

静电陀螺仪动力学

刘延柱 著

440173

国防工业出版社

V241.1/01

440173

静电陀螺仪动力学

刘延柱 著

HK50/29



国防工业出版社



C0222358

内 容 简 介

静电陀螺仪是近年来发展起来的一种高精度陀螺仪。本书从动力学角度系统地讨论了这种陀螺仪的基本运动规律。全书共分十章,分析了陀螺仪在理想情况下以及在静电场、磁场、重力和惯性力场、残余气体介质影响下的运动规律,并讨论了这种陀螺仪的常值漂移数学模型和补偿方法。本书可供从事陀螺仪及惯性导航系统研究、设计的工程技术人员、力学工作者以及有关院校陀螺及惯性导航专业的师生参考。

静电陀螺仪动力学

刘 延 柱 著

*

国防工业出版社 出版

北京市书刊出版业营业许可证出字 第074号

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

国防工业出版社印刷厂印装

*

850×1168¹/₃₂ 印张7¹/₂ 188千字

1979年8月第一版 1979年8月第一次印刷 印数:0,001—7,000册

统一书号:15034·1840 定价:0.96元

目 录

序言	1
绪论	2
第一章 理想陀螺仪的运动	5
§ 1.1 刚体的惯性矩和惯性椭球	5
§ 1.2 刚体的动量矩定理	8
§ 1.3 欧拉-潘索运动	10
§ 1.4 静电陀螺仪的理想模型	14
§ 1.5 理想陀螺的运动方程	14
§ 1.6 自然规则进动	17
第二章 陀螺在磁场中的运动	21
§ 2.1 感应涡流力矩	21
§ 2.2 被动阻尼时的陀螺运动方程	23
§ 2.3 被动阻尼方程的近似解	25
§ 2.4 被动阻尼的定向过程	28
§ 2.5 被动阻尼的转速衰减	33
§ 2.6 受驱动的陀螺运动方程	35
§ 2.7 驱动方程的近似解	37
§ 2.8 驱动过程	39
§ 2.9 从被动阻尼到主动阻尼	41
§ 2.10 主动阻尼时的陀螺运动方程	42
§ 2.11 主动阻尼方程的近似解	45
§ 2.12 主动阻尼的定向过程	47
§ 2.13 受到磁场干扰的陀螺运动方程	48
§ 2.14 杂散磁场引起的陀螺漂移和转速衰减	51
§ 2.15 涡流力矩器	53
第三章 转子的质心偏移问题	55
§ 3.1 轴向和径向偏心	55
§ 3.2 轴向偏心的陀螺运动方程	56

§ 3.3	强迫规则进动	57
§ 3.4	径向偏心的陀螺运动方程	58
§ 3.5	转子的侧向摆动	61
§ 3.6	陀螺的旋转轴迹线	63
§ 3.7	径向偏心引起的转速衰减	65
§ 3.8	基座弹性对临界转速的影响	67
§ 3.9	准球对称转子的侧向摆动	69
§ 3.10	重力矩和离心惯性力矩引起的章动	70
第四章	转子的非球形问题	74
§ 4.1	非球形参数	74
§ 4.2	计算弹性变形的基本公式	76
§ 4.3	温度差变形	78
§ 4.4	压力差变形	79
§ 4.5	薄壁球的离心变形	81
§ 4.6	赤道环对离心变形的影响	83
§ 4.7	实心球的离心变形	86
第五章	静电场引力和力矩	90
§ 5.1	正六面体电极	90
§ 5.2	对电极的曲面积分	91
§ 5.3	平板电容器假定	98
§ 5.4	间隙计算公式	99
§ 5.5	电容计算公式	101
§ 5.6	支承系统分类	104
§ 5.7	电压计算公式	104
§ 5.8	转子表面的两种坐标系	108
§ 5.9	静电引力的合力	110
§ 5.10	支承刚度	112
§ 5.11	静电场干扰力矩的形成	114
§ 5.12	静电引力的合力矩	115
§ 5.13	影响干扰力矩的因素	120
§ 5.14	干扰力矩计算公式	122
§ 5.15	小偏角时的干扰力矩公式	124
§ 5.16	电极错位误差附加力矩	125

