯一的逆 S 通常写为 T^{-1}.

若存在可逆的 $T\in L(V,W)$，则称向量空间 V 与向量空间 W 是同构的. 可逆的线性映射 T 也称为**同构映射**.

$M_{m,n}$ 中的矩阵 A 也可看作是线性映射，即 $A\in L(M_{n,1},M_{m,1})$，因而也有矩阵 A 的秩，A 的可逆性等名称.

定理1.1 设 $e_1,\cdots,e_n$ 是 V 的一组基，$S,T\in L(V,W)$，若 $Se_i=Te_i$，$i=1,\cdots,n$，则 $S=T$.

证 对任意的 $v\in V$，由 $v=\sum\limits_{i=1}^{n}a_ie_i$ 有

$$Sv=\sum_{i=1}^{n}a_iSe_i=\sum_{i=1}^{n}a_iTe_i=Tv. \qquad \blacksquare$$

定理1.2（线性扩张）设 $e_1,\cdots,e_n$ 是向量空间 V 的任一组基，$w_1,\cdots,w_n$ 是向量空间 W 的任意 n 个向量，则存在唯一的线性映射 $T\in L(V,W)$ 使得 $Te_i=w_i$，$i=1,\cdots,n$. 这就是说，要确定一个线性映射只需在 V 的一组基上给定值即可.（然后可以利用线性扩张到整个 V 上）

证 对任意的 $v=\sum_{i=1}^{n}a_ie_i\in V$，定义 $Tv=\sum_{i=1}^{n}a_iw_i$，因 a_i 由 v 唯一确定，故映射 $T:V\to W$ 是定义好了的. 设 $u=\sum_{i=1}^{n}b_ie_i$，$a\in\boldsymbol{C}$，则 $v+au=\sum_{i=1}^{n}(a_i+ab_i)e_i$，于是$T(v+au)=\sum_{i=1}^{n}(a_i+ab_i)w_i=\sum_{i=1}^{n}a_iw_i+a\sum_{i=1}^{n}b_iw_i=Tv+aTu$，这说明 T 是线性的. 又由定义显然有 $Te_i=w_i$，$i=1,\cdots,n$. T 的唯一性由定理1.1直接表明. ∎

关于线性映射的秩，下面的结论将多次用到.

定理1.3 设 $T\in L(V,W)$，$\dim V=n$，则 $\rho(T)=k$ 的充要条件是存在 V 的基 $v_1,\cdots,v_k,v_{k+1},\cdots,v_n$ 使 $Tv_1,\cdots,Tv_k$ 线性无关而 $Tv_{k+1}=\cdots=Tv_n=0$.

证 假定 $\rho(T)=k$，那么 $\mathrm{Im}T$ 中存在 k 个向量的基，不妨就记作 $Tv_1,\cdots,Tv_k$. 设 $u_1,\cdots,u_t$ 是 $\mathrm{Ker}T$的任一组基，令 $E=\{v_1,\cdots,v_k,u_1,\cdots,u_t\}$，则对任意的 $v\in V$ 就有

$$Tv=\sum_{i=1}^{k}c_iTv_i \text{ (因 } Tv\in\mathrm{Im}T\text{)},$$

于是
$$T\left(v-\sum_{i=1}^{k}c_iv_i\right)=0,$$

即
$$v-\sum_{i=1}^{k}c_iv_i\in\mathrm{Ker}T,$$

故
$$v-\sum_{i=1}^{k}c_iv_i=\sum_{i=1}^{t}d_iu_i,$$

这说明任意 v 可用 E 的向量线性表示.

又若有 $$\sum_{i=1}^{k} a_i v_i + \sum_{j=1}^{t} b_j u_j = 0,$$

两边作用 T 得 $$\sum_{i=1}^{k} a_i T v_i = 0,$$

故 $a_i=0$，$i=1,\cdots,k$，代入上式又得 $b_j=0$，$j=1,\cdots,t$，这说明 E 的向量是线性无关的，因而 E 是 V 的基，于是 $u_1,\cdots,u_t$ 就是所求的 $v_{k+1},\cdots,v_n$.

反之由 $Tv_{k+1}=\cdots=Tv_n=0$ 知对任意的 $v\in V$，Tv 可用线性无关的 $Tv_1,\cdots,Tv_k$ 线性表示，因而 $\rho(T)=k$. ▌

从定理1.3的证明中立即得到下面的结论.

