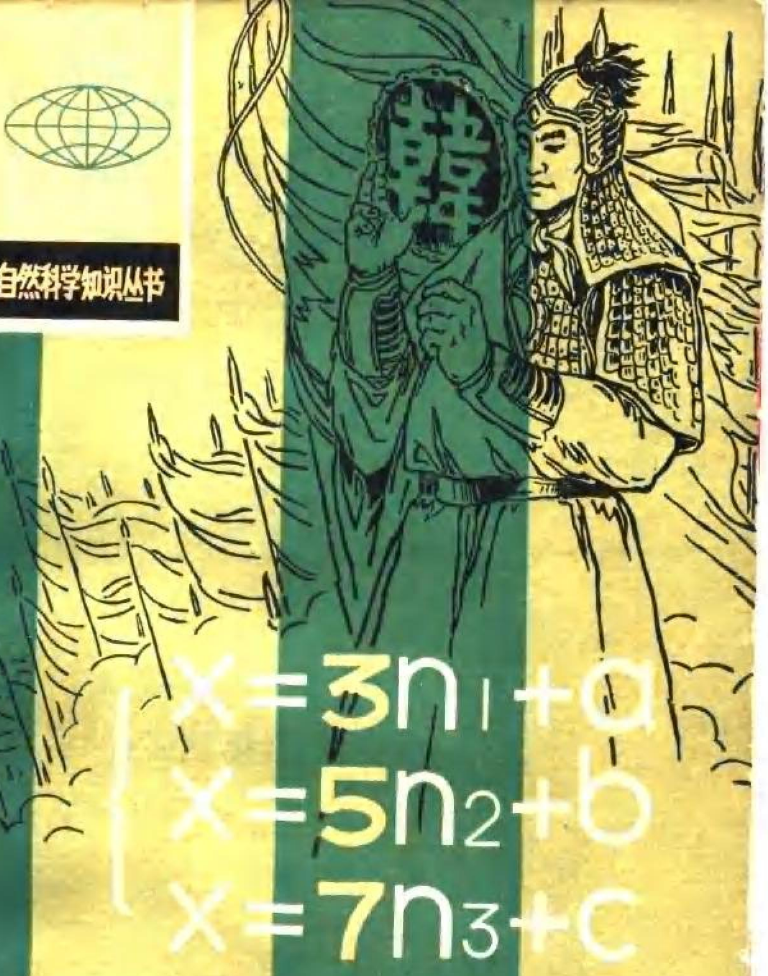
自然科学知识丛书



$$\begin{cases} x=3n_1+a \\ x=5n_2+b \\ x=7n_3+c \end{cases}$$

数海拾贝

赵为禾 编

陕西科学技术出版社

自然科学知识丛书

数海拾贝

赵为禾 编

陕西科学技术出版社

自然科学知识丛书
数 海 拾 贝
赵为禾 编
陕西科学技术出版社出版
（西安北大街131号）
陕西省新华书店发行 陕西省印刷厂印刷
开本787×1092 1/32 印张4.125 插页2 字数76,000
1982年10月第1版 1982年10月第1次印刷
印数1—11,000
统一书号：13202·38 定价：0.40元

出 版 说 明

实现四个现代化是我国现阶段的中心任务。广大工农兵、青年、干部，迫切需要自然科学方面的普及读物。为满足这种需要，我们编辑一套《自然科学知识丛书》，陆续出版。

这套丛书，力求用辩证唯物主义和历史唯物主义观点，通俗地介绍数学、物理、化学、天文、地理、生物等方面的基础知识和新兴科学知识。由于我们水平有限，经验不足，难免有些缺点、错误，希望广大读者批评指正。

前　言

你去过海边吗？你见过大海吗？落潮时你若漫步在海边，就一定会发现海水徐徐退走之后，总是把无数的贝壳留在沙滩上。信手拾起一把，就会发现这些贝壳，五光十色，很值得玩味鉴赏。不仅如此，幸许还会由这些小小的贝壳联想到大海的宽广和深奥，产生去海底觅珍寻宝的愿望和兴趣呢。

宽广的数学领域，有如浩瀚的大海，喻为数海，当之无愧。数海之中蕴藏着无穷无尽的珍奇瑰宝，数海之滨也有不少美丽的贝壳。涉猎数海的深水区，探索其中的奥妙，是数学专门家的事，在我们常人，是不易做到的。而掇拾遗落在数海边的贝壳，或堆积，或镶嵌，或雕琢，做成各式各样的器物、画幅、古玩，工作学习之余用来观赏品味，就非特为数学专门家所喜爱，也是包括笔者在内的广大读者所乐为的。笔者以为，书中奉献给读者的，虽说只是一些贝壳，但因小见大，它既可供数学爱好者鉴赏，也可以大大地开阔青少年的知识视野，培养他们学习数学的兴趣。倘若读过本书的青少年朋友果真因此而矢志专攻数学，产生了去数海深处探珍取宝的愿望，则是笔者无限欣慰的事。

