

应用数学 例题演习

〔4〕

〔日〕 道胁义正 等著
郑毓德 陈文英 译
张朝池 校

南开大学出版社

应用数学例题演习〔4〕

向量 · Fourier级数 · Fourier积分

Laplace变换 · 特殊函数

〔日〕道胁义正 春海佳三郎 松浦省三 著

郑毓德 陈文英 译

张朝池 校

南开大学出版社

[津] 新登字011号

应用数学例题演习

(4)

(日)道胁义正 春海佳三郎 松蒲省三 著
郑毓德 陈文英 译

南开大学出版社出版

(天津八里台南开大学校内)

邮政编码: 300071 电话: 3349318

新华书店天津发行所发行

河北省邮电印刷厂印刷

1994年1月第1版 1994年1月第1次印刷

开本: 850×1168 1/32 印张: 17.75 插页2

字数: 445千 印数: 1—2 000

ISBN 7-310-00556-2

O·72 定价: 11.50元

TU11-44/22
前言

本书在应用数学的向量、Fourier级数及Fourier积分、Laplace变换和特殊函数的范畴，可做为初学者的自学参考书。具有高中毕业程度者也能看懂。本书是讲解详细便于理解的演习书。

在代数及微积分的领域，面向初学者的参考书很多，作者们都有辅助自学的丰富经验。而应用数学则是需要通过解题加深理解，因而必须树立信心。现在应用数学在各个领域中的应用不断深入，不论是理工科大专院校的学生，还是一般的科技工作者，都需要掌握这个工具。考虑到作为学生及科技工作者的参考书，作者下面几点为指导思想：

1. 由于本书的基本内容在例题中进行了证明，自学很方便。
2. 在各小节中，均提出了基础理论，并有证明基础理论的例题，以便明了要点。
3. 相同类型的例题归纳在一起。
4. 本书中的例题大多数易于理解，有助于树立学习信心。
5. 实际问题具体化以后，有时反而不易理解。为减少这种现象，尽量选择单纯的问题，以便易于理解数学方法。
6. 本书还包括了对理工科学生必不可少的一些较深的问题：

(i)在向量方面，有很多Frenet-Serret公式型的几何学方面的问题。

(ii)在Fourier级数和积分一章中，加上了Riemann-Lebesgue定理、Fourier级数收敛、Fourier级数的逐项积分、Fourier积分定理、Fourier积分的Parseval等式、卷积定理等。

(iii)在Laplace变换中加上了Heaviside展开定理、合成法则

等. 在这章中把函数论的留数定理做为必要的知识.

(iv)在特殊函数中加上了物理、工科所必需的 Hermite、Laguerre、Tschebyscheff等正交函数.

昭和46年6月

著 者

目 录

6 向 量

6.1 向量代数

6.1.1 向量的性质 (1)

 基础理论 (1)

 例题演习 (2)

6.1.2 向量的数量积 (内积) (10)

 基础理论 (10)

 例题演习 (10)

6.1.3 向量的向量积 (外积) (13)

 基础理论 (13)

 例题演习 (13)

6.1.4 向量的三重积 (17)

 基础理论 (17)

 例题演习 (18)

6.2 向量的微分和微分运算 (27)

6.2.1 向量的微分 (27)

 基础理论 (27)

 例题演习 (30)

6.2.2 纯量的梯度与微分算子 (37)

 基础理论 (37)

 例题演习 (38)

6.2.3 向量的散度 (43)

 基础理论 (43)

例题演习	(44)
6.2.4 向量的旋度	(47)
基础理论	(47)
例题演习	(48)
6.2.5 Laplace算子	(54)
基础理论	(54)
例题演习	(55)
6.3 向量积分	(59)
6.3.1 向量的线积分和面积分	(59)
基础理论	(59)
例题演习	(62)
6.3.2 Gauss定理及其应用	(68)
基础理论	(68)
例题演习	(69)
6.3.3 Green定理与Green公式	(75)
基础理论	(75)
例题演习	(76)
6.3.4 Stokes定理及其应用	(80)
基础理论	(80)
例题演习	(81)
 7 Fourier级数和Fourier 积分.....	(95)
7.1 Fourier级数.....	(95)
基础理论	(95)
例题演习	(99)
7.2 Fourier积分和Fourier变换	(165)
基础理论	(165)
例题演习	(169)