定理1.4 设 $T\in L(V,W)$，则
$$\dim V=\dim(\mathrm{Im}T)+\dim(\mathrm{Ker}T). \quad ▌$$

练 习 1

1. 设 $T\in L(V,W)$，证明 $\rho(T)\leqslant\min\{\dim V,\dim W\}$.

2. 设 $T\in L(V,U)$，$S\in L(U,W)$，证明 $\rho(ST)\leqslant\min\{\rho(T),\rho(S)\}$. (这里 S 与 T 的乘积 $ST\in L(V,W)$)

3. 设 $T\in L(V,W)$，证明 T 的逆若存在则是唯一的，又 T 为可逆的充要条件是 $\rho(T)=\dim V=\dim W$.

4. 证明由定理 1.2 线性扩张所唯一确定的线性映射 T 为可逆的充要条件是 $w_1,\cdots,w_n$ 为 W 的一组基.

5. 证明向量空间 V 与 W 同构的充要条件是 $\dim V=\dim W$.

6. 若 $T\in L(V,U)$，$S\in L(U,W)$ 都可逆，证明 ST 也可逆且 $(ST)^{-1}=T^{-1}S^{-1}$. 也有 $(T^{-1})^{-1}=T$.

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

7. 由练习 1.3 知矩阵中只有方阵才有逆可言，证明方阵 A 可逆的充要条件是 A 的列向量线性无关.

8. 设 $A,B\in M_n$ 且 $AB=I_n$（单位方阵），证明 $BA=I_n$.

9. 设 $E=\{e_1,\cdots,e_n\}$ 是 V 的一组基，$A=(a_{ij})\in M_n$ 是可逆方阵，令 $e_j'=\sum\limits_{i=1}^{n}a_{ij}e_i$，$j=1,\cdots,n$，证明 $E'=\{e_1',\cdots,e_n'\}$ 也是 V 的一组基.

§2 线性映射的矩阵表示

设 $T\in L(V,W)$，V 的一组有序基为 $E=\{e_1,\cdots,e_n\}$，W 的一组有序基为 $F=\{f_1,\cdots,f_m\}$，由 $Te_j\in W$ 就有

$$Te_j=\sum_{i=1}^{m}a_{ij}f_i,\quad j=1,\cdots,n.$$

我们称 $A=(a_{ij})\in M_{m,n}$ 为线性映射 T 关于有序基 E 到有序基 F 的矩阵表示，记作

$$[T]_E^F=A.$$

由定理1.1知，若 $[S]_E^F=[T]_E^F$ 则 $S=T$，故在基固定之下，$L(V,W)$ 的线性映射与 $M_{m,n}$ 中的矩阵是一一对应的. 一般说，映射较抽象便于理论推导而矩阵较具体便于实际计算，故由上面的对应关系，有些线性映射问题就可化为矩阵来计算而有些矩阵问题则可化为线性映射来处理. 这种互相转换无论在理论上或实际上都是很有用的. 下面我们进一步讨论这种关系.

向量空间 V 的向量 v 也可看作从一维向量空间 $\mathbf{C}$ 到 n

维向量空间 V 的线性映射，即 $v\in L(\mathbf{C},V)$. 若 $\mathbf{C}$ 的基取为 1，V 的有序基为 $E=\{e_1,\cdots,e_n\}$，由

$$v\cdot 1=\sum_{i=1}^{n}a_ie_i,$$

就有 $[v]_1^E=(a_1,\cdots,a_n)^T\in M_{n,1}$，简记为 $[v]^E$. V 对于 E 的矩阵表示也称为向量 v 关于基 E 的坐标.

定理2.1 设 $E=\{e_1,\cdots,e_n\}$，$F=\{f_1,\cdots,f_m\}$，$G=\{g_1,\cdots,g_l\}$ 分别为 V，W 和 U 的有序基，又设 $T\in L(V,W)$，$S\in L(W,U)$，则

$$[ST]_E^G=[S]_F^G[T]_E^F.$$

特别地

$$[Tv]^F=[T]_E^F[v]^E,\quad \forall v\in V.$$

证 假定 $Te_j=\sum_{i=1}^{m}a_{ij}f_i$，$j=1,\cdots,n$，$Sf_i=\sum_{k=1}^{l}b_{ki}g_k$，$i=1,\cdots,m$，即 $[T]_E^F=A$，$[S]_F^G=B$，那么

$$STe_j=\sum_{i=1}^{m}a_{ij}Sf_i=\sum_{k=1}^{l}\left(\sum_{i=1}^{m}b_{ki}a_{ij}\right)g_k=\sum_{k=1}^{l}(BA)_{kj}g_k,$$

由定义就得 $[ST]_E^G=BA=[S]_F^G[T]_E^F$. ▎

$L(V,V)$中的线性映射也称为线性算子（或叫 V 的自同态）. 对于 $S,T\in L(V,V)$，若存在可逆的 $R\in L(V,V)$ 使得 $S=R^{-1}TR$，则称 S 相似于 T，也说 T 经过相似变换成为 S，简写为 $S\sim T$. 对于 n 阶方阵也有同样名称.