囿于笔者学识，书中谬误之处恐在所难免，请批评指正。

赵　为　禾

1981年6月

目　录

一、有趣的等式

1.1 口令等式

一、二、三、四、五、六、七、八、九，九、八、七、六、五、四、三、二、一，这是最简单的口令，利用口令的形式可以编排出一些有趣的等式。例如等式

$$\begin{aligned}&999999999^2\\&=12345678987654321\cdot(1+2+\cdots\cdots+9\\&\quad+8+\cdots\cdots+2+1)\end{aligned}$$

右边就是以口令形式编排的。下面我们证明这个等式是否成立。

证： $\because\ 111111111^2=12345678987654321,$

$$9^2=1+2+\cdots\cdots+9+8+\cdots\cdots+2+1,$$

$$\begin{aligned}\therefore\ 999999999^2&=111111111^2\cdot 9^2\\&=12345678987654321\cdot(1+2+\cdots\cdots+9\\&\quad+8+\cdots\cdots+2+1)。\end{aligned}$$

1.2 $2222^{5555}+5555^{2222}=7n$（$n$为整数）

2222^{5555}与5555^{2222}的和能够被7整除，真是一个巧

合!

证：$2222^{5555}+5555^{2222}$

$= (7\times317+3)^{5555}+(7\times793+4)^{2222}$

$= (m_1\cdot7+3^{5555})+(n_1\cdot7+4^{2222})$

$= (m_1+n_1)\cdot7+(3^3)^{1851}\cdot3^2+(4^3)^{740}\cdot4^2$

$= (m_1+n_1)\cdot7+(4\times7-1)^{1851}\cdot9+(9\times7+1)^{740}\cdot16$

$= (m_1+n_1)\cdot7+(m_2\cdot7-1)\cdot9+(n_2\cdot7+1)\cdot16$

$= (m_1+n_1+9m_2+16n_2)\cdot7+(16-9)$

$= (m_1+n_1+9m_2+16n_2+1)\cdot7$

$= 7n$。

1.3　$2^n=1+C_n^1+C_n^2+\cdots\cdots+C_n^n$

2的方幂和排列组合的关系如上式所示。利用在桌子上投掷硬币的游戏，即可使这个等式得到证明。

证：设有n个人民币硬币，将它们投掷在桌面上，向上的一面有的是国徽，有的是字。在向上的一面中，如设某一国徽数为一种情况，不同的国徽数为不同情况，那么，可能出现不同情况的总数有多少种呢？显然，对于一个硬币来说，可能出现的情况只有两种（字或国徽）；对于n个硬币来说，可能出现不同情况的总数应为：

$$N=\underbrace{2\times2\times\cdots\cdots\times2}_{n}=2^n。\qquad(1)$$

另一方面，总数N中：

不出现国徽的情况数有1；

出现一个国徽的情况数有C_n^1；

出现二个国徽的情况数有C_n^2；

⋮

出现$n-1$个国徽的情况数有C_n^{n-1}；

出现n个国徽的情况数有C_n^n。

即 $$N=1+C_n^1+C_n^2+\cdots\cdots+C_n^{n-1}+C_n^n。\qquad(2)$$

比较（1）、（2）两式，得知

$$2^n=1+C_n^1+C_n^2+\cdots\cdots+C_n^{n-1}+C_n^n。$$

1.4 花坛上的等式

在一个正方形花坛里，有一个菊形图案（图1）。图案是以正方形的四边为直径，由四个半圆相交而成。能不能用正方形的边长表示出菊形的面积呢？可以。有以下几种算式，请读者不妨试一试。