7.3	偏微方程的应用	(199)
	基础理论	(199)
	例题演习	(202)
8	Laplace变换	(231)
8.1	Laplace变换	(231)
	基础理论	(231)
	例题演习	(233)
8.2	Laplace逆变换	(266)
	基础理论	(266)
8.3	Laplace变换表	(268)
	例题演习	(269)
8.4	Laplace变换的应用	(318)
	基础理论	(318)
	例题演习	(320)
9	特殊函数	(368)
9.1	Γ 函数和B函数	(368)
	9.1.1 Γ 函数	(368)
	基础理论	(368)
	例题演习	(370)
	9.1.2 B函数	(393)
	基础理论	(393)
	例题演习	(395)
9.2	Bessel函数(柱函数)	(412)
	基础理论	(412)
	例题演习	(421)

9.3	Legendre函数	(461)
	基础理论	(461)
	例题演习	(465)
9.4	Legendre伴随函数	(492)
	基础理论	(492)
	例题演习	(496)
9.5	其它的正交多项式	(515)
9.5.1	Hermite多项式	(515)
	基础理论	(515)
	题例演习	(518)
9.5.2	Laguerre多项式	(526)
	基础理论	(526)
	例题演习	(528)
9.5.3	Laguerre伴随多项式	(535)
	基础理论	(535)
	例题演习	(537)
9.5.4	Tschebyscheff多项式	(545)
	基础理论	(545)
	例题演习	(547)
	译后记	(559)

6 向 量

6.1 向量代数

6.1.1 向量的性质

基础理论

1. 相等向量

若两个向量 A , B 的长度、方向(包括指向)都相同, 则称向量 A 和 B 是相等的, 并记作

$$A=B. \quad (1)$$

2. 向量的模, 单位向量

向量 A 的长度称为向量 A 的模, 记作 $|A|$ 或 A .

把与向量 A 方向相同的单位长度的向量记作 a_0 , 称 a_0 为 A 方向的单位向量.

$$A=|A| a_0. \quad (2)$$

3. 向量和

两个向量 A , B 的和记作 $A+B$.

$$A+B=B+A, \quad A+(B+C)=(A+B)+C. \quad (3)$$

4. 向量的差

与 B 的大小相等, 方向相反的向量, 记作 $-B$. 称向量和 $A+(-B)$ 为 A 和 B 的差, 记作 $A-B$.

5. 向量与数量的积

向量 $\mathbf{A}$ 与数量 α 的积 $\alpha\mathbf{A}$ 仍是一个向量. 当 α 为正数时, $\alpha\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{A}$ 方向相同, 模是 $\mathbf{A}$ 的 α 倍; 当 α 为负数时, $\alpha\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{A}$ 方向相反, 模是 $\mathbf{A}$ 的 $|\alpha|$ 倍.

6. 基本向量

x, y, z 轴的正向单位向量称为基本向量, 以 $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ 表示.

7. 向量的分量

任意向量 $\mathbf{A}$ 都可用 x, y, z 方向的三个向量的和表示:

$$\mathbf{A} = A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k}, \quad (4)$$

其中 A_x, A_y, A_z 分别称为向量 $\mathbf{A}$ 的 x, y, z 方向的投影. $\mathbf{A}$ 表示为 $\{A_x, A_y, A_z\}$. 向量 $\mathbf{A}$ 的大小可用其 x, y, z 方向的投影表示为

$$|\mathbf{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \quad (5)$$

8. 向量的方向余弦

向量 $\mathbf{A}$ 与 x, y, z 轴的正向所构成的角分别记为 α, β, γ , 其余弦

$$l = \cos \alpha = A_x / |\mathbf{A}|, m = \cos \beta = A_y / |\mathbf{A}|, n = \cos \gamma = A_z / |\mathbf{A}| \quad (6)$$

称为向量 $\mathbf{A}$ 的方向余弦.

9. 位置向量

$$\mathbf{r} = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k} \quad (7)$$

称为点 (x, y, z) 的位置向量.

10. 零向量

大小为零的向量称为零向量, 记作 $\mathbf{A} = \mathbf{0}$.