容易看到相似是一个等价关系，即它具有反身性：$T\sim T$；对称性：若 $S\sim T$ 则 $T\sim S$；传递性：若 $S\sim T$，$T\sim H$ 则 $S\sim H$. 这个等价关系把 $L(V,V)$ 分为一些不相交的等价类.

下面是线性算子 T 在不同基下的矩阵（方阵）表示的关系.

定理2.2 设 $T\in L(V,V)$，E 与 E' 是 n 维向量空间 V 的两组基，则 $[T]_{E'}^{E'}$ 与 $[T]_{E}^{E}$ 是相似方阵. 反之任意两个相似方阵都可看作是同一算子 T 在不同基下的矩阵表示.

证 设 I 是 V 上的恒等算子，用定理2.1得

$$[I]_{E'}^{E}[I]_{E}^{E'}=[I]_{E}^{E}=I_n \text{（单位方阵）}$$

$[I]_{E'}^{E}$ 称为从基 E 到基 E' 的过渡矩阵，故若记 $[I]_{E'}^{E}=P$，则 $[I]_{E}^{E'}=P^{-1}$. 于是

$$[T]_{E'}^{E'}=[ITI]_{E'}^{E'}=[I]_{E}^{E'}[T]_{E}^{E}[I]_{E'}^{E}=P^{-1}[T]_{E}^{E}P.$$

反之设 A,B 是两个相似方阵，即 $B=R^{-1}AR$. 又设 E 是 V 的任一有序基，由线性扩张定理，方阵 A 唯一确定一线性算子 T 使 $[T]_{E}^{E}=A$. 又由练习 1.9，可逆的 R 确定一组基 E' 使 $[I]_{E'}^{E}=R$，于是

$$[T]_{E'}^{E'}=[I]_{E}^{E'}[T]_{E}^{E}[I]_{E'}^{E}=R^{-1}AR=B. \qquad \blacksquare$$

由此定理可以看到，任一相似方阵类都可看作是由同一线性算子 T 引起的. 因此我们可以用相似方阵的共有性质来定义算子的相应性质. 例如因为相似方阵的迹相同，故我们就可以定义算子 T 的迹为其任一有序基下的矩阵表示的迹（对角线元素之和）. 同样的情况适用于方阵与算子的特征值和行列式.

完全类似，任一相似算子类也可看作是由同一矩阵引起.

练 习 2

1. 设 E，F 分别为 V，W 的有序基，证明

$$[S+aT]_E^F=[S]_E^F+a[T]_E^F,\ \forall S,T\in L(V,W),a\in \boldsymbol{C};$$
$$[v+au]^E=[v]^E+a[u]^E,\forall v,u\in V,a\in \boldsymbol{C}.$$

2. 设 $\dim V=n$，$\dim W=m$，分别在 V 和 W 取定一组基，对于 $L(V,W)$ 中每一线性映射，令它关于所取定的基的矩阵与之对应．证明，这是从向量空间 $L(V,W)$ 到向量空间 $M_{m,n}$ 的同构映射．

3. 证明 $\dim L(V,W)=\dim V\cdot\dim W$．

4. 设 E,F 分别为 V,W 的有序基，若 $T\in L(V,W)$ 是可逆的，证明 $[T^{-1}]_F^E=([T]_E^F)^{-1}$．

5. 证明如果把矩阵 A 看作 $L(M_{n,1},M_{m,1})$ 的线性映射，那么它关于 $M_{n,1}$ 与 $M_{m,1}$ 的自然基的矩阵表示就是 A 本身．

6. 设 E,F 分别是 V,W 的有序基，$T\in L(V,W)$，$[T]_E^F=A$，证明 $\rho(T)=\rho(A)$．

§3 酉空间

向量空间 V 上的二元复值函数 (v,u) 若满足下面三个条件：

(i) $(v,u)=\overline{(u,v)}$，$\forall v,u\in V$；

(ii) $(v+aw,u)=(v,u)+a(w,u)$，$\forall v,w,u\in V$，$a\in\boldsymbol{C}$；

(iii) $(v,v)>0$，$\forall 0\neq v\in V$，

则称这个函数 $(,)$ 为向量空间 V 上的**内积**．定义了内积的向量空间称为**内积空间**．复内积空间也称为**酉空间**．

$\|v\|=\sqrt{(v,v)}$ 称为向量 v 的范数．若 $\|v\|=1$ 则称 v 为

单位向量.