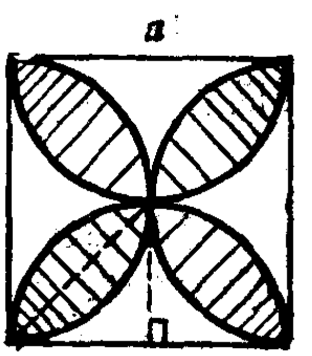


图 1

$S=2○-□\approx0.57a^2$；

$S=4(\frac{1}{2}○-△)\approx0.57a^2$；

$S=8(\frac{1}{4}○-\frac{1}{2}△)\approx0.57a^2$。

1.5 在电子计算机中开平方运算运用的等式

在电子计算机中开平方的运算，可利用等式$n^2=1+3+5+\cdots\cdots+(2n-1)$简化为加减法运算①。试用数学归纳法证明这个等式是成立的。

证：当$n=1$时，

左边$=n^2=1$；

右边$=1+3+5+\cdots\cdots+(2n-1)=1$，

等式成立。

假设当$n=k$时，这个等式成立，即假设下面等式成立：

$$k^2=1+3+5+\cdots\cdots+(2k-1)。$$

将上式的两边都加上$2k+1$，得

$$k^2+2k+1=1+3+5+\cdots\cdots+(2k-1)+(2k+1)，$$

即
$$(k+1)^2=1+3+5+\cdots\cdots+(2k-1)+[2(k+1)-1]。$$

这就是说，当$n=k+1$时，这个等式也是成立的。

由以上两个步骤，可断定对于任意的自然数n，这个等式都能成立。

---

①例：运用等式$n^2=1+3+5+\cdots\cdots+(2n-1)$，求出$\sqrt{85}$前两位的数值。

$\because 8500=1+3+5+\cdots\cdots+(2\times 92-1)+36$，

$\therefore \sqrt{85}\approx 9.2$。

1.6 求得0.618的等式

大家可能都知道，优选法中常常碰到0.618。但不少人对0.618的来历却并不清楚。0.618从何而来呢？

（1）设图2中线段$AB=a$，若有一点P，使$\frac{a-x}{x}=\frac{x}{a}$。这个$P$点，就是0.618点；0.618就是由这个等式而来的。详解如下：

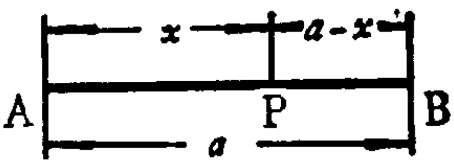


图 2

从上面的等式得方程式

$$x^2+ax-a^2=0。$$

解方程式，弃其负根，得

$$x=\frac{\sqrt{5}-1}{2}a。$$

如设$a=1$，得$x=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\approx0.618$。

（2）在图3中，设弦AB为圆O内接正十边形的一边，$AO=BO=R$，BC是$\angle B$的平分线。试求正十边形的一边AB的长度。

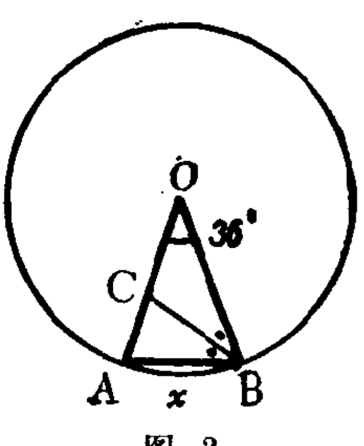


图 3

不难证明，$\triangle ABC\cong\triangle ABO$，有

$$\frac{R-x}{x}=\frac{x}{R},$$

得方程式

$$x^2+Rx-R^2=0。$$

解方程式，弃其负根，得

$$x=\frac{\sqrt{5}-1}{2}R\quad。$$

如设$R=1$，得　$x=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\approx0.618$。

由此可知，正十边形的边长与其外接圆的半径比也是0.618。

二、有趣的证明题

2.1 圆上五点

在一个直径为1的圆内任意放置五个点，求证：其中必有两点，其距离不大于$\frac{\sqrt{2}}{2}$。

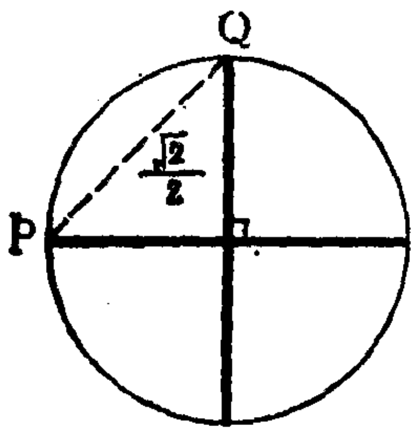


图 4

在证明之前我们先介绍一下抽屉原则：

（1）把多于n个的元素按任一确定的方式分成n个集合，那么一定有一个集合中含有两个或两个以上的元素。

（2）把多于$m\times n$个的元素按任一确定的方式分成n个集合，那么一定有一个集合中含有$m+1$个或$m+1$个以上的元素。

（3）把无穷个元素按任一确定的方式分成有穷个集合，那么至少有一个集合中仍含有无穷多个元素。

这个原则很容易理解，应用起来也非常方便。下面运用抽屉原则证明我们的问题。