如果 $\mathbf{A} = \mathbf{0}$, 则 $A_x = 0, A_y = 0, A_z = 0$.

例题演习

例题1 设 $\mathbf{A} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 12\mathbf{k}, \mathbf{B} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}, \mathbf{C} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$, 求下列各值:

(i) $|\mathbf{A}|$;

(ii) $|\mathbf{B}|$;

(iii) 向量 $\mathbf{A} + 3\mathbf{B} - 2\mathbf{C}$ 的模和它的方向上的单位向量;

(iv) 向量 $2\mathbf{A} - 3\mathbf{B} - \mathbf{C}$ 的模和它的方向上的单位向量.

解答 (i) $|A| = \sqrt{3^2 + 4^2 + 12^2} = 13.$

(ii) $|B| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = 3.$

(iii) $A + 3B - 2C = 4i - 6j - 18k.$

$$|A + 3B - 2C| = \sqrt{4^2 + 6^2 + 18^2} = 2\sqrt{94}.$$

$$(2i - 3j - 9k)/\sqrt{94}.$$

(iv) $2A - 3B - C = 2i + 12j - 36k.$

$$|2A - 3B - C| = 38.$$

$$(i + 6j - 18k)/19.$$

例题2 求由点 $P(x_1, y_1, z_1)$ 至点 $Q(x_2, y_2, z_2)$ 的向量及其大小.

解答 $\overrightarrow{OP} = x_1i + y_1j + z_1k, \quad \overrightarrow{OQ} = x_2i + y_2j + z_2k,$

$$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ},$$

因此

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = (x_2 - x_1)i + (y_2 - y_1)j + (z_2 - z_1)k.$$

$\overrightarrow{PQ}$ 的大小是

$$|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

例题3 点 P, Q 的位置向量分别为 $4i + 6j - 5k, 8i + j + 6k$, 求向量 $\overrightarrow{PQ}$ 的模及其方向余弦.

解答 由 $\overrightarrow{PQ} = 4i - 5j + 11k$, 知模 $|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{4^2 + 5^2 + 11^2} = 9\sqrt{2}$; 而方向余弦为 $4/9\sqrt{2}, -5/9\sqrt{2}, 11/9\sqrt{2}$.

例题4 求证连接三角形两边中点的线段平行于第三边, 其长度是第三边的一半.

解答 在图6.1的 $\triangle ABC$ 的各边上规定 $\overrightarrow{BC} = A, \overrightarrow{AC} = B, \overrightarrow{BA} = C$, 则有

$$A = C + B.$$

连接 AB 的中点 D 和 AC 的中点 E 的线段, $\overrightarrow{DE} = D$, 则

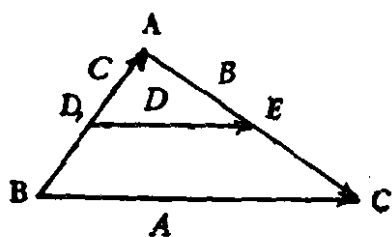


图6.1

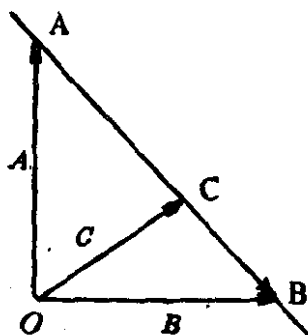


图6.2

$$\vec{D} = \vec{DE} = \vec{DA} + \vec{AE} = \vec{C}/2 + \vec{B}/2 = \vec{A}/2.$$

因此 $\vec{DE}$ 平行于 $\vec{BC}$ ，长度是其1/2.

例题5 从原点至 A, B 两点的向量分别设为 $\vec{A}, \vec{B}$. 证明把线段 AB 内分为 $m:n$ 的点 C 的位置向量是 $(n\vec{A} + m\vec{B})/(m+n)$. 特别地， AB 的中点的位置向量是 $(\vec{A} + \vec{B})/2$.