§ 5.17	电极半球高误差附加力矩	131
§ 5.18	电极非球形误差附加力矩	135
§ 5.19	电极面积误差附加力矩	140
§ 5.20	准球对称转子的电容计算	143
§ 5.21	利用侧摆效应检测姿态角	145
§ 5.22	不等刚度附加力矩	145
§ 5.23	利用侧摆效应施加控制力矩	147
§ 5.24	准球对称转子的主动阻尼	150
第六章	静电场引力和力矩 (续)	152
§ 6.1	正八面体电极	152
§ 6.2	对电极的曲面积分	153
§ 6.3	电容计算公式	154
§ 6.4	电压计算公式	156
§ 6.5	支承刚度	158
§ 6.6	干扰力矩计算公式	160
§ 6.7	电极工艺误差附加力矩	162
§ 6.8	利用侧摆效应检测姿态角	165
§ 6.9	利用侧摆效应施加控制力矩	167
第七章	静电场引力和力矩 (续二)	171
§ 7.1	半球电极组	171
§ 7.2	电容计算公式	171
§ 7.3	电压计算公式	172
§ 7.4	支承刚度	175
§ 7.5	干扰力矩计算公式	176
§ 7.6	利用侧摆效应检测姿态角	178
§ 7.7	利用侧摆效应施加控制力矩	179
§ 7.8	电极划分方案比较	181
第八章	静电引力矩作用下的陀螺运动	183
§ 8.1	无线位移时的陀螺小偏角运动	183
§ 8.2	有线位移时的陀螺小偏角运动	185
§ 8.3	顶点轨迹的奇点	188
§ 8.4	无线位移时的陀螺大范围运动	190
§ 8.5	线位移与二次谐波耦合的陀螺大范围运动	193

§ 8.6	线位移与三次谐波耦合的陀螺大范围运动	194
§ 8.7	工艺误差影响下的陀螺大范围运动	195
§ 8.8	关于平台式陀螺极轴位置的讨论	197
第九章	残余气体影响	199
§ 9.1	稀薄气体阻尼力矩	199
§ 9.2	残余气体对永久转动的影响	200
§ 9.3	残余气体对自然规则进动的影响	201
第十章	陀螺漂移问题	204
§ 10.1	干扰源分类	204
§ 10.2	影响陀螺漂移的因素	205
§ 10.3	捷联式陀螺总干扰力矩公式	209
§ 10.4	捷联式陀螺力矩系数的标定	212
§ 10.5	捷联式陀螺常值漂移的补偿	214
§ 10.6	平台式陀螺总干扰力矩公式	219
§ 10.7	平台式陀螺力矩系数的标定	222
§ 10.8	平台式陀螺常值漂移的补偿	224
§ 10.9	壳体旋转的补偿效应	225
附录	计算用表	229
参考文献		231

序 言

静电陀螺仪是近年来发展起来的一种新型陀螺仪。它的基本原理是利用静电引力使球形转子在自由悬浮状态下高速旋转。这种独特的结构特点使静电陀螺仪具有一般框架陀螺仪难以达到的高精度，成为一种很有发展前途的高精度惯性元件。

静电支承、磁支承、气体静压或动压支承等各种自由转子陀螺仪的接踵出现，使古典刚体动力学得到了新的发展。因为上述陀螺仪技术需要解决刚体在静电场、磁场、流体压力场以及万有引力场共同作用下的动力学问题。这些问题与人造地球卫星在万有引力场和地球磁场中的姿态角控制问题也密切相关，后者在近几年来引起了有关力学工作者的广泛注意。

本书试图从动力学观点系统地阐明静电陀螺仪的基本运动规律，分析各种干扰作用的产生原因和补偿方法。

在向四个现代化宏伟目标的进军声中，作者希望这本书对从事陀螺技术工作的读者能有所裨益。更希望抛砖引玉，能引起我国力学工作者对刚体动力学的这个新方向投以更多的注意。

在这本书的编写过程中，先后得到许多同志的关心和鼓励，收到许多宝贵的意见，作者在此表示衷心的感谢。对书中的错误和不妥之处请读者不吝指正。

刘延柱
于上海交通大学

绪 论

静电陀螺仪是一种自由转子陀螺仪。它的结构简单，由一个具有数对金属电极的陶瓷壳体和一个球形金属转子所组成。基本工作原理是利用静电场的静电吸力使球形金属转子悬浮起来高速旋转。支承控制系统接受转子与电极之间的电容变化信息，并对电极施加反馈电压以调整作用在转子上的静电引力，使转子在电极壳体内处于稳定的平衡状态。

