# 应用数学
# 例题演习

〔4〕

〔日〕 道胁义正 等著
郑毓德 陈文英 译
张朝池 校

南开大学出版社

# 应用数学例题演习〔4〕

向量·Fourier级数·Fourier积分

Laplace变换·特殊函数

〔日〕道胁义正　春海佳三郎　松浦省三　著

郑毓德　陈文英　译

张朝池　校

南开大学出版社

〔津〕新登字011号

**应用数学例题演习**

〔4〕

〔日〕道胁义正　春海佳三郎　松蒲省三　著

郑毓德　陈文英　译

南开大学出版社出版

（天津八里台南开大学校内）

邮政编码：300071　电话：3349318

新华书店天津发行所发行

河北省邮电印刷厂印刷

1994年1月第1版　1994年1月第1次印刷

开本：850×1168　1/32　印张：17.75　插页2

字数：445千　印数：1—2 000

ISBN 7-310-00556-2

O·72　定价：11.50元

# 前　言

本书在应用数学的向量、Fourier级数及Fourier积分、Laplace变换和特殊函数的范畴，可做为初学者的自学参考书. 具有高中毕业程度者也能看懂. 本书是讲解详细便于理解的演习书.

在代数及微积分的领域，面向初学者的参考书很多，作者们都有辅助自学的丰富经验. 而应用数学则是需要通过解题加深理解，因而必须树立信心. 现在应用数学在各个领域中的应用不断深入，不论是理工科大专院校的学生，还是一般的科技工作者，都需要掌握这个工具. 考虑到作为学生及科技工作者的参考书，作者以下面几点为指导思想：

1. 由于本书的基本内容在例题中进行了证明，自学很方便.

2. 在各小节中，均提出了基础理论，并有证明基础理论的例题，以便明了要点.

3. 相同类型的例题归纳在一起.

4. 本书中的例题大多数易于理解，有助于树立学习信心.

5. 实际问题具体化以后，有时反而不易理解. 为减少这种现象，尽量选择单纯的问题，以便易于理解数学方法.

6. 本书还包括了对理工科学生必不可少的一些较深的问题：

(i)在向量方面，有很多Frenet-Serret公式型的几何学方面的问题.

(ii)在Fourier级数和积分一章中，加上了Riemann-Lebesgue定理、Fourier级数收敛、Fourier级数的逐项积分、Fourier积分定理、Fourier积分的Parseval等式、卷积定理等.

(iii)在Laplace变换中加上了Heaviside展开定理、合成法则

等. 在这章中把函数论的留数定理做为必要的知识.

(iv)在特殊函数中加上了物理、工科所必需的Hermite、Laguerre、Tschebyscheff等正交函数.

昭和46年6月

著　　者

# 目　　录

## 6 向 量

# 6 向　量

## 6.1　向量代数

### 6.1.1　向量的性质

**基础理论**

**1.　相等向量**

若两个向量$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$的长度、方向（包括指向）都相同，则称向量$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{B}$是相等的，并记作

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}. \tag{1}$$

**2.　向量的模，单位向量**

向量$\boldsymbol{A}$的长度称为向量$\boldsymbol{A}$的模，记作 $|\boldsymbol{A}|$ 或$A$.

把与向量$\boldsymbol{A}$方向相同的单位长度的向量记作$\boldsymbol{a}_0$，称$\boldsymbol{a}_0$为$\boldsymbol{A}$方向的单位向量.

$$\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\,\boldsymbol{a}_0. \tag{2}$$

**3.　向量和**

两个向量$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$的和记作$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$.

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A},\quad \boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}. \tag{3}$$

**4.　向量的差**

与$\boldsymbol{B}$的大小相等，方向相反的向量，记作$-\boldsymbol{B}$. 称向量和$\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{B})$为$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{B}$的差，记作$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$.

**5.　向量与数量的积**

向量$\boldsymbol{A}$与数量$\alpha$的积$\alpha\boldsymbol{A}$仍是一个向量．当$\alpha$为正数时，$\alpha\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{A}$方向相同，模是$\boldsymbol{A}$的$\alpha$倍；当$\alpha$为负数时，$\alpha\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{A}$方向相反，模是$\boldsymbol{A}$的$|\alpha|$倍.

6. **基本向量**

$x,y,z$轴的正向单位向量称为**基本向量**，以$\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$表示.

