



自然科学知识丛书



$$\begin{cases} x = 3n_1 + a \\ x = 5n_2 + b \\ x = 7n_3 + c \end{cases}$$

数海拾贝

赵为禾 编

陕西科学技术出版社

The background of the cover is a stylized illustration of a sea with several sailboats. The sea is depicted in shades of green and yellow, with white foam from the waves. The sky is a pale yellow. The overall style is reminiscent of a watercolor or a soft-focus photograph.

自然科学知识丛书

数海拾贝

赵为禾 编

1112888

陕西科学技术出版社

自然科学知识丛书

数海拾贝

赵为禾 编

陕西科学技术出版社出版

(西安北大街131号)

陕西省新华书店发行 陕西省印刷厂印刷

开本787×1092 1/32 印张4.125 插页2 字数76,000

1982年10月第1版 1982年10月第1次印刷

印数1—11,000

统一书号：13202·38 定价：0.40元

571137128

出版说明

实现四个现代化是我国现阶段的中心任务。广大工农兵、青年、干部，迫切需要自然科学方面的普及读物。为满足这种需要，我们编辑一套《自然科学知识丛书》，陆续出版。

这套丛书，力求用辩证唯物主义和历史唯物主义观点，通俗地介绍数学、物理、化学、天文、地理、生物等方面的基础知识和新兴科学知识。由于我们水平有限，经验不足，难免有些缺点、错误，希望广大读者批评指正。

前 言

你去过海边吗？你见过大海吗？落潮时你若漫步在海边，就一定会发现海水徐徐退走之后，总是把无数的贝壳留在沙滩上。信手拾起一把，就会发现这些贝壳，五光十色，很值得玩味鉴赏。不仅如此，幸许还会由这些小小的贝壳联想到大海的宽广和深奥，产生去海底觅珍寻宝的愿望和兴趣呢。

宽广的数学领域，有如浩瀚的大海，喻为数海，当之无愧。数海之中蕴藏着无穷无尽的珍奇瑰宝，数海之滨也有不少美丽的贝壳。涉猎数海的深水区，探索其中的奥妙，是数学专门家的事，在我们常人，是不易做到的。而掇拾遗落在数海边的贝壳，或堆积，或镶嵌，或雕琢，做成各式各样的器物、画幅、古玩，工作学习之余用来观赏品味，就非特为数学专门家所喜爱，也是包括笔者在内的广大读者所乐为的。笔者以为，书中奉献给读者的，虽说只是一些贝壳，但因小见大，它既可供数学爱好者鉴赏，也可以大大地开阔青少年的知识视野，培养他们学习数学的兴趣。倘若读过本书的青少年朋友果真因此而矢志专攻数学，产生了去数海深处探珍取宝的愿望，则是笔者无限欣慰的事。

囿于笔者学识，书中谬误之处恐在所难免，请批评指正。

赵 为 禾

1981年6月

目 录

一、有趣的等式

1.1 口令等式 (1)

1.2 $2222^{5555} + 5555^{2222} = 7n$ (n 为整数)
..... (1)

1.3 $2^n = 1 + C_n^1 + \dots + C_n^n$ (2)

1.4 花坛上的等式 (3)

1.5 在电子计算机中开平方运算运用的等式
..... (4)

1.6 求得0.618的等式 (5)

二、有趣的证明题

2.1 圆上五点 (7)

2.2 红蓝色水 (8)

2.3 树和树叶 (8)

2.4 握手的人 (9)

三、不能直接求解的方程式

3.1 刁番都法则 (10)

3.2 巧妙搭配 (11)

3.3 巧取零钱 (13)