解答 图6.2中设向量 $\vec{OC} = \vec{C}$.

$$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = \vec{B} - \vec{A}.$$

$$AC:CB = m:n.$$

于是

$$\vec{AC} = \frac{m}{m+n}(\vec{B} - \vec{A}),$$

$$\vec{C} = \vec{OC} = \vec{OA} + \vec{AC} = \vec{A} + \frac{m}{m+n}(\vec{B} - \vec{A})$$

$$= (n\vec{A} + m\vec{B})/(m+n).$$

若 C 为中点，则 $m:n = 1:1$ 于是

$$\vec{C} = (\vec{A} + \vec{B})/2.$$

例题6 设从原点至 A, B 两点的向量分别为 $\vec{A}, \vec{B}$. 求证过 A, B 的直线由位置向量 $\vec{r} = (1-\lambda)\vec{A} + \lambda\vec{B}$ 表出，其中 λ 是任意实数.

解答 如图6.3所示 $\vec{AB} = \vec{B} - \vec{A}$. $\vec{AC} = \lambda\vec{AB}$. (若 C 在 BA 之间，则 $0 < \lambda < 1$; 若 C 在直线上，且在点 A 的外边，则 $\lambda < 0$ ，若

在点B的外边, 则 $1 < \lambda$.)

$$\begin{aligned}\vec{r} &= \vec{OC} = \vec{OA} + \vec{AC} = \vec{A} + \lambda(\vec{B} - \vec{A}) \\ &= (1 - \lambda)\vec{A} + \lambda\vec{B}.\end{aligned}$$

例题7 用向量证明平行四边形的对角线互相平分.

解答 在图6.4中, 设平行四边形ABCD的对角线BD的中点为E. 令 $\vec{AD} = \vec{A}$, $\vec{AB} = \vec{B}$. 根据例题5,

$$\vec{AE} = (\vec{A} + \vec{B})/2.$$

因为 $\vec{AC} = \vec{A} + \vec{B}$, 所以, $\vec{AE} = \vec{AC}/2$. 由此得知E是AC的中点. 因此E是BD的中点, 同时也是AC的中点. 故对角线互相平分.

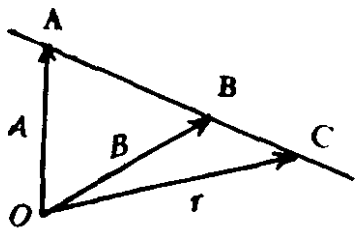


图6.3

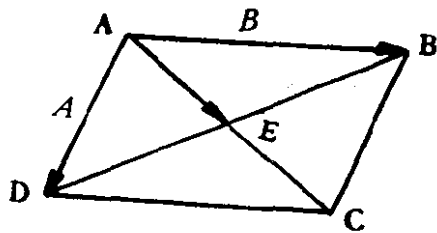


图6.4

例题8 设三角形的三个顶点A, B, C的位置向量分别为 $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$. 求 $\triangle ABC$ 的重心位置.

解答 在图6.5中, 设 $\triangle ABC$ 的边AB的中点为D, 其位置向量为 $\vec{D}$. 于是

$$\vec{D} = \vec{OD} = (\vec{A} + \vec{B})/2.$$

又设重心为G. G是在CD上, 使 $DG:GC = 1:2$ 的点. 由例题5得到重心G的位置向量 $\vec{G}$,

$$\vec{G} = (2\vec{D} + \vec{C})/(1+2) = (\vec{A} + \vec{B} + \vec{C})/3.$$

例题9 三角形的中线相交于一点. 证明此点是把各中线分为三等分的点.

解答 如图6.6设A, B, C的位置向量分别为 $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$, 三边AB, BC, CA的中点为D, E, F, 其各自的位置向量为 $\vec{D}$, $\vec{E}$, $\vec{F}$, 则

$$\vec{D} = (\vec{A} + \vec{B})/2, \vec{E} = (\vec{B} + \vec{C})/2, \vec{F} = (\vec{A} + \vec{C})/2,$$