为了保证静电支承有足够大的刚度，转子与电极之间必须有尽可能高的场强，即高电压和小间隙。转子与电极的间隙内必须经常维持超高真空状态以防止高压击穿，并使转子的阻尼力矩减小到最低限度。转子支起后，由定子线圈产生的旋转磁场将其加速到工作转速，并利用磁场作用消除由于转动轴与转子形体轴不重合而产生的摆动现象后即切断旋转电源，转子依靠自己的惯性在无阻尼环境中维持转动。由于静电吸力很微弱，转子必须用铍或铝等轻金属制成薄壁或实心的球体。薄壁球转子利用加厚的赤道环形成惯性主轴，实心球转子则利用质心的微小偏移形成主轴，并利用这种偏心所产生的侧向摆动来检测转子姿态角和施加控制力矩。

按动力学观点，静电陀螺仪具有不同于框架陀螺仪的若干特点：

1. 结构简单，干扰来源少，陀螺漂移率极低而且具有高度的重复性和可预测性。
2. 当转子相对壳体有线位移时，支承力的作用点也随之移动，不存在框架陀螺的非等弹性效应。
3. 转子与壳体之间为“力矩绝缘”，作用在壳体上的干扰力矩或指令力矩传不到转子上去，只有直接作用在转子上的力才能

形成力矩。

4. 对外表面为理想球形的转子，静电引力不能构成力矩。因此转子外表面的非球形是形成静电场干扰力矩的基本因素。

新出现的静电陀螺仪向陀螺动力学提出了一些亟待解决的新问题，可归纳为：

1. 阐明这种陀螺仪的基本运动规律。
2. 分析各种干扰作用的产生原因和对陀螺仪精度的影响。
3. 研究提高陀螺仪精度的补偿方法。

要回答这些问题，已有的框架陀螺仪实用理论已感到远不够用。因为像静电陀螺仪这样的自由转子陀螺，尽管免除了内外框架，但在动力学分析方面并不比框架陀螺仪更容易，原因是：

1. 作用在自由转子上的各种面积力和体积力都必须经过复杂的积分运算求出合力和合力矩。

2. 自由转子在壳体内有线位移时，质心和支承力作用点都随之移动，力场的分布规律及其合力和合力矩都随之改变，从而使转子的转动规律也受到影响。因此转子质心的运动和绕质心的转动是互相交织在一起的动力学问题。

3. 不存在机械约束的自由转子可绕任意轴作瞬时转动。只有在陀螺进入稳态以后的特殊情形，才允许像框架陀螺那样近似认为动量矩矢量与形体轴相一致而使用简化的进动方程。

4. 转子作稳态运动时，其极轴可自由偏离平衡位置。只有当陀螺极轴在平衡位置附近作小偏角运动的特殊情形，才允许对进动方程进行线性化处理。除此之外，在一般情况下则面临着非线性微分方程组求解的困难。

围绕这些问题国外发表过的主要文章已列在书末的参考文献中。本书的写作目的是试图将静电陀螺仪的动力学问题系统化，力求用常用数学工具推导出近似且简明的计算公式，以供工程技术人员使用，并着重从物理概念方面说明其涵义。