3.4	三种硬币	(14)
四、有趣的余数		
4.1	韩信点兵	(16)
4.2	篮中取蛋	(19)
4.3	被3、9整除的数	(21)
4.4	$A \times B \neq C$	(23)
五、有趣的概率		
5.1	可能性与必然性	(25)
5.2	十中取五	(27)
5.3	马大哈发信	(27)
5.4	谁输谁赢	(28)
5.5	醉鬼走路	(30)
5.6	火柴棍里出 π	(32)
六、奇怪的魔方		
6.1	九宫	(36)
6.2	多列尔魔方	(37)
6.3	奇魔方	(38)
6.4	偶魔方	(40)
七、有趣的数 2^n		
7.1	2^n 与电子计算机	(43)
7.2	象棋发明人的赏赐	(48)
7.3	“跳房子”游戏	(49)
7.4	从1到54	(51)
7.5	猜数表	(52)

7.6	《百家姓》	(55)
八、数 谜		
8.1	奇怪的六位数	(61)
8.2	费解的等式	(62)
8.3	密码破译	(64)
8.4	恢复被抹掉的数字	(66)
九、数字游戏		
9.1	猜猜你的生日	(69)
9.2	质数的平方	(69)
9.3	六位数 $ABCABC$	(70)
9.4	火柴棍对奕	(71)
十、图形剪拼		
10.1	一剪改形	(76)
10.2	剪一为三	(77)
10.3	变一为四	(77)
10.4	“5”字变方	(78)
10.5	巧套连环	(79)
十一、扑克牌游戏		
11.1	一箭双雕	(81)
11.2	摆方阵	(82)
11.3	倒挂金钩	(82)
11.4	胸中有数	(84)
十二、智力测验		
12.1	一张统计表	(85)

12.2	一场不寻常的比赛	(86)
12.3	一笔难分的遗产	(86)
十三、逻辑推理		
13.1	五顶帽子	(88)
13.2	谁是谁非	(89)
13.3	谁是说假话的人	(90)
13.4	死里逃生	(90)
十四、数中选数		
14.1	选驸马	(93)
14.2	智赚鲁智深	(95)
十五、合理编排		
15.1	象棋比赛	(97)
15.2	新伙伴结组	(98)
十六、称量辨伪		
16.1	粗心的管理员	(100)
16.2	一枚伪金币	(100)
十七、杂 题		
17.1	分溶液	(105)
17.2	摆 渡	(105)
17.3	寻找捷径	(106)
17.4	选择搭桥地点	(107)
17.5	如何安排	(108)
17.6	奖金分配	(109)
17.7	李白沽酒	(110)

17.8	齐王和田忌赛马	(111)
17.9	巧分苹果	(112)
17.10	商品盘点	(113)
17.11	物价调整	(114)
17.12	因式分解	(114)
17.13	四个奇数	(115)
17.14	确定起飞起点	(116)
17.15	买花姑娘	(116)
17.16	得零分的考卷	(117)
17.17	气象观察	(117)
17.18	乒乓球选拔赛	(118)
17.19	一个能被100整除的数	(118)
17.20	没有整数解的方程式	(118)
17.21	获奖的人数	(119)
17.22	尾数上有几个零	(119)
17.23	谁是凶手	(120)
17.24	一个有趣的数	(122)

一、有趣的等式

1.1 口令等式

一、二、三、四、五、六、七、八、九，九、八、七、六、五、四、三、二、一，这是最简单的口令，利用口令的形式可以编排出一些有趣的等式。例如等式

$$\begin{aligned} & 999999999^2 \\ &= 12345678987654321 \cdot (1 + 2 + \cdots + 9 \\ &\quad + 8 + \cdots + 2 + 1) \end{aligned}$$

右边就是以口令形式编排的。下面我们证明这个等式是否成立。

证： $\because 111111111^2 = 12345678987654321,$
 $9^2 = 1 + 2 + \cdots + 9 + 8 + \cdots + 2 + 1,$
 $\therefore 999999999^2 = 111111111^2 \cdot 9^2$
 $= 12345678987654321 \cdot (1 + 2 + \cdots + 9$
 $\quad + 8 + \cdots + 2 + 1)。$

1.2 $2222^{5555} + 5555^{2222} = 7n$ (n 为整数)

2222^{5555} 与 5555^{2222} 的和能够被7整除，真是一个巧

合!