7. **向量的分量**

任意向量$\boldsymbol{A}$都可用$x,y,z$方向的三个向量的和表示：

$$\boldsymbol{A}=A_x\boldsymbol{i}+A_y\boldsymbol{j}+A_z\boldsymbol{k}, \quad (4)$$

其中$A_x,A_y,A_z$分别称为向量$\boldsymbol{A}$的$x,y,z$方向的投影. $\boldsymbol{A}$表示为$\{A_x,A_y,A_z\}$。向量$\boldsymbol{A}$的大小可用其$x,y,z$方向的投影表示为

$$|\boldsymbol{A}|=\sqrt{A_x^2+A_y^2+A_z^2} \quad (5)$$

8. **向量的方向余弦**

向量$\boldsymbol{A}$与$x,y,z$轴的正向所构成的角分别记为$\alpha,\beta,\gamma$，其余弦

$$l=\cos\alpha=A_x/|A|,\ m=\cos\beta=A_y/|A|,\ n=\cos\gamma=A_z/|A| \quad (6)$$

称为向量$\boldsymbol{A}$的方向余弦.

9. **位置向量**

$$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k} \quad (7)$$

称为点$(x,y,z)$的**位置向量**.

10. **零向量**

大小为零的向量称为**零向量**，记作$\boldsymbol{A}=0$.

如果 $\boldsymbol{A}=0$，则$A_x=0$，$A_y=0$．$A_z=0$.

## 例题演习

**例题1** 设$\boldsymbol{A}=3\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}-12\boldsymbol{k},\boldsymbol{B}=\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k},\boldsymbol{C}=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+6\boldsymbol{k}$，求下列各值：

(i) $|\boldsymbol{A}|$；

(ii) $|\boldsymbol{B}|$；

(iii)向量$\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{B}-2\boldsymbol{C}$的模和它的方向上的单位向量；

(iv)向量$2\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C}$的模和它的方向上的单位向量.

**解答** (i) $|\boldsymbol{A}|=\sqrt{3^2+4^2+12^2}=13.$

(ii) $|\boldsymbol{B}|=\sqrt{1^2+2^2+2^2}=3.$

(iii) $\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{B}-2\boldsymbol{C}=4\boldsymbol{i}-6\boldsymbol{j}-18\boldsymbol{k}.$

$|\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{B}-2\boldsymbol{C}|=\sqrt{4^2+6^2+18^2}=2\sqrt{94}.$

$(2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}-9\boldsymbol{k})/\sqrt{94}.$

(iv) $2\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C}=2\boldsymbol{i}+12\boldsymbol{j}-36\boldsymbol{k}.$

$|2\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C}|=38.$

$(\boldsymbol{i}+6\boldsymbol{j}-18\boldsymbol{k})/19.$

**例题2** 求由点$P(x_1,y_1,z_1)$至点$Q(x_2,y_2,z_2)$的向量及其大小.

**解答** $\overrightarrow{OP}=x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k}$, $\overrightarrow{OQ}=x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k}$,

$\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PQ}$,

因此

$$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}=(x_2-x_1)\boldsymbol{i}+(y_2-y_1)\boldsymbol{j}+(z_2-z_1)\boldsymbol{k}.$$

$\overrightarrow{PQ}$的大小是

$$|\overrightarrow{PQ}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

**例题3** 点$P,Q$的位置向量分别为$4\boldsymbol{i}+6\boldsymbol{j}-5\boldsymbol{k}$, $8\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+6\boldsymbol{k}$, 求向量$\overrightarrow{PQ}$的模及其方向余弦.

**解答** 由 $\overrightarrow{PQ}=4\boldsymbol{i}-5\boldsymbol{j}+11\boldsymbol{k}$, 知模$|\overrightarrow{PQ}|=\sqrt{4^2+5^2+11^2}$ $=9\sqrt{2}$; 而方向余弦为 $4/9\sqrt{2}$, $-5/9\sqrt{2}$, $11/9\sqrt{2}$.