理想的静电陀螺仪等同于欧拉情况刚体绕定点转动的古典问

题, 其运动规律以及刚体动力学的若干基本概念在第一章中作了扼要叙述, 作为阅读以后各章节的基础。第二章说明理想陀螺仪驱动和定向过程的力学原理, 并分析杂散磁场引起的干扰作用。第三、四章讨论实际陀螺仪偏离理想状态的两个主要方面——质心偏离球心问题和转子表面非球形问题。除讨论一般运动规律以外, 将具有微小偏心的实心球转子称之为准球对称转子, 讨论其特殊运动形态。对转子各种变形的计算是为了替静电场干扰力矩的计算创造条件。第五、六章分别对两种不同的电极划分方案(正六面体电极和正八面体电极)详细说明静电引力的合力和合力矩的计算过程, 并提供一种对各电极求曲面积分的简便方法。第七章提出将正八面体电极进行编组控制以形成半球形电极组的设想。也详细计算了静电引力的合力和合力矩, 并对三种电极系统进行了对比。对准球对称转子利用侧向摆动检测姿态角和施加控制力矩问题给出了理论依据。在静电引力矩作用下的陀螺运动规律, 特别是在全局范围内的运动规律是第八章的讨论内容。使用了相平面的奇点理论, 分析全局范围内的陀螺顶点轨迹和平衡位置的稳定性问题。第九章讨论了电极壳体内残余气体对陀螺运动的影响。第十章将以上各章推导出的各种干扰作用的计算公式综合成陀螺仪的总干扰力矩公式, 以建立陀螺仪常值漂移的数学模型, 并利用此模型分别就捷联式和平台式两种应用方案, 讨论对陀螺常值漂移进行补偿的可能性。

书中各章的主要计算公式都附有推导过程, 使具有一般微积分和理论力学知识的读者能顺利阅读。在许多场合使用矩阵符号来表示矢量或座标系之间的方向余弦关系使叙述更为简明。对于框架陀螺实用理论已讨论清楚的问题在本书中不再赘述。

第一章 理想陀螺仪的运动

§ 1.1 刚体的惯性矩和惯性椭球

如果物质密集充满某空间区域，且组成此物质的无数质点中任意两个质点间的距离保持不变，则此质点系称为刚体。

如图 1.1 所示，令 O 为刚体内任意点， (xyz) 为固结于刚体任意选取的坐标系， $\bar{i}$ 、 $\bar{j}$ 、 $\bar{k}$ 为各坐标轴的单位矢量， $\bar{l}^\circ$ 为过 O 点任意轴的单位矢量， α 、 β 、 γ 为 $\bar{l}^\circ$ 相对 (xyz) 坐标系的方向余弦，有

$$\bar{l}^\circ = \alpha \bar{i} + \beta \bar{j} + \gamma \bar{k} \quad (1.1)$$

令组成刚体的任一质量为 m_i 的质点的坐标为 (x_i, y_i, z_i) ， $\bar{r}_i$ 为自坐标原点 O 至 m_i 点的矢径，有

$$\bar{r}_i = x_i \bar{i} + y_i \bar{j} + z_i \bar{k} \quad (1.2)$$

如 ρ_i 为 m_i 点到 $\bar{l}^\circ$ 轴的距离

离，则刚体相对 $\bar{l}^\circ$ 轴的惯性矩（或转动惯量） J_l 定义如下：

$$J_l = \sum_i m_i \rho_i^2 \quad (1.3)$$

令 φ_i 为 $\bar{r}_i$ 与 $\bar{l}^\circ$ 的夹角，计算 $\bar{r}_i$ 与 $\bar{l}^\circ$ 的标量积：

$$\bar{r}_i \cdot \bar{l}^\circ = r_i \cos \varphi_i = \alpha x_i + \beta y_i + \gamma z_i \quad (1.4)$$

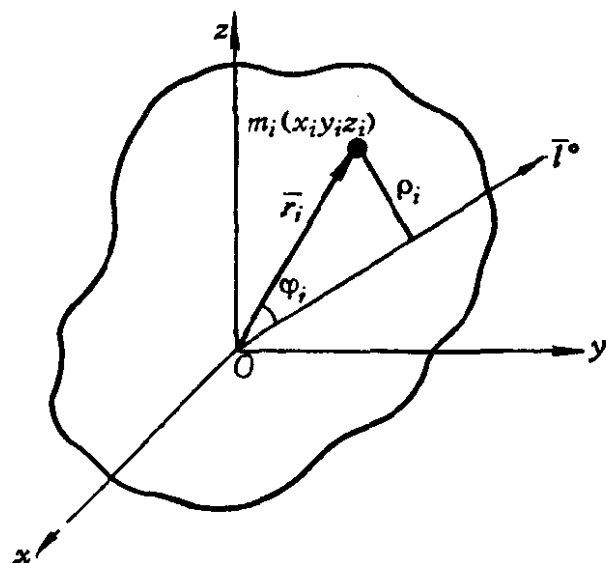


图1.1 刚体对任意轴的惯性矩

推出:

$$\rho_i^2 = r_i^2 - (r_i \cos \varphi_i)^2 = x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 - (\alpha x_i + \beta y_i + \gamma z_i)^2 \quad (1.5)$$