$$\begin{aligned} \text{证: } & 2222^{5555} + 5555^{2222} \\ &= (7 \times 317 + 3)^{5555} + (7 \times 793 + 4)^{2222} \\ &= (m_1 \cdot 7 + 3^{5555}) + (n_1 \cdot 7 + 4^{2222}) \\ &= (m_1 + n_1) \cdot 7 + (3^3)^{1851} \cdot 3^2 + (4^3)^{740} \cdot 4^2 \\ &= (m_1 + n_1) \cdot 7 + (4 \times 7 - 1)^{1851} \cdot 9 + (9 \\ &\quad \times 7 + 1)^{740} \cdot 16 \\ &= (m_1 + n_1) \cdot 7 + (m_2 \cdot 7 - 1) \cdot 9 + (n_2 \cdot 7 \\ &\quad + 1) \cdot 16 \\ &= (m_1 + n_1 + 9m_2 + 16n_2) \cdot 7 + (16 - 9) \\ &= (m_1 + n_1 + 9m_2 + 16n_2 + 1) \cdot 7 \\ &= 7n_0 \end{aligned}$$

$$1.3 \quad 2^n = 1 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n$$

2 的方幂和排列组合的关系如上式所示。利用在桌子上投掷硬币的游戏，即可使这个等式得到证明。

证：设有 n 个人民币硬币，将它们投掷在桌面上，向上的一面有的是国徽，有的是字。在向上的一面中，如设某一国徽数为一种情况，不同的国徽数为不同情况，那么，可能出现不同情况的总数有多少种呢？显然，对于一个硬币来说，可能出现的情况只有两种（字或国徽）；对于 n 个硬币来说，可能出现不同情况的总数应为：

$$N = \underbrace{2 \times 2 \times \dots \times 2}_n = 2^n. \quad (1)$$

另一方面，总数 N 中：

不出现国徽的情况数有 1，

出现一个国徽的情况数有 C_n^1 ；

出现二个国徽的情况数有 C_n^2 ；

⋮

出现 $n-1$ 个国徽的情况数有 C_n^{n-1} ；

出现 n 个国徽的情况数有 C_n^n 。

$$\text{即 } N = 1 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^{n-1} + C_n^n. \quad (2)$$

比较 (1)、(2) 两式，得知

$$2^n = 1 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^{n-1} + C_n^n.$$

1.4 花坛上的等式

在一个正方形花坛里，有一个菊形图案（图 1）。图案是以正方形的四边为直径，由四个半圆相交而成。能不能用正方形的边长表示出菊形的面积呢？可以。有以下几种算式，请读者不妨试一试。

$$S = 2\bigcirc - \square \approx 0.57a^2;$$

$$S = 4\left(\frac{1}{2}\bigcirc - \triangle\right) \approx 0.57a^2;$$

$$S = 8\left(\frac{1}{4}\bigcirc - \frac{1}{2}\triangle\right) \approx 0.57a^2.$$

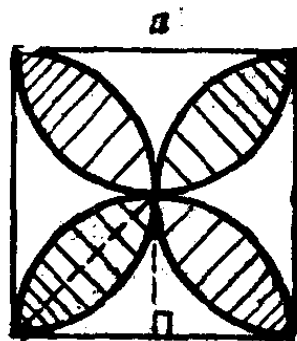


图 1

1.5 在电子计算机中开平方运算运用的等式

在电子计算机中开平方的运算，可利用等式 $n^2 = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1)$ 简化为加减法运算^①。试用数学归纳法证明这个等式是成立的。

证：当 $n = 1$ 时，

$$\text{左边} = n^2 = 1,$$

$$\text{右边} = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = 1,$$

等式成立。

假设当 $n = k$ 时，这个等式成立，即假设下面等式成立：

$$k^2 = 1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1)。$$

将上式的两边都加上 $2k + 1$ ，得

$$\begin{aligned} k^2 + 2k + 1 &= 1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1) \\ &\quad + (2k + 1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{即 } (k + 1)^2 &= 1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1) \\ &\quad + [2(k + 1) - 1]。 \end{aligned}$$