**例题4** 求证连接三角形两边中点的线段平行于第三边，其长度是第三边的一半.

**解答** 在图6.1的$\triangle ABC$的各边上规定$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{A}$, $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{B}$, $\overrightarrow{BA}=\boldsymbol{C}$, 则有

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{C}+\boldsymbol{B}.$$

连接$AB$的中点$D$和$AC$的中点$E$的线段，$\overrightarrow{DE}=\boldsymbol{D}$，则

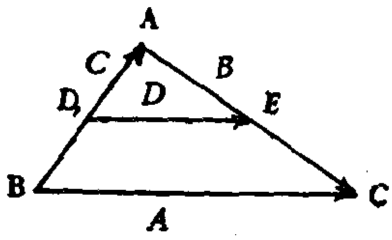


图6.1

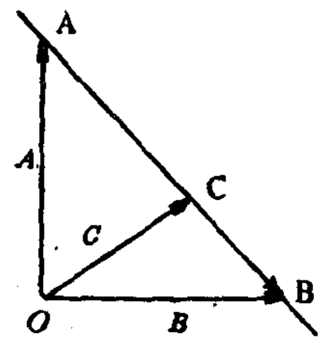


图6·2

$$\boldsymbol{D}=\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AE}=\boldsymbol{C}/2+\boldsymbol{B}/2=\boldsymbol{A}/2.$$

因此$\overrightarrow{DE}$平行于$\overrightarrow{BC}$，长度是其1/2.

**例题5** 从原点至$A$，$B$两点的向量分别设为$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$. 证明把线段$AB$内分为$m:n$的点$C$的位置向量是$(n\boldsymbol{A}+m\boldsymbol{B})/(m+n)$. 特别地，$AB$的中点的位置向量是$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})/2$.

**解答** 图6.2中设向量$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{C}$.

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}.$$

$$AC:CB=m:n.$$

于是

$$\overrightarrow{AC}=\frac{m}{m+n}(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}),$$

$$\boldsymbol{C}=\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{A}+\frac{m}{m+n}(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A})$$

$$=(n\boldsymbol{A}+m\boldsymbol{B})/(m+n).$$

若$C$为中点，则$m:n=1:1$于是

$$\boldsymbol{C}=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})/2.$$

**例题6** 设从原点至$A$，$B$两点的向量分别为$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$. 求证过$A$，$B$的直线由位置向量$\boldsymbol{r}=(1-\lambda)\boldsymbol{A}+\lambda\boldsymbol{B}$表出，其中$\lambda$是任意实数.

**解答** 如图6.3所示$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}$. $\overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{AB}$.（若$C$在$BA$之间，则$0<\lambda<1$；若$C$在直线上，且在点$A$的外边，则$\lambda<0$，若

在点$B$的外边，则$1<\lambda$. ）

$$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{A}+\lambda(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A})$$

$$=(1-\lambda)\boldsymbol{A}+\lambda\boldsymbol{B}.$$

**例题7** 用向量证明平行四边形的对角线互相平分.

**解答** 在图6.4中，设平行四边形$ABCD$的对角线$BD$的中点为$E$. 令$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{A}$，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{B}$. 根据例题5，

$$\overrightarrow{AE}=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})/2.$$

因为$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$，所以，$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AC}/2$. 由此得知$E$是$AC$的中点. 因此$E$是$BD$的中点，同时也是$AC$的中点. 故对角线互相平分.

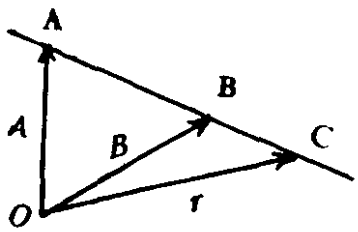


图6．3

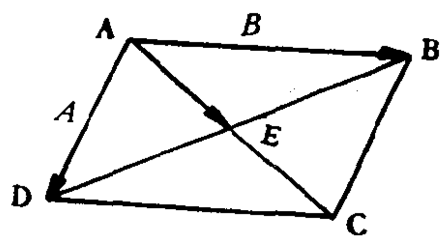


图6．4

**例题8** 设三角形的三个顶点$A$，$B$，$C$的位置向量分别为$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$. 求$\triangle ABC$的重心位置.

**解答** 在图6.5中，设$\triangle ABC$的边$AB$的中点为$D$，其位置向量为$\boldsymbol{D}$. 于是

$$\boldsymbol{D}=\overrightarrow{OD}=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})/2.$$

又设重心为$G$. $G$是在$CD$上，使$DG:GC=1:2$的点. 由例题5得到重心$G$的位置向量$\boldsymbol{G}$，

$$\boldsymbol{G}=(2\boldsymbol{D}+\boldsymbol{C})/(1+2)=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})/3.$$