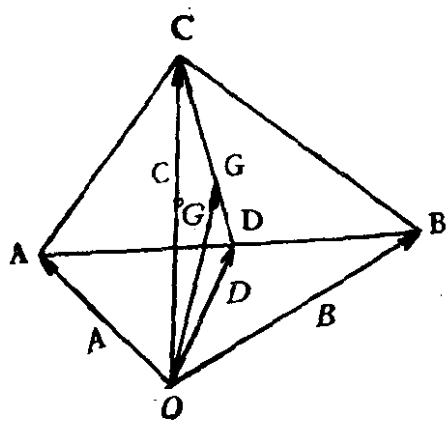


图6. 5

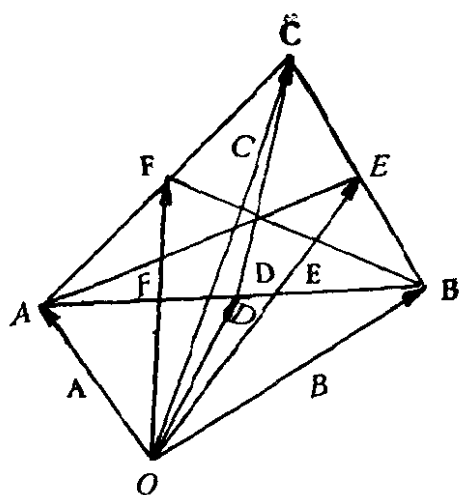


图6. 6

由例题6，线段 AE ， BF ， CD 分别可用其点的位置向量表示为如下形式：

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{A} + \lambda \left(\frac{\mathbf{B} + \mathbf{C}}{2} - \mathbf{A} \right),$$

$$\mathbf{r}_2 = \mathbf{B} + \mu \left(\frac{\mathbf{A} + \mathbf{C}}{2} - \mathbf{B} \right),$$

$$\mathbf{r}_3 = \mathbf{C} + \nu \left(\frac{\mathbf{A} + \mathbf{B}}{2} - \mathbf{C} \right),$$

其中 λ ， μ ， ν 为任意实数，且 $0 \leq \lambda, \mu, \nu \leq 1$ 。

所以， $\overrightarrow{AE}$ 和 $\overrightarrow{BF}$ 的交点由

$$\mathbf{A} + \lambda \left(\frac{\mathbf{B} + \mathbf{C}}{2} - \mathbf{A} \right) = \mathbf{B} + \mu \left(\frac{\mathbf{A} + \mathbf{C}}{2} - \mathbf{B} \right)$$

得出。要使以上恒等式成立，必须选择 λ ， μ 使

$$\left(1 - \lambda - \frac{\mu}{2} \right) \mathbf{A} + \left(\frac{\lambda}{2} - 1 - \mu \right) \mathbf{B} + \left(\frac{\lambda}{2} - \frac{\mu}{2} \right) \mathbf{C} = \mathbf{0}.$$

于是

$$\lambda = \mu = \frac{2}{3}.$$

从而，交点 G 的位置向量

$$\mathbf{G} = \mathbf{A} + \frac{2}{3} \left(\frac{\mathbf{B} + \mathbf{C}}{2} - \mathbf{A} \right) = \frac{1}{3} (\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C}).$$

同样 $\overrightarrow{BF}$ 和 $\overrightarrow{CD}$ 的交点的位置向量也是 $(\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C})/3$. 可见 $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{BF}$, $\overrightarrow{CD}$ 相交于点 G .

又因 $\lambda = \mu = \nu = 2/3$, 由此得出 G 是各中线的三等分点.

例题10 证明在平行四边形中, 顶点与对边中点的连线和对角线互相分为三等分.

解答 在图6.7中, 设顶点 A, B, C 的位置向量分别为 $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$. 于是

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = \mathbf{B} - \mathbf{A}, \quad \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} = \mathbf{C} - \mathbf{B}.$$

设 DC 的中点为 E , 则

$$\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{EC} = \mathbf{C} - \mathbf{B} - (\mathbf{B} - \mathbf{A})/2 = (\mathbf{A} - 3\mathbf{B} + 2\mathbf{C})/3,$$

又知 $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \mathbf{C} - \mathbf{A}$. 设 AC 与 BE 的交点为 F , 有 $\overrightarrow{BF} = \lambda \overrightarrow{BE}$, $\overrightarrow{AF} = \mu \overrightarrow{AC}$. 点 F 使

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OF} &= \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BF} = \mathbf{B} + \lambda(\mathbf{A} - 3\mathbf{B} + 2\mathbf{C})/2 \\ &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AF} = \mathbf{A} + \mu(\mathbf{C} - \mathbf{A}). \end{aligned}$$