这就是说，当 $n = k + 1$ 时，这个等式也是成立的。

由以上两个步骤，可断定对于任意的自然数 n ，这个等式都能成立。

①例：运用等式 $n^2 = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1)$ ，求出 $\sqrt{85}$ 前两位的数值。

$$\because 8500 = 1 + 3 + 5 + \dots + (2 \times 92 - 1) + 36,$$

$$\therefore \sqrt{85} \approx 9.2。$$

1.6 求得0.618的等式

大家可能都知道，优选法中常常碰到0.618。但不少人
对0.618的来历却并不清楚。0.618从何而来呢？

(1) 设图2中线段 $AB = a$ ，若有一点 P ，使 $\frac{a-x}{x}$
 $= \frac{x}{a}$ 。这个 P 点，就是0.618点；0.618就是由这个等式而
来的。详解如下：

从上面的等式得方程式

$$x^2 + ax - a^2 = 0。$$

解方程式，弃其负根，得

$$x = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} a。$$

如设 $a = 1$ ，得 $x = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \approx 0.618$ 。

(2) 在图3中，设弦 AB 为圆 O 内接正十边形的一边，
 $AO = BO = R$ ， BC 是 $\angle B$ 的平分线。试
求正十边形的一边 AB 的长度。

不难证明， $\triangle ABC \cong \triangle ABO$ ，有

$$\frac{R-x}{x} = \frac{x}{R}，$$

得方程式

$$x^2 + Rx - R^2 = 0。$$

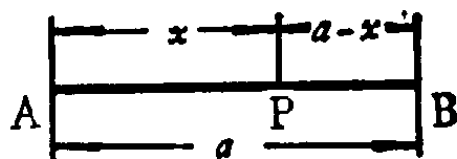


图 2

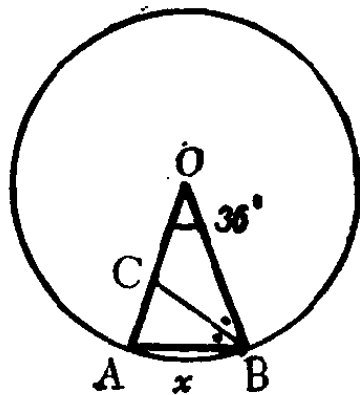


图 3

解方程式，弃其负根，得

$$x = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} R \quad .$$

如设 $R = 1$ ，得 $x = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \approx 0.618$ 。

由此可知，正十边形的边长与其外接圆的半径比也是 0.618。

二、有趣的证明题

2.1 圆上五点

在一个直径为 1 的圆内任意放置五个点，求证：其中必有两点，其距离不大于 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 。

在证明之前我们先介绍一下抽屉原则：

(1) 把多于 n 个的元素按任一确定的方式分成 n 个集合，那么一定有一个集合中含有两个或两个以上的元素。

(2) 把多于 $m \times n$ 个的元素按任一确定的方式分成 n 个集合，那么一定有一个集合中含有 $m + 1$ 个或 $m + 1$ 个以上的元素。

(3) 把无穷个元素按任一确定的方式分成有穷个集合，那么至少有一个集合中仍含有无穷多个元素。

这个原则很容易理解，应用起来也非常方便。下面运用抽屉原则证明我们的问题。

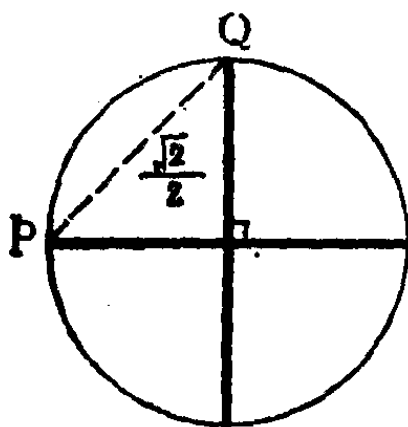


图 4