将式 (1.5) 代入式 (1.3), 整理后得到刚体的惯性矩 计算公式:

$$J_l = A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2 - 2D\beta\gamma - 2E\gamma\alpha - 2F\alpha\beta \quad (1.6)$$

各系数的定义为:

$$\left. \begin{aligned} A &= \sum_i m_i (y_i^2 + z_i^2), & D &= \sum_i m_i y_i z_i \\ B &= \sum_i m_i (z_i^2 + x_i^2), & E &= \sum_i m_i z_i x_i \\ C &= \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2), & F &= \sum_i m_i x_i y_i \end{aligned} \right\} \quad (1.7)$$

A 、 B 、 C 称为刚体相对 (xyz) 各座标轴的惯性矩; D 、 E 、 F 称为刚体的惯性积。当 O 点位置和 (xyz) 座标轴方向确定以后, 这六个参数就完全确定, 用式 (1.6) 就能计算刚体相对过 O 点任意轴的惯性矩。

在 $\bar{l}^\circ$ 轴上选取 P 点, 以 R 表示 P 点矢径的长度, 并规定 R 与刚体相对 $\bar{l}^\circ$ 轴的惯性矩 J_l 的平方根成反比。

$$R = \frac{k}{\sqrt{J_l}} \quad (1.8)$$

k 为任意选取的比例系数。 P 点的座标为:

$$x = R\alpha, \quad y = R\beta, \quad z = R\gamma \quad (1.9)$$

当 $\bar{l}^\circ$ 轴改变方位时, J_l 随之变化, R 亦随之变化, P 点在空间中的轨迹形成一封闭曲面。将式 (1.6) 两边乘以 R^2 , 得到:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 - 2Dyz - 2Ezx - 2Fxy = k^2 \quad (1.10)$$

上式即 P 点的轨迹方程。这是一个以 O 点为中心的椭球方程。此椭球称为刚体相对 O 点的惯性椭球, 见图 1.2, 它直观地表示出刚体对通过 O 点的所有轴的惯性矩分布情况。当 O 点的位置确

定以后，刚体对 O 点的惯性椭球就完全确定而与 (xyz) 坐标系的选取无关。转动 (xyz) 坐标系，方程 (1.10) 的各个系数随之改变，但所表示的椭球不变。令 (xyz) 的坐标轴与椭球的长轴和短轴相重合，使椭球方程具有最简单的形式：