**例题9** 三角形的中线相交于一点. 证明此点是把各中线分为三等分的点.

**解答** 如图6.6设$A$，$B$，$C$的位置向量分别为$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$，三边$AB$，$BC$，$CA$的中点为$D$，$E$，$F$，其各自的位置向量为$\boldsymbol{D}$，$\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{F}$，则

$$\boldsymbol{D}=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})/2,\ \boldsymbol{E}=(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})/2,\ \boldsymbol{F}=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{C})/2,$$

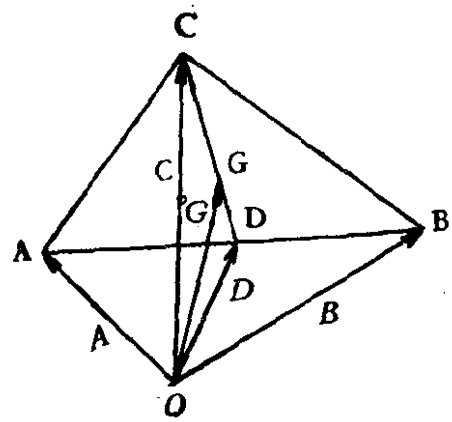


图6. 5

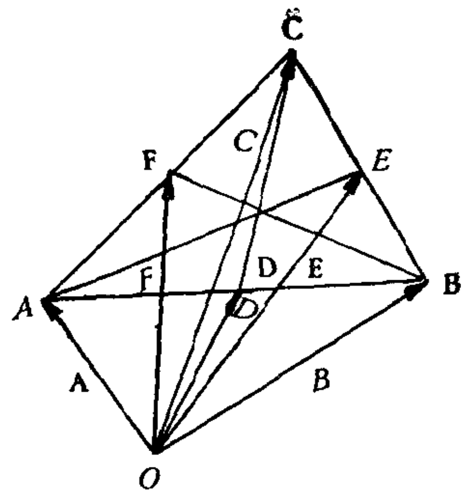


图6. 6

由例题6，线段$AE$，$BF$，$CD$分别可用其点的位置向量表示为如下形式:

$$\boldsymbol{r}_1=\boldsymbol{A}+\lambda\left(\frac{\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}}{2}-\boldsymbol{A}\right),$$

$$\boldsymbol{r}_2=\boldsymbol{B}+\mu\left(\frac{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{C}}{2}-\boldsymbol{B}\right),$$

$$\boldsymbol{r}_3=\boldsymbol{C}+\nu\left(\frac{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}}{2}-\boldsymbol{C}\right),$$

其中$\lambda$，$\mu$，$\nu$为任意实数，且$0\leqslant\lambda,\mu,\nu\leqslant 1$.

所以，$\overrightarrow{AE}$和$\overrightarrow{BF}$的交点由

$$\boldsymbol{A}+\lambda\left(\frac{\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}}{2}-\boldsymbol{A}\right)=\boldsymbol{B}+\mu\left(\frac{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{C}}{2}-\boldsymbol{B}\right)$$

得出. 要使以上恒等式成立，必须选择$\lambda$，$\mu$使

$$\left(1-\lambda-\frac{\mu}{2}\right)\boldsymbol{A}+\left(\frac{\lambda}{2}-1-\mu\right)\boldsymbol{B}+\left(\frac{\lambda}{2}-\frac{\mu}{2}\right)\boldsymbol{C}=0.$$

于是

$$\lambda=\mu=2/3.$$

从而，交点$G$的位置向量

$$\boldsymbol{G}=\boldsymbol{A}+\frac{2}{3}\left(\frac{\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}}{2}-\boldsymbol{A}\right)=\frac{1}{3}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}).$$

同样$\overrightarrow{BF}$和$\overrightarrow{CD}$的交点的位置向量也是$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})/3$．可见$\overrightarrow{AE}$，$\overrightarrow{BF}$，$\overrightarrow{CD}$相交于点$G$．

又因$\lambda=\mu=\nu=2/3$，由此得出$G$是各中线的三等分点．

**例题10**　证明在平行四边形中，顶点与对边中点的连线和对角线互相分为三等分．

**解答**　在图6.7中，设顶点$A$，$B$，$C$的位置向量分别为$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$．于是

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}=\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A},\qquad \overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{C}-\boldsymbol{B}.$$

设$DC$的中点为$E$，则

$$\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{EC}=\boldsymbol{C}-\boldsymbol{B}-(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A})/2=(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{B}+2\boldsymbol{C})/3,$$

又知$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{C}-\boldsymbol{A}$．设$AC$与$BE$的交点为$\boldsymbol{F}$，有$\overrightarrow{BF}=\lambda\overrightarrow{BE}$，$\overrightarrow{AF}=\mu\overrightarrow{AC}$．点$F$使

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OF}&=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BE}=\boldsymbol{B}+\lambda(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{B}+2\boldsymbol{C})/2\\&=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AF}=\boldsymbol{A}+\mu(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{A}).\end{aligned}$$

要使以上等式成立，必须选择$\lambda$，$\mu$使

$$\left(\frac{\lambda}{2}-1+\mu\right)\boldsymbol{A}+\left(1-\frac{3}{2}\lambda\right)\boldsymbol{B}+(\lambda-\mu)\boldsymbol{C}=0.$$

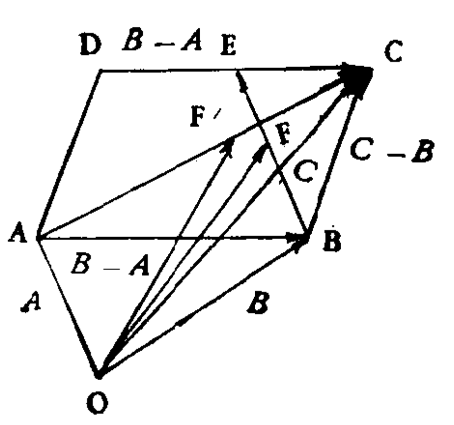


图6．7

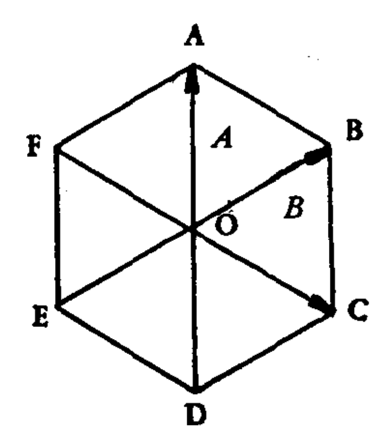


图6．8

于是$\lambda=\mu=2/3$. 因此$BE$和$AC$相交并互为三等分.

**例题11** $ABCDEF$是正六边形，$O$是其中心. 试以$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{A}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{B}$表示向量$\overrightarrow{CF}$，$\overrightarrow{CE}$.

**解答** 如图6.8所示，

$$\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OA}=-\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A},$$

$$\overrightarrow{CF}=2\overrightarrow{BA}=2(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}).$$

此外

$$\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{CF}+\overrightarrow{FE}=2(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})-\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{B}.$$

**例题12** 如图6.9所示，$ABCDPQRS$是以$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{A}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{B}$，$\overrightarrow{AP}=\boldsymbol{C}$为三棱的平行六面体. $X$，$Y$分别是$QR$，$CD$的中点. 试以$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$表出$\overrightarrow{XY}$.

**解答** $\overrightarrow{XY}=\overrightarrow{XR}+\overrightarrow{RC}+\overrightarrow{CY}=\frac{1}{2}\boldsymbol{B}+(-\boldsymbol{C})+\left(-\frac{1}{2}\boldsymbol{A}\right)$

$$=\frac{1}{2}(\boldsymbol{B}-2\boldsymbol{C}-\boldsymbol{A}).$$

**例题13** 以正方形$ABCD$为底的锥形$V—ABCD$的顶点为$V$，$ABCD$的中心为$O$. 试用$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{A}$，$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{B}$，$OV=\boldsymbol{H}$表出四个斜边向量.

**解答** $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$，$\overrightarrow{AO}=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})/2$，$\overrightarrow{CO}=-(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})/2$.

又知$\overrightarrow{BD}=(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A})$. 因此

$$\overrightarrow{BO}=(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A})/2,\qquad \overrightarrow{DO}=-(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A})/2.$$

于是得到

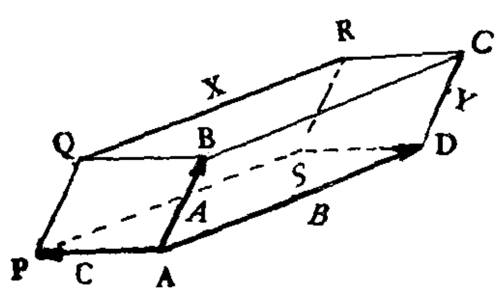


图6．9