若$(v,u)=0$，则称v与u是正交的，写成$v\perp u$.

n维酉空间的向量$e_1,\cdots,e_n$称为**规格化正交基**，如果它们满足

$$(e_i,e_j)=\delta_{ij},\quad 1\leqslant i,j\leqslant n,$$

其中 $$\delta_{\alpha\beta}=\begin{cases}1, & \text{当 } \alpha=\beta \text{ 时}\\ 0, & \text{当 } \alpha\neq\beta \text{ 时}.\end{cases}$$

定理3.1 (Cauchy-Schwarz **不等式**)设V是酉空间，$v,u\in V$，则

$$|(v,u)|\leqslant\|v\|\cdot\|u\|$$

且等号成立当且仅当v与u是线性相关的.

证　当$v=0$时，结论显然成立. 若$v\neq 0$，令$w=u-\dfrac{(u,v)}{\|v\|^2}v$，则$(w,v)=0$，于是

$$\begin{aligned}0\leqslant(w,w)=(w,u)&=(u,u)-\frac{(u,v)}{\|v\|^2}(v,u)\\&=\|u\|^2-\frac{|(v,u)|^2}{\|v\|^2}.\end{aligned}$$

上式等号成立当且仅当$w=0$即u与v线性相关. ∎

定理3.2 （**三角不等式**）设V是酉空间，则

$$\|v+u\|\leqslant\|v\|+\|u\|,\quad \forall v,u\in V.$$

证
$$\begin{aligned}\|v+u\|^2=(v+u,v+u)&=(v,v)+(v,u)\\&\quad+(\overline{v,u})+(u,u)\\&\leqslant(v,v)+2|(v,u)|+(u,u)\\&\leqslant\|v\|^2+2\|v\|\|u\|+\|u\|^2\\&=(\|v\|+\|u\|)^2.\end{aligned}$$ ∎

定理3.3 设 $e_1,\cdots,e_n$ 是酉空间 V 的规格化正交基，则对任意的 $v,u\in V$ 有

$$v=\sum_{i=1}^{n}(v,e_i)e_i;$$

$$(v,u)=\sum_{i=1}^{n}(v,e_i)(e_i,u).$$

证 因为 $v=\sum_{j=1}^{n}a_je_j$, 故 $(v,e_i)=\left(\sum_{j=1}^{n}a_je_j,e_i\right)=\sum_{j=1}^{n}a_j\delta_{ji}=a_i$, $i=1,\cdots,n$. ▎

定理3.4 (Gram-Schmidt **正交化过程**) 设 $v_1,\cdots,v_n$ 是酉空间 V 的任一组基，则能求得规格化正交基 $e_1,\cdots,e_n$ 使得

$$\langle e_1,\cdots,e_k\rangle=\langle v_1,\cdots,v_k\rangle,\quad k=1,\cdots,n,$$

其中 $\langle v_1,\cdots,v_k\rangle$ 表示由 $v_1,\cdots,v_k$ 生成（或叫张成）的子空间.

证 令 $e_1=\dfrac{v_1}{\|v_1\|}$, $e_2=\dfrac{v_2-(v_2,e_1)e_1}{\|v_2-(v_2,e_1)e_1\|},\cdots,$

$$e_n=\frac{v_n-(v_n,e_1)e_1-\cdots-(v_n,e_{n-1})e_{n-1}}{\|v_n-(v_n,e_1)e_1-\cdots-(v_n,e_{n-1})e_{n-1}\|},$$

容易验证 $e_1,\cdots,e_n$ 即为所求的规格化正交基. ▎

对于向量空间 $M_{n,1}$, 设 $x=(a_1,\cdots,a_n)^{\mathrm{T}}$, $y=(b_1,\cdots,b_n)^{\mathrm{T}}\in M_{n,1}$, 定义

$$(x,y)=\sum_{i=1}^{n}a_i\bar{b}_i,$$

很明显这是 $M_{n,1}$ 的一个内积且这个内积使 $M_{n,1}$ 的自然基成为规格化正交基. 故我们称这个内积为 $M_{n,1}$ 的**自然内积**.

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com