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = k^2 \quad (1.11)$$

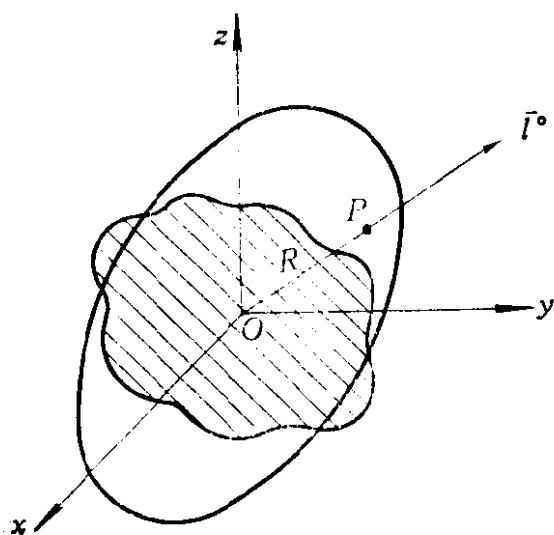


图1.2 刚体的惯性椭球

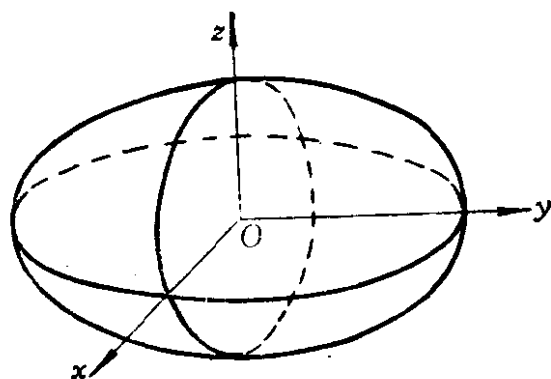


图1.3 刚体的主轴坐标系

在这个位置上 (xyz) 的三个坐标轴称为刚体的惯性主轴， (xyz) 称为主轴坐标系，见图 1.3。显然，刚体对惯性主轴的惯性积 D 、 E 、 F 都是零。刚体对于每个确定的 O 点都具有确定的惯性主轴，对不同的 O 点有不同的惯性椭球和惯性主轴。如果 O 为刚体的质心，则称为刚体的中心惯性椭球和中心惯性主轴。刚体对惯性主轴的惯性矩称为主惯性矩，刚体对中心惯性主轴的惯性矩称为中心主惯性矩。

对惯性主轴可归纳出以下性质：

1. 刚体相对各惯性主轴的惯性积为零。
2. 刚体相对椭球的短轴具有最大的惯性矩。
3. 刚体相对椭球的长轴具有最小的惯性矩。
4. 如刚体质量为轴对称分布，则惯性椭球为旋转椭球，其对称轴（称为形体轴或极轴）和垂直于极轴的赤道面内的任意轴

(称为赤道轴)都是惯性主轴。

5. 如刚体质量为球对称分布, 则惯性椭球变为圆球, 主轴的概念失去意义, 所有过 O 点的轴都可看作是主轴。

§ 1.2 刚体的动量矩定理

讨论有一固定点的刚体运动。令 O 为固定点, 刚体相对惯性空间的瞬时角速度为 $\bar{\omega}$, p 、 q 、 r 为 $\bar{\omega}$ 对 (xyz) 各坐标轴的投影,

$$\bar{\omega} = p\bar{i} + q\bar{j} + r\bar{k} \quad (1.12)$$

刚体中任一质点 m_i 的速度 $\bar{v}_i$ 可表示为:

$$\bar{v}_i = \frac{d\bar{r}_i}{dt} = \bar{\omega} \times \bar{r}_i \quad (1.13)$$

刚体相对 O 点的动量矩 $\bar{H}$ 定义为:

$$\bar{H} = \sum_i \bar{r}_i \times m_i \bar{v}_i \quad (1.14)$$

将式 (1.13) 代入上式:

$$\bar{H} = \bar{\omega} \sum_i m_i r_i^2 - \sum_i m_i \bar{r}_i (\bar{r}_i \cdot \bar{\omega}) \quad (1.15)$$

将式 (1.2)、(1.12) 代入后, 算出:

$$\bar{H} = H_x \bar{i} + H_y \bar{j} + H_z \bar{k} \quad (1.16)$$

$$\left. \begin{aligned} H_x &= Ap - Fq - Er \\ H_y &= -Fp + Bq - Dr \\ H_z &= -Ep - Dq + Cr \end{aligned} \right\} \quad (1.17)$$

如图 1.4 所示, 如果 (xyz) 是刚体的惯性主轴, 动量矩表达式简化为:

$$\bar{H} = Ap\bar{i} + Bq\bar{j} + Cr\bar{k} \quad (1.18)$$

刚体的动能 T 定义为:

$$2T = \sum_i m_i v_i^2 \quad (1.19)$$

将式 (1.13) 代入上式:

$$\begin{aligned}
 2T &= \sum_i m_i \bar{v}_i \cdot (\bar{\omega} \times \bar{r}_i) \\
 &= \bar{\omega} \cdot \sum_i \bar{r}_i \times m_i \bar{v}_i \\
 &= \bar{\omega} \cdot \bar{H} \quad (1.20)
 \end{aligned}$$