要使以上等式成立, 必须选择 λ, μ 使

$$\left(\frac{\lambda}{2} - 1 + \mu \right) \mathbf{A} + \left(1 - \frac{3}{2}\lambda \right) \mathbf{B} + (\lambda - \mu) \mathbf{C} = \mathbf{0}.$$

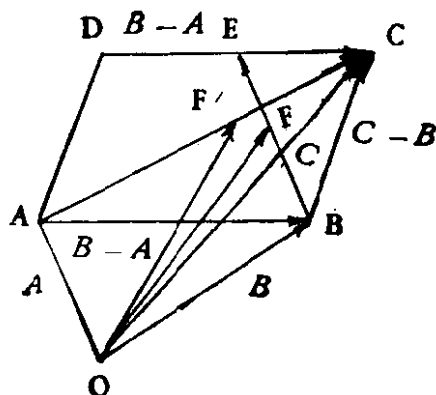


图6.7

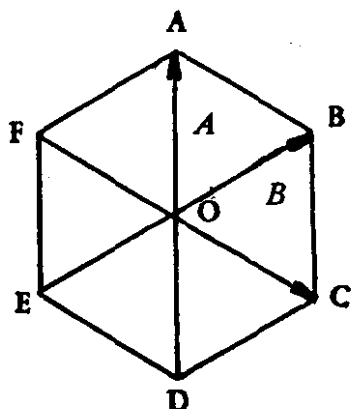


图6.8

于是 $\lambda=\mu=2/3$. 因此 BE 和 AC 相交并互为三等分.

例题11 $ABCDEF$ 是正六边形, O 是其中心. 试以 $\vec{OA}=\mathbf{A}$, $\vec{OB}=\mathbf{B}$ 表示向量 $\vec{CF}$, $\vec{CE}$.

解答 如图6.8所示,

$$\vec{BA} = \vec{BO} + \vec{OA} = -\mathbf{B} + \mathbf{A},$$

$$\vec{CF} = 2\vec{BA} = 2(\mathbf{A} - \mathbf{B}).$$

此外

$$\vec{CE} = \vec{CF} + \vec{FE} = 2(\mathbf{A} - \mathbf{B}) - \mathbf{A} = \mathbf{A} - 2\mathbf{B}.$$

例题12 如图6.9所示, $ABCDPQRS$ 是以 $\vec{AB}=\mathbf{A}$, $\vec{AD}=\mathbf{B}$, $\vec{AP}=\mathbf{C}$ 为三棱的平行六面体. X , Y 分别是 QR , CD 的中点. 试以 $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ 表出 $\vec{XY}$.

$$\text{解答 } \vec{XY} = \vec{XR} + \vec{RC} + \vec{CY} = \frac{1}{2}\mathbf{B} + (-\mathbf{C}) + \left(-\frac{1}{2}\mathbf{A}\right)$$

$$= \frac{1}{2}(\mathbf{B} - 2\mathbf{C} - \mathbf{A}).$$

例题13 以正方形 $ABCD$ 为底的锥形 $V-ABCD$ 的顶点为 V , $ABCD$ 的中心为 O . 试用 $\vec{AB}=\mathbf{A}$, $\vec{BC}=\mathbf{B}$, $\vec{OV}=\mathbf{H}$ 表出四个斜边向量.

$$\text{解答 } \vec{AC} = \mathbf{A} + \mathbf{B}, \vec{AO} = (\mathbf{A} + \mathbf{B})/2, \vec{CO} = -(\mathbf{A} + \mathbf{B})/2.$$

又知 $\vec{BD} = (\mathbf{B} - \mathbf{A})$. 因此

$$\vec{BO} = (\mathbf{B} - \mathbf{A})/2, \vec{DO} = -(\mathbf{B} - \mathbf{A})/2.$$

于是得到

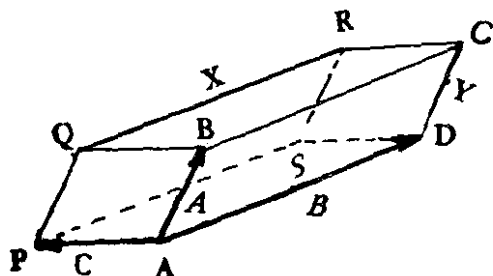


图6.9