对于主轴坐标系, 动能表达式为:

$$2T = Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 \quad (1.21)$$

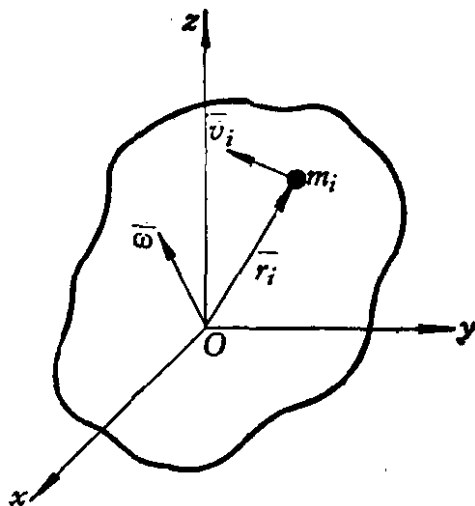


图1.4 刚体的动量矩

将动量矩式 (1.14) 两边对时间微分:

$$\frac{d\bar{H}}{dt} = \sum_i \frac{d\bar{r}_i}{dt} \times m_i \bar{v}_i + \sum_i \bar{r}_i \times m_i \frac{d\bar{v}_i}{dt} \quad (1.22)$$

右边第一项为零, 根据牛顿第二定律, 第二项中的 $m_i(d\bar{v}_i/dt)$ 可用 m_i 质点上作用的外力代替, 因此上式的右边可化作刚体上作用的外力对 O 点的合力矩, 以 $\bar{M}$ 表示。

$$\frac{d\bar{H}}{dt} = \bar{M} \quad (1.23)$$

式 (1.23) 称为刚体对固定点的动量矩定理。它说明刚体对固定点 O 的动量矩 $\bar{H}$ 对时间的变化率, 等于作用在刚体上的外力对 O 点的合力矩 $\bar{M}$ 。也可用另一种方式叙述为: 刚体对 O 点的动量矩 $\bar{H}$ 的矢量端点速度等于外力矩矢量 $\bar{M}$ 。设 (xyz) 为动坐标系, 按哥氏转动坐标定理, 动量矩定理可改写作:

$$\frac{d\bar{H}}{dt} = \frac{\tilde{d}\bar{H}}{dt} + \bar{\omega} \times \bar{H} = \bar{M} \quad (1.24)$$

*带波浪号的微分符号表示矢量对于动坐标系的变化率, $\bar{\omega}$ 为动坐标系相对惯性坐标系的转动角速度。令 M_x, M_y, M_z 为 $\bar{M}$ 对 (xyz) 各坐标轴的投影, 则式 (1.24) 的投影式为:

$$A \frac{dp}{dt} + (C - B)qr = M_x \quad (1.25 a)$$

$$B \frac{dq}{dt} + (A - C)rp = M_y \quad (1.25 b)$$

$$C \frac{dr}{dt} + (B - A)pq = M_z \quad (1.25 c)$$

称为刚体绕固定点运动的欧拉方程。

如果 O 点不是固定点而是刚体的质心, 则上述(1.23)、(1.24)、(1.25)各等式仍可适用, 称为刚体对质心的动量矩定理。

§ 1.3 欧拉-潘索运动

刚体上无任何外力矩作用的特殊情形称为欧拉情形。欧拉方程简化为:

$$A \frac{dp}{dt} + (C - B)qr = 0 \quad (1.26 a)$$

$$B \frac{dq}{dt} + (A - C)rp = 0 \quad (1.26 b)$$

$$C \frac{dr}{dt} + (B - A)pq = 0 \quad (1.26 c)$$

令: $(1.26 a) \times p + (1.26 b) \times q + (1.26 c) \times r$, 积出:

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = h \quad (1.27)$$

令: $(1.26 a) \times Ap + (1.26 b) \times Bq + (1.26 c) \times Cr$, 积出:

$$A^2 p^2 + B^2 q^2 + C^2 r^2 = H_0^2 \quad (1.28)$$

首次积分式(1.27)和式(1.28)具有明显的物理意义: 前者表明机械能守恒, 称为能量积分; 后者表明动量矩的模守恒, 称为动量矩积分。 h 、 H_0^2 等积分常数取决于运动的起始条件。

令 P 为刚体瞬时角速度 $\bar{\omega}$ 的矢量端点, 称为极点, $\overline{OP} = \bar{\omega}$ 。

P 点的座标为

$$x = p, \quad y = q, \quad z = r \quad (1.29)$$

将上式代入式(1.27)和式(1.28)得: