

土与基础相互作用的弹性分析

〔加〕 A.P.S.塞尔瓦杜雷 著

范文田 何广汉
张式深 罗无量^译

中 国 铁 道 出 版 社

1984年·北京

内 容 简 介

工程结构的基础与地基之间的相互作用问题（有时也称它为“弹性地基梁”问题）是正在深入研究的一个重要课题。目前已扩展到不同弹性体的相互作用问题。

本书是阐述土与基础相互作用在弹性分析方面的专著。内容包括：土与基础相互作用问题以及分析这类问题的理想化特性模型；无限板及长梁的平面应变分析；有限板的分析；无限板的轴对称三维问题；确定地基土各参数实验研究和现场量测。每一章都附有具体实例和近五十年来有关这方面的主要参考文献。

本书可供岩土、土木工程技术人员阅读，也可供这类专业的大学高年级学生及研究生等进一步深入学习这一课题之用。

A.P.S. SELVADURAI
ELASTIC ANALYSIS OF
SOIL—FOUNDATION INTERACTION
Elsevier Scientific Publishing Co.1979

土与基础相互作用的弹性分析

〔加〕A.P.S.塞尔瓦杜雷 著

范文甲 何广汉 译

张式深 罗无量

中国铁道出版社出版

责任编辑 翁大厚 封面设计 王毓平

新华书店北京发行所发行

各地新华书店经售

中国铁道出版社印刷厂印

开本：787×1092 $\frac{1}{16}$ 印张：23.25 字数：524千

1984年10月第1版 1984年10月第1次印刷

印数：0001—8,000册 定价：3.60元

序 言

研究结构物基础与支承土介质间的相互作用对结构工程和岩土工程均具有十分重要的意义。这类研究所提供的资料既可用于基础的结构设计,又可用以分析支承土介质内的应力和变形。这种内含价值促使了对土与基础相互作用问题的各种各样的分析和试验研究。本书的主要任务是综合评述土与基础相互作用弹性性质方面的理论和试验研究的最新发展,并试图系统地阐述位于线性变形介质上无限及有限范围的梁和板的基本分析方法。

第一章对弹性体间相互作用的历史和发展作了简要地回顾,其中包括对导致土与基础相互作用问题公式的一些基本假定的概述。第二章内讨论了土性质的各种理想化的情况。这些特定的理想情况包括Winkler模型、弹性连续介质(各向同性、各向异性及非均匀)模型以及双参数(Viclov, Pasternak、Reissner、Hetenyi以及Kerr)模型。为了完整起见,对土性态的弹塑性模型及随时间而变化的模型也进行了简要阐述。

在第三章中对位于线性变形弹性介质上的无限长梁进行综合分析。这一章还研究须要进行平面应变分析或三维分析的无限长梁。第四章专门研究有限长梁的相互作用。在研究位于Winkler和双参数介质上的有限长梁时采用了初参数法和叠加法。在分析弹性介质上的有限长梁时应用了Gorbunov-Posadov法、Zemochkin法以及Ohde法。在第四章内还列出了其他许多积分方程式,其中包括位于弹性半平面上刚性窄条的共轭积分方程式。

在第五章内对可以用于基础相互作用研究的各种板的理论进行了简要的阐述。这一章还综合分析了关于承受一个轴对称荷载的无限板的相互作用问题。第六章内所考虑的有限板的分析是针对圆形板及矩形板。这一章评述了各种分析方法(例如幂级数近似法、Zemochkin法、Gorbunov-Posadov法、Rayleigh-Ritz法和Galerkin型的变分法以及共轭积分方程式法)的应用,并讨论了土与基础相互作用分析的其他数值方法,例如有限差分法、松弛法和有限元法。本章研究的问题仅限于承受轴对称和对称荷载的圆形板和矩形板。

第七章扼要介绍了土与基础相互作用问题的更为实用的方面,并对用以描述理想化弹性介质的各材料参数的若干获取方法进行了评述。此外,还评述了有关结构物基础的模型和野外大比例尺试验的岩土工程的一些研究成果。

在第三至六章的末尾以及附录A~D中,对本书内所讨论的各种问题而导出的数值结果进行了小结。此外,本书尽量保留所引用原论文采用的符号、标记以进行比较。附录E中列出了各向同性弹性连续介质上片筏基础的近似分析方法,或许会对土工和结构工程师都实用价值。尽管各章内所列出的分析成果可以进一步导出许多数值解,但由于本书只想作一本参考书,因此不打算写过多的实例。同样,在每一章内,我只试图对该特定问题的技术状态进行简要的评述。总的说来,本书所举的土与基础相互作用分析的各种方法只是对土结构工程师以及工程力学和应用数学的研究人员均认为有用的方式进行介绍。

谨向我的许多导师和同事们表示感谢。感谢布莱顿(Brighton)工业大学的F.D.C.博士使我有幸参与编写即将出版的《基础工程》一书中的一章,促使我完成了此书。我也很乐于谢我的导师,伦敦大学皇家学院的R.E. Gibson教授和诺丁罕(Not-



目 录

第一章 土与基础相互作用问题引论	1
1.1 理想化土性态	3
1.2 基础的性态	4
1.3 界面的性态	5
1.4 分析方法	6
1.5 土与基础相互作用分析的领域	6
第二章 用以分析土与基础相互作用理想化土性质的模型	7
2.1 土性态的弹性模型	7
2.1.1 Winkler模型.....	8
2.1.2 弹性连续介质模型.....	8
2.1.3 双参数弹性模型.....	16
2.2 土体的弹塑性性态和随时间变化的性态	23
2.2.1 弹塑性性态.....	23
2.2.2 随时间变化的性态.....	25
第三章 无限板和无限长梁的平面应变分析	27
3.1 梁的BERNOULLI-EULER理论及其修正	27
3.1.1 剪切变形的影响.....	29
3.2 无限板问题的平面应变分析	29
3.2.1 受有集中力的无限长梁.....	32
3.2.2 承受集中力偶矩的无限长梁.....	32
3.3 分析无限板问题的 REISSNER 法.....	33
3.4 无限长梁问题中的三维影响	35
3.4.1 位于Winkler介质上有限宽的无限长梁.....	36
3.4.2 位于双参数介质上有限宽的无限长梁.....	36
3.4.3 位于各向同性弹性半空间上有限宽的无限长梁.....	38
3.5 无限长梁问题的某些数值解	45
第四章 有限长梁的分析	51
4.1 Winkler介质上的有限长梁	54
4.1.1 初参数法.....	54
4.1.2 叠加法.....	56
4.1.3 应变能法.....	62
4.2 双参数弹性介质上的有限长梁	66
4.2.1 初参数法.....	67
4.2.2 叠加法.....	69

4.2.3 应变能法	71
4.3 弹性体介质上的有限长梁	72
4.3.1 Borowiecka及Gorbunov-Posadov的幂级数法	72
4.3.2 Zemochkin和SinitSyn法	80
4.3.3 Ohde 法	82
4.3.4 刚性条形问题。共轭积分方程式	84
4.4 近似法	88
4.4.1 Reissner法	88
4.4.2 Galin 法	90
4.5 有限长梁问题的一些数值结果	92
4.5.1 Winkler介质上的有限长梁	92
4.5.2 双参数弹性介质上的有限长梁	93
4.5.3 位于均匀的各向同性弹性连续介质上的有限长梁	94
4.6 有限长梁按其刚度的分类	108
4.6.1 位于Winkler 介质上的有限长梁按其刚度的分类	108
4.6.2 位于双参数介质上的有限长梁按其刚度的分类	109
4.6.3 位于弹性体介质上的有限长梁按其刚度的分类	109
第五章 无限板的三维轴对称问题	111
5.1 泊松与 KIRCHHOFF 的板理论	111
5.1.1 弹性薄板的边界条件	115
5.1.2 圆形板的弯曲	118
5.1.3 圣维南原理	119
5.2 修正的薄板理论	120
5.2.1 厚板理论	120
5.2.2 板的三维弹性分析	125
5.2.3 具有大的挠度和薄膜的薄板	128
5.3 无限板的轴对称三维问题	129
5.3.1 无限板问题的广义分析	132
5.3.2 分析无限板问题的Holl法	136
5.3.3 应用积分变换法解无限板问题	139
5.4 无限板问题的某些卓越成果	140
5.4.1 位于Winkler介质上的无限板	140
5.4.2 位于双参数弹性介质上的无限板	143
5.4.3 位于各向同性弹性体介质上的无限板	144
第六章 有限板的分析	149
6.1 圆形板的轴对称荷载	150
6.1.1 位于Winkler介质上的圆形板	151
6.1.2 位于双参数弹性介质上的圆形板	157
6.1.3 位于弹性体介质上的圆形板	163
6.1.4 位于弹性体介质上的圆形刚性板。共轭积分方程式	180

6.1.5 位于Winkler介质上的圆形板叠加法和应变能法的应用	185
6.1.6 位于弹性半空间上的圆形板应变能法的应用	188
6.1.7 各向同性弹性半空间上圆形板轴对称荷载的某些数值结果	190
6.2 矩形板的分析	196
6.2.1 位于Winkler介质上的矩形板	199
6.2.2 位于双参数弹性介质上的矩形板	204
6.2.3 位于弹性体介质上的矩形板	209
6.2.4 矩形板问题的某些数值成果	219
6.3 位于线性变形弹性介质上有限板的数值分析	233
6.3.1 有限差分法	234
6.3.2 有限元法	249
6.3.3 离散元法	265
第七章 土各参数的确定。实验室研究和现场测试	269
7.1 反映土与基础相互作用性态的理想化土模型中各参数的量测和分析	269
7.1.1 Winkler和双参数土性态模型中各常数的确定	270
7.1.2 各向同性弹性连续体模型中各弹性常数的确定	276
7.2 试验研究和现场测试	279
7.2.1 刚性基础下接触应力的量测	279
7.2.2 柔性梁下接触应力的量测	281
7.2.3 片筏基础和筏式基础下接触应力的量测	282
7.2.4 关于选用理想化土模型的评述	285
附 录	287
附录 A Winkler介质上无限板的挠度	287
附录 B Winkler介质上无限板的挠度	288
附录 C 含有Bessel函数乘积的无穷积分运算的计算程序	290
附录 D 圆形刚性板的分析	300
附录 E 位于弹性半空间上的板	304
参考文献	330

第一章 土与基础相互作用问题引论

在应用数学和工程文献中,对变形体之间相互作用的分析研究占有显著的地位。姑且不论其内在的数学含义,相互作用问题在许多工程场合中是十分重要的。这些问题包括对结构物基础、浮式结构、层状或组合材料、压凹、裂缝和疲劳问题的研究。还包括对地球和地质构造的研究。虽然这些研究的较大部分主要是涉及相互作用问题的弹性分析,但其内容正在不断地扩展到包含其他形式的材料性态,如非线性弹性、非弹性以及随时间变化等材料性质。弹性体相互作用问题的完全分析,通常需要确定各个相互接触体内的应力和应变以及有关接触区域处位移与应力分布的资料。弹性变形介质间相互作用的研究是沿着包括以下三个截然不同的情况而发展的。

(a) 弹性体间的相互作用。在这类问题中,不同弹性特征的变形体被外力挤压在一起。变形体间的接触区域可以是光滑的或者是有摩擦特征的,从而引起接触面上的法向力及剪力。此外,接触区域可能正在增大,缩减或者固定不变。关于接触区域变动的问题,接触区域的范围形成是一个附加的未知数,而需要从相互作用问题的完全解中予以确定。当假设变形体在接触区域附近平坦到允许按弹性半空间范围所用的解析方法进行分析时,这类弹性接触问题的分析会出现相当大的简化。

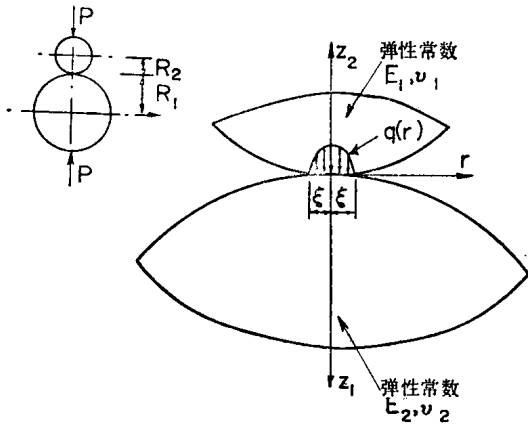
(b) 弹性介质与刚体之间的相互作用。这里,我们特别是指当各种大小的外力作用于压凹的刚体时的相互作用问题,此时,接触区域的形状均事先知道并保持不变。若其中的刚体会引起非固定不变的接触区域时,则基本上属于第一类问题。

(c) 弹性体与结构物构件之间的相互作用。这类问题构成了一般弹性体间相互作用问题的一个特殊情况,其中之一的力学性态是利用一个结构物的构件如梁、板或壳的力学性态来表示的。

属于上述前二类弹性相互作用的两种经典问题是与Hertz和Boussinesq的名字紧密联系的。Hertz在1882年首先研究了法向荷载作用下弹性体的接触问题。他计算并用试验验证了在接触面上的应力分布。弹性体内的应力是用势能理论的成果计算的。例如,在图1.1中概括了Hertz对两个球体间无摩擦接触的问题所导得的结果,这两个球体承受一组力其作用线与球心联线重合。可以看出,当两个球体间没有接触应力时,接触仅存在于一点。当两个球体被压紧在一起时,在接触点附近将出现表面局部变形而引起一个具有圆形边界小的表面接触,称为接触表面。接触表面的半径是作用力的非线性函数。

随后,Morton和Close (1922)研究了Hertz的解。他们用带调和函数计算了被一个光滑球体压凹的各向同性弹性半空间内的应力。直到Lundberg (1939)提出两个半无限弹性体间弹性接触的一般原理时为止,都未将界面处摩擦的影响考虑在内。Cattaneo (1938), Mindlin (1949, 1954)以及Mindlin和Deresiewicz (1953)考虑了接触区域处的切向力和扭矩。这些研究后来构成了分析研究由弹性球体组成的颗粒状介质的基础 (Deresiewicz, 1974)。Shtaerman (1949), Goodman (1962, 1974), Mossakovshi (1973), Lur'e (1964), Goodman和Keer (1965, 1975), Willis (1966), Kalker (1971, 1975), Spe-

nce (1968, 1975) 以及Singh等人 (1975) 对Hertz问题提出了进一步的引伸和修正。更进一步工作的参考文献可从 Krolevets(1966), Kil'chevskii 和 Kostyuk (1966), Rvachev (1967) 以及de Pater和Kalker (1975) 的论著中找到。由于Dundurs和Stippes (1970) 以及Dundurs (1975) 的出色工作, 引起了对弹性体间接接触分析更加广泛研究的动力。



$$\text{接触应力: } q(r) = p_0 \left[1 - \frac{r^2}{\xi^2} \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{接触面的半径: } \xi = \left[\frac{3\pi P (k_1 + k_2) R_1 R_2}{4(R_1 + R_2)} \right]^{\frac{1}{3}}$$

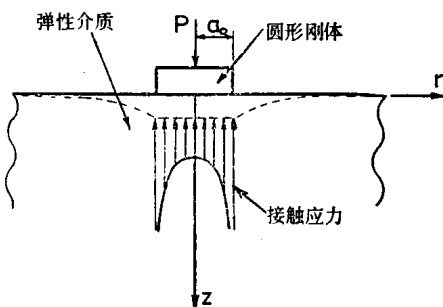
两个球心间距离的缩短:

$$\Delta = \left[\frac{9\pi^2 P^2 (k_1 + k_2)^2 (R_1 + R_2)}{16 R_1 R_2} \right]^{\frac{1}{3}},$$

$$p_0 = \frac{3P}{2\pi \xi^2}; \quad k_1 = \frac{(1 - \nu_1^2)}{\pi E_1}; \quad k_2 = \frac{(1 - \nu_2^2)}{\pi E_2}$$

图1.1 Hertz问题。两个弹性球体间的无摩擦接触

当一个光滑的刚体使一个均匀的, 各向同性的弹性半空间的表面变形时, 确定其中应力状态的问题是由Boussinesq在他1885年出版的著作中首先给出的。此外, Boussinesq利用势能理论的方法导出了当压凹回转体的轴线与弹性半空间未变形的边界正交时, 轴对称问题的一个解。所得具有浅平基底的圆形刚体这一特定情况的结果如图1.2所示。Boussinesq所得的解的形式不适宜于实际计算, 而后来Love (1929, 1939) 在 Boussinesq 解的基础上导得了扁平底和圆锥形刚体情况下的部分数值结果。自从Boussinesq的初始解发表后, 许多学者, 包括Leonev (1940), Lur'e (1941), Harding和Sneddon(1945), Galin (1947) 以及Green和Zerna (1968) 在内, 提出了一些另外的方法。Shtaerman (1949), Muskhelishvili (1953), Goodier 和 Hodge (1958), Korenev (1960), Galin (1961), Ufliand (1965), Teague (1965), Spence (1975), Kalker (1975) 以及在有关Hertz问题所引用的论文中, 对涉及刚性压凹体接触问题工作的发展及其详细的文献目录都给予了极好的阐述。



$$\sigma_{zz}(r, 0) = \begin{cases} \frac{P}{2\pi a_0 (a_0^2 - r^2)^{\frac{1}{2}}} & (0 < r \leq a_0) \\ 0 & (a_0 < r < \infty) \end{cases}$$

当 $0 < r < \infty$ 时, $\tau_{rz}(r, 0) = 0$

$$w(r, 0) = \begin{cases} \frac{P(1 - \nu_1^2)}{2a_0 E_1} & (0 < r < a_0) \\ \frac{P(1 - \nu_1^2)}{\pi a_0 E_1} \sin^{-1} \left(\frac{a_0}{r} \right) & (a_0 < r < \infty) \end{cases}$$

(E_1, ν_1 为半空间材料的弹性常数)。

图1.2 Boussinesq问题。圆形刚体对各向同性弹性半空间的轴对称压凹问题 (界面处为光滑接触)。

本书主要是涉及第三类接触问题, 即对位于理想化的线性变形弹性介质上的结构物构件、如有限或无限范围的梁和板间的相互作用进行研究。这种性质的问题对土力学和基础工

程特别重要，所导出的解有可能用来分析和设计结构物的基础，例如单个或联合基础，片筏基础和筏式基础以及柔性路面系等（参阅图1.3）。

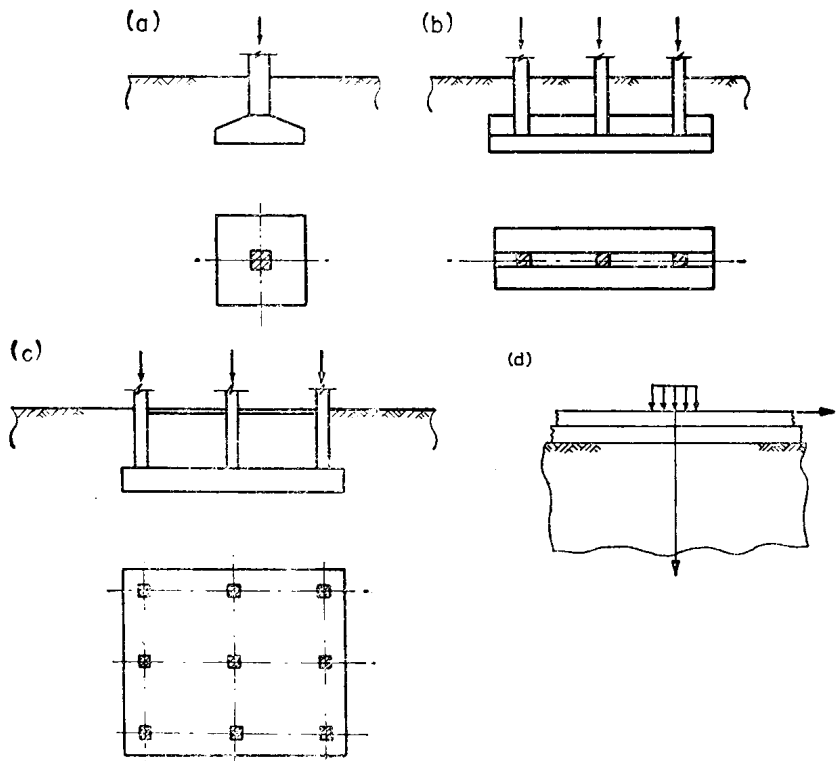


图1.3 土与基础相互作用问题。
(a) 独立基础，(b) 联合基础，(c) 片筏基础，(d) 层状体系。

1.1 理想化土性态

天然土的力学特性可受到种种因素的影响。这些因素包括：(i) 单个土粒的形状、尺寸及力学性质，(ii) 土的结构组态，(iii) 颗粒间的应力与应力历史以及 (iv) 土的含水量、饱和度及土的渗透性。这些因素通常促使应力与应变现象呈现明显的非线性的、不可逆的以及随时间变化的特征。同时还促使土体显示出各向异性及非均匀的材料性质。因此，企图考虑所有这些材料特性来解决土与基础相互作用问题无疑是一项繁重的工作。为了获得土与基础相互作用实际问题的有意义而可靠的资料，考虑土性态的许多特殊方面以使其理想化实属必须。使土特性理想化的最简单形式是假设支承土介质为线弹性性态。众所周知，隐含在线弹性性态中的变形的线性假设和可逆性假设，当然常常是不能被天然的土体所严格满足的。但另一方面，线弹性性态明显地减轻了耗费在求解特殊边界值问题时分析上的艰巨性并能对土力学和基础工程中许多用其他方法难以对付的实际问题提供有用的资料。

在土与基础相互作用问题的分析中，通常假设土介质可由拥有半空间领域的弹性介质予以适当地表示。实际上，基础当然是位于地面以下的某个深度处（图1.3）。假设土介质的表面构成土与基础的交界面。支承土介质的线弹性理想化通常是通过一个能显示出土性态特性的力学模型或数学模型来表示。某些这样的理想化模型已被提出。支承土介质线弹性性态最简单的模型一般是归功于Winkler (1867)。他假设土介质每一点处的表面位移与作用在

该点处的应力成正比, 而和土与基础交界面上其他甚至是最邻近的各点的应力或位移完全无关。Winkler对土介质的理想化实际上可由一系列相距很近的弹簧单元来体现。每个弹簧单元因受直接作用于其上的应力而变形, 但邻近的弹簧则不受影响。土介质独特特征的这种表示方法是其表面位移的非连续性性态。Gibson (1967) 对不可压缩的非均匀弹性介质的主要工作更进一步赞同Winkler的基本假说。

最早将支承介质的Winkler性态应用于相互作用问题的是Hertz (1884)。它涉及一个承受集中荷载而漂浮的弹性无限板问题。Hertz导得了最大挠度的表达式, 并作了有意义的观测, 发现一个有限尺寸的板在它未受外荷时可能下沉, 但当它受有一个集中荷载达到某一限值时就可能浮起, 这取决于板的尺寸及其挠曲特征。在Zimmermann (1888), Schleicher (1926) 及Hetényi (1946) 的经典论著中介绍了Winkler假设在分析弹性支承梁和板方面的广泛应用。

另一种理想化是假设土的连续性性态, 因而土介质可用弹性半空间表示。虽然通常都将连续性性态看作是对土一般性态的更精确的描述, 但土与基础相互作用问题的分析, 在数学上是复杂的。不像Winkler模型那样, 其基本方程为微分形式, 而涉及弹性连续介质模型的问题, 通常须要求解积分方程或积分微分方程。位于均匀的各向同性弹性半空间上无限板问题的解是由Hogg (1938) 及Holl (1938a) 独自导得的。继这些早期的研究之后, 主要是在苏联发展了某些近似的方法来分析位于弹性连续介质上的有限板及无限板。在Gorbunov—Posadov (1940, 1941), Zemochkin和Sinityn (1947), Goodier和Hodge (1958), Korenev (1960), Galin (1961), Rvachev (1967) 以及Popov (1971) 的论著中包含有对这些研究的全面阐述以及大量的参考书目。

上述对于弹性土性态的两种模型可以看作是土性态的两个极端情况, 一方面用完全不连续的Winkler介质来表示, 而另一方面则用完全连续的弹性体来表示。试验和理论研究都强调须要在这二种理想化土性态形式之间提供一个中间的模型。例如, 可以看出, 对于土介质, 其表面位移不仅发生于受荷面积以内, 而且也发生在受荷面积以外。然而这些位移较之按弹性连续介质模型所预计的减少得更为迅速。由Filonenko—Borodich (1940), Hetényi (1950), Pasternak (1954), Reissner (1958) 以及Vlozov和Leontiev (1966) 所提出的理想化土性态的双参数模型想要克服这些差异。双参数土模型的一种 (Filonenko—Borodich, Hetényi及Pasternak) 是在Winkler介质的各弹簧单元间引入了相互的力学作用, 而另一种 (Reissner 以及Vlazov和Leontiev) 是对弹性半空间模型内可能产生的位移和分布应力的形式加以限制。将这些模型应用到土与基础的相互作用, 业已成为目前许多研究的主题 (例如, 参阅 Korenev, 1960; Kerr, 1964, 1965; Hetényi, 1966; Popov, 1971)。土性态的三种基本模型将在下一章内进一步讨论。

1.2 基础的性态

棱柱体梁构件的挠曲性态最适宜于用Bernoulli—Euler的梁理论来描述。在这一理论中, 略去了横向剪切变形的影响、薄膜效应等。在梁承受局部荷载处或挠曲刚度突变处, 经常违反经典理论的一些基本假设。在土与基础相互作用问题中, 当支承土介质的性质有显著变化时, 也可能出现同样的不一致。在这种情况下, 就必须将梁的经典理论予以修正, 或是将剪切变形的影响包括在内, 或是将整个梁或局部受力区存在的三维应力状态考虑在内。

Poisson—Kirchhoff的薄板理论能充分地描述片筏基础、柔性筏基、单层路面结构等的挠

曲性态。这里选用象Reissner (1945) 所提出的厚板理论或利用三维弹性分析来考虑由于局部荷载所引起的影响也是违反经典薄板理论。值得重视的是基础自身随时间变化的性态对土与基础相互作用分析的模拟化以及对最后的结果均有重要影响。然而随时间变化的特性已超出本书范畴。

1.3 界面的性态

为了完整地给相互作用问题下个定义, 就需要事先确定有关土与基础界面处力学性态的某些条件。在研究前面所述的理想化土性态时, 显然只有在涉及理想化土介质的弹性连续性性态的情况下, 界面条件的描述才是有意义的。而且, 如果将摩擦的影响也包括在内, 则不得不修正Bernoulli—Euler的梁理论以考虑摩擦在界面处引起的薄膜应力。换句话说, 基础应被模拟化为一个弹性层。以后的讨论将直接考虑与土介质弹性连续性性态有关的界面条件。

从理论观点来看, 对于基础与下卧层土介质间的界面条件可以提出几种假设。其范畴可从完全光滑的界面到完全粘着的界面, 或具有库伦摩擦、或有限摩擦、或居中间位置的两者的组合。

[上述的几种界面条件已直接应用于机械工程中涉及弹性体三维相互作用问题。例如, 相互之间、或与半空间、或与层状区处于静止或滚动接触性态的圆柱体、球体。因此, 包含界面性态各种情况的三维相互作用问题, 在理论方面已受到了相当大的注意。从Galín (1961), Kalker和de Pater (1971), Deresiewicz (1974), Spence (1975), Goodman和Keer (1975) 以及de Pater和Kalker (1975) 的论著中可以找到这些研究的全部阐述。实际上, 由于这些机械部件界面处的条件可以被描述到足够精确的程度, 这样一个事实就大大加快了这一研究领域的进程]。

当研究土与基础相互作用问题时, 要事先描绘出界面的条件是一项比较困难而艰巨的工作。许多结构物基础在界面处将显示出某些摩擦特征。由于土介质的强度有限, 如形成摩擦力, 其值也有限。孔隙水压力的存在, 可改变整个压缩过程中摩擦力的大小和分布。此外, 许多因素如基础上外荷载的分布和性质, 基础的相对柔度以及随时间变化的效应等都会严重地影响土与基础界面的条件。从全面分析相互作用的观点来看, 应从完全光滑一直到完全粘着(或库伦摩擦)为止的二种极端的界面性态, 来慎重地估算摩擦的影响。研究完全粘着问题, 若计及基础的柔度, 则是一个复杂的数学问题。研究大多集中在与弹性半空间有联系的刚性基础问题上(例如, 参阅Mossakowski, 1954; Galín, 1961; Keer, 1967; Spence, 1968, 1975; de Pater和Kalker, 1975)。例如, Mossakowski (1954), Keer (1967) 以及Spence (1968) 曾研究过有关圆形刚性基础与各向同性弹性半空间粘着接触时轴对称的Boussinesq问题。可以发现, 当泊松比 ν_s 为1/2时, 粘着力对最后所得到的刚性沉降毫无影响(即刚性沉降与无摩擦的情况完全相同)。当 $\nu_s \rightarrow 0$ 时, 粘着接触情况的沉降较之无摩擦一方的沉降要小(约减少9%)。通常, 粘着或摩擦的总的影 响是减少基础出现的沉降(Shield和Anderson, 1966)。只有当 $\nu_s \rightarrow 0$ 时, 界面处法向接触应力的分布随之同样变化。当考虑到基础的极端易弯性时, 摩擦或粘着对沉降的影响就变得非常突出。因此, 在处理位于可压缩土介质上柔度很大的基础时, 我们可以预料到粘着效应会据有十分重要的意义。除了要规定界面处的摩擦特征外, 还须要规定可能存在的有关分离或脱层的条件。从物理的观点来看, 假设无摩擦的界面只能支撑压缩的表面力(即无拉或单向接触)是合理的。许多结构物基础所含有的自重足以防止任何接触损失。要列出正确的关于土与基础相互作用分析

的界面条件极为困难,只有依靠实际观测资料才能解决。缺少这种资料时,依据界面无摩擦的假设而对特定的土与基础相互作用所提出的解析解只能是作为有用的初步近似。记住这些局限性,贯穿全书,我们都将假设在理想化土介质与基础间的界面是光滑的并允许支撑拉应力。

1.4 分析方法

根据所规定的土介质的变形特征,基础的挠曲性态以及界面处的条件,土与基础相互作用问题基本上可归结为界面处分布接触应力的确定。故光滑接触的假设仅保留接触应力的法向分力而使相互作用问题的分析大为简化。一旦接触应力被定出后,就可以算出基础的挠度、挠曲弯矩和剪力以及理想化土介质中的应力和位移。分布接触应力的计算可用下述任何一种方法完成:(i)解析法,(ii)叠加法,(iii)近似解析法,(iv)变分法或(v)数值法。第一种方法所提出的解有:(a)无限板的平面应变问题,(b)有限宽无限长梁的三维问题以及(c)无限板的轴对称问题。这些问题中,对于板(或梁)的挠度、弯矩、剪力及接触应力的每一个解都可以用无穷积分的形式表示。位于Winkler介质或双参数介质上有关的基础,在承载某些外荷的情况下,这些无穷积分可用特殊函数表示成比较简单的形式。各种理想化弹性土性态有效的广义解将在以后的各章内阐述。叠加法是利用这些解析解为有限范围的梁和板提供相应的解。第三种方法涉及到有限范围的梁和板,是用一系列均布应力区段来逼近界面处的分布接触应力而求得的。另一方法是将分布接触应力表示成一个幂级数,而这个幂级数是由空间变量来表示。接触应力取决于基础变位与理想化土介质表面位移间的相容条件以及整个基础的平衡方程。变分法是假设基础的挠度可用空间变量的已知函数来表示,并在其中引进一系列任意常数。所选择的函数要以近似或精确的方式满足特定问题的边界条件。令土与基础体系的总势能为最小,于是就给出一组确定这些任意常数的方程式。上述四种分析方法特别适用于基础的平面几何形状比较简单的问题(例如,梁;矩形、方形或圆形板)以及很少显示出或不显示出材料空间变化特征的土介质(遍及土外形的整个平面范围)。对待几何形状复杂的基础以及具有材料空间变化特征的土介质,土与基础相互作用问题的各种数值分析方法是很有用的。差分法、联合松弛法以及有限元法,均可成功地用来分析这种特定类型的相互作用问题。

1.5 土与基础相互作用分析领域

位于土介质上基础设计的合理方法应当考虑土介质的变形特征及基础的柔性。这类相互作用问题的分析总是需要进行一定数量的数学推导和计算工作的。用土的特性,或者是用实验室或现场所确定的各种材料参数的精确性来估量基本假设的正确性,像这样的分析费力不小,是否值得还很难说。在一定程度上这是一种无可非议的批评。但另一方面,设计者必须懂得这样一个事实,即土与基础相互作用分析的传统方法是很少有或者根本就没有科学根据的。例如,常用的基础结构设计就是以刚度为无穷大的基础性态和接触应力呈均匀分布、平面分布或抛物线分布为根据的。它完全不考虑土的变形特征和基础的挠曲性质。实质上,这种初步分析违反了超静定结构分析的基本原理。后面几章所讨论的弹性分析方法可进一步为结构物基础的设计提供合理的依据。必须懂得,土与基础相互作用问题的完全分析方法还必须计及基础与结构物之间的相互作用。结构物的刚度或将结构物刚度传递给基础的方式对土与基础体系的性态有相当大的影响。一个完全而又切合实际的结构物基础的设计方法,不仅要考虑土与基础与结构物体系的力学问题,还要考虑在其施工中许多操作方法的因素。

第二章 用以分析土与基础相互作用的理想化土性质的模型

估价土介质对外荷载的反应，成为土与基础相互作用问题分析中一个十分重要的因素。只有根据土的全面的应力与应变知识才能作出这种估价。应力与应变关系是土的力学性质的数学描述——土的本构方程。土的一个全面的应力与应变关系，至少在理论上要提供在任何已知承载条件下、任意特定时间内土介质中的应力和应变。由于工程实际中可能会遇到各种各样的土和土的不同条件，看来是不大可能提出满足一种土性态所要求的广义的应力与应变关系的，这在分析土与基础相互作用方面尤其如此。这种局限性可由下列事实说明，即在土力学的发展史中，土的弹性、固结、蠕变和破坏过程全都是按材料性态单独的理论进行研究的。因此，岩土工程研究领域中的一个重要部分是致力于土的应力与应变与时间关系的研究。这些关系都是非线性的和不可逆的过程，（例如，可参阅Kravtchenko和Sireys, 1966; Parry, 1972以及Gudenus等人, 1977）。尽管在应用这些广义的本构关系去考察实验条件下所遇到的基本现象已得到某些进展，但用它去对土与基础相互作用中的边值问题进行解析解或数值解还存在着难以克服的困难。

实际土性态所固有的复杂性已导致了許多理想化土性态模型。特别是对土与基础相互作用问题分析模型的出现。弹性力学和塑性力学的经典理论在分析土力学问题时，是常用的两种理想化理论。说实在的，理想化的基础模型或者土的广义的应力与应变关系，甚至连实际土介质粗略的物理性质都不能正确描述。土反应或材料性态的这类模型最多可以说是对类土材料在一定的受力条件下提供了某些现象的有用说明。土性态的数学和物理上的理想化是减少在土力学中许多复杂边值问题的分析工作量的特殊手段。

在分析土与基础相互作用问题中，理想化土模型证明是特别有用的。对于土与基础相互作用问题，土的理想化性态的贴切选择未必是独一无二的。它与土的类型和土的条件，基础类型和外荷载的性质等各种因素有关。除此之外，对问题的更实际方面应予考虑，诸如施工方法、结构的用途和寿命以及经济上的考虑等。

在本章内，我们对若干理想化模型进行简要的阐述。从土与基础相互作用问题的观点来看，这些理想化模型不考虑土介质随时间变化的性态。每个理想化模型的反应或性质是用外力系作用下其所受的表面挠度来表征的。这些表面挠度通常代表土上部边界，即与基础接触处或土与基础界面处的位移特征，成为土与基础相互作用分析所需资料中必不可少的一部分。必须强调的是，通常，这些理想化模型主要是用来模拟土介质的反应而不是模拟土介质内各元素的反应。当然，在特定情况下，它们可以对土介质内各元素的应力和应变状态提供一个精确的描述。

2.1 土性态的弹性模型

这里我们将考虑纯粹显示弹性特征的土性质模型。从物理观点来看，在外力系作用下，一个弹性材料或一个弹性介质将会变形。当移去这些外力后，材料或介质重新恢复其原来的

形状。假如卸载曲线与加载曲线不相重合，则材料或介质显示出滞弹性的性质。在这种介质中，能量在一个加载循环时间内被消耗。因此，我们只将注意力集中于这样的土性态模型，即作用力与它所引起的位移之间的关系式可以用线性函数来表示。

2.1.1. Winkler模型

Winkler (1867) 所提出的土介质理想化模型是假设土介质表面任一点处的位移 w 与作用在该点的应力 q 成正比而与作用在其他各点的应力无关，即

$$q(x, y) = kw(x, y) \quad (2.1)$$

式中 k 称为地基反力系数，其量纲为单位长度上的应力。在文献中有迹象表明 (Korenev, 1960; Hetényi, 1966)：在Euler、Fuss、Bubnov和 Zimmermann 的著作中已经发现了这一假定。方程式 (2.1) 通常是 Winkler 模型的响应函数或核心函数。实际上，土介质的 Winkler 理想化是由一系列各自独立的弹簧单元所组成，其弹簧常数为 k 。这种土模型的一个重要特征是：在荷载作用的区域下立刻产生位移而在此区域之外位移为零 (图2.1)。而且可以看出，无论是土承受一个无限的刚性荷载或是承受一个均布的柔性荷载，受荷区域的位移将恒为常数。

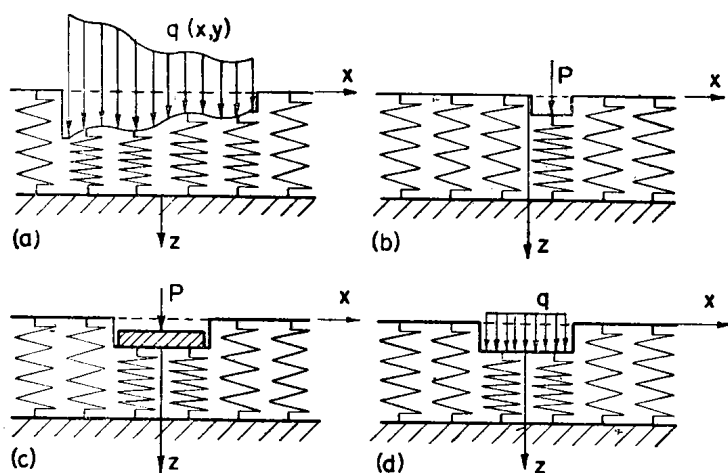


图2.1 由于以下荷载所引起的Winkler模型的表面位移：
(a) 非均布荷载，(b) 集中荷载，(c) 刚性荷载，(d) 均布柔性荷载。

除了土与基础相互作用外，还有许多工程问题可用这个模型非常精确地将实际使用条件理想化。在涉及浮式结构分析的问题中，例如浮桥和冰层受弯 (Wyman, 1950; Meyerhof, 1960; Lavrov, 1971; Hutter, 1975) 时，关系式 $q = kw$ 说明阿基米德原理的一个简单推论。Winkler模型还卓有成效地被用于许多其他问题中，如胶结搭接接头的应力分析 (Reissner 和 Goland, 1944; Cornell, 1953)、木料镶面的稳定分析 (March, 1950)、格栅结构分析 (Hetényi, 1946; Seely和Smith, 1965) 以及收缩配合问题的分析 (Eubanks, 1965)。Goodier和Kanninen (1966) 以及Kanninen (1973) 曾应用 Winkler 模型去研究弹性连续介质内裂纹末端处的应力状态。Selvadurai (1977c, 1978b) 发表了将Winkler模型进一步用以分析有裂纹的板的报告。

2.1.2 弹性连续介质模型

由于在Winkler模型中发生表面位移只限于受荷区域，就限制了对具有少许粘性或具有传力性土介质中的应用。一般的经验是：就土介质而论，不仅会在受荷区域下立即发生表面位移，而且也会在受荷区域以外的一定范围内发生。为了试图说明这种连续的性质，常将土

介质理想化为三维弹性连续体或弹性连续介质。通常，在外力系作用下，这种介质中的位移分布和应力分布仍保持连续。在土介质连续性模拟方面的原始促进动力来自于 Boussinesq (1885) 的工作。他研究了承受集中力的半无限、均匀的各向同性弹性体问题，该集中力与边界面正交。这个基本解就可以用来推导三维弹性土介质的响应函数。例如，在位于弹性半空间上板的三维问题的情况下，对于作用在弹性半空间表面上的集中荷载，Boussinesq 解可用来推导板挠度的奇异积分微分方程。利用半平面表面上作用有线荷载的 Flamant 问题 (Timoshenko 和 Goodier, 1970) 就可用同样的方法来分析二维梁或二维板问题。

通常，将经典弹性力学的连续介质理论应用于土与基础的相互作用时，会引起一个复杂的数学问题。对土与基础相互作用特别有意义的边值问题的许多解以及进一步研究的参考文献，都可在 Gorbunov-Posadov (1941, 1949)、Korennev (1954, 1960)、Galim (1961)、Lur'e (1964)、Vlazov 和 Leontiev (1966)、Harr (1966)、Hetényi (1966)、Rvachev (1967) 以及 Popov (1971) 的论著中找到。

2.1.2.a 各向同性弹性连续介质

在本节内，我们将详细研究可以有效地用来分析研究土与基础相互作用问题的各向同性弹性连续介质模型。线弹性半平面或半空间的响应函数是以弹性介质表面上的挠曲形状来表征的，弹性介质承受一个集中力或承受一个有限范围的均布荷载* (图2.2)。

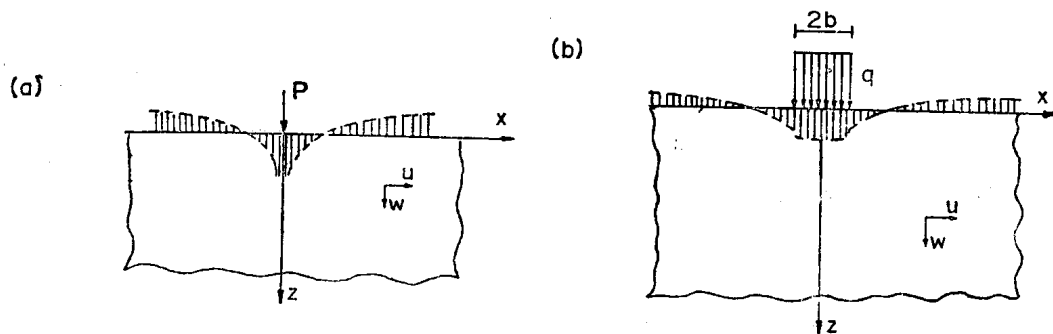


图2.2 弹性半平面典型的表面位移剖面图。
(a) 承受集中荷载 P ，(b) 承受宽度为 $2b$ 的均布荷载 q 。

(i) 平面问题。首先参照笛卡儿坐标系 x, y, z 来考虑这类二维问题。在此坐标系中，平面应变状态存在于 x, z 平面内。对于这样一种应变状态， y 方向的位移分量 v 为零而分别在 x 和 z 方向的位移 u 和 w 都完全是这些坐标的纯函数。非零的应力分量为 σ_{xx} 、 σ_{yy} 、 σ_{zz} 和 τ_{xz} 。而且，在平面应变中，各向同性弹性材料的应力与应变关系可写成

$$\begin{aligned} [\sigma_{xx}; \sigma_{zz}] &= \frac{E_0}{(1 - \nu_0^2)} [(\epsilon_{xx} + \nu_0 \epsilon_{zz}); (\epsilon_{zz} + \nu_0 \epsilon_{xx})] \\ \tau_{xz} &= \frac{E_0}{2(1 + \nu_0)} \gamma_{xz} \end{aligned} \quad (2.2)$$

式中

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \epsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}; \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \quad (2.3)$$

在 (2.2) 中， E_0 和 ν_0 可用下式表示

$$E_0 = \frac{E_s}{(1 - \nu_s^2)}, \quad \nu_0 = \frac{\nu_s}{(1 - \nu_s)} \quad (2.4)$$

* 原书此处为 Stress —— 编辑注

式中 E_s 和 ν_s 为线弹性材料的弹性模量和泊松比,而应力 $\sigma_{yy} = \nu_s(\sigma_{xx} + \sigma_{zz})$ 。承受作用于表面的法向集中线荷载 P 的各向同性弹性半平面内的应力和位移〔图2.2(a)〕首先是由Flamant (Timoshenko和Goodier, 1970) 提出的。 z 方向的表面位移可写成为

$$w(x, 0) = \frac{2P(1-\nu_s^2)}{\pi E_s} \log |x| + c \quad (2.5)$$

式中的 $|x|$ 为 x 的具体值而 c 为一任意常数。例如,当 $c = -2P(1-\nu_s^2) \log(d)/\pi E_s$ 时,我们可以指定点 $x=d$ 处的竖向位移为零。在原点($x=0$)处,(2.5)给出一个无穷大的位移值。为了消除这一缺陷,必须假设这一分析不适用于原点附近的区域。对边界上的其他各点($|x| < \infty$), (2.5)可给出一定的位移值。

承受宽度为 $2b$ 〔图2.2(b)〕的均布法向荷载时,半平面的表面位移可用Fourier近似积分(Sneddon和Berry, 1958)或叠加法求得。在前一情况中, z 方向位移的普遍表达式可用下式表示

$$w(x, z) = \frac{2q(1-\nu_s)}{\pi G_s} \int_0^\infty \frac{e^{-\xi z}}{\xi^2} \{1 + \xi z\} \sin(\xi b) \cos(\xi x) d\xi \quad (2.6)$$

式中 q 为荷载的集度而

$$G_s = \frac{E_s}{2(1+\nu_s)} \quad (2.7)$$

为剪切模量。对于所有的 z 值,(2.6)所给出的位移值 $w(x, z)$ 在积分下限处发散。因此,介质中所有各点的位移 w 为无穷大。弹性半平面表面位移图的形状仍可选用一个笛卡尔直角坐标系而求得。该坐标系在坐标原点处与介质相连接而且在变形时随介质移动。这相当于从(2.6)中减去一个可用下式表示的不定常数 c' ,即

$$c' = \frac{2q(1-\nu_s)}{\pi G_s} \int_0^\infty \frac{\sin \xi b}{\xi^2} d\xi \quad (2.8)$$

将(2.8)用于(2.6)中,可得出半平面的相对表面位移(Gibson, 1967)为

$$w(x, 0) - w(0, 0) = \frac{q(1-\nu_s)}{\pi G_s} [2b \log b + (x-b) \log |x-b| - (x+b) \log |x+b|] \quad (2.9a)$$

或

$$w(x, 0) - w(0, 0) = -\frac{qb(1-\nu_s)}{\pi G_s} \left[\left(1 + \frac{x}{b}\right) \log \left|1 + \frac{x}{b}\right| + \left(1 - \frac{x}{b}\right) \log \left|1 - \frac{x}{b}\right| \right] \quad (2.9b)$$

利用叠加技术,对集中力时的表面位移(2.5)积分,可求得由于均布荷载所引起的表面位移。我们可得:

$$w(x, 0) = \frac{q(1-\nu_s)}{\pi G_s} \int_{-b}^b \log |x-\xi| d\xi \quad (2.10)$$

它给出

$$w(x, 0) = \frac{q(1-\nu_s)}{\pi G_s} [2b + (x-b) \log |x-b| - (x+b) \log |x+b|] \quad (2.11)$$

表面位移的表达式(2.9)和(2.11)对任一刚体的运动都是有效的。我们注意到,在受荷区域边界处,已变形的表面斜率是不定的,在某种意义上它们是奇异点。原点处的位移

为一固定大小的有限值, 即

$$w(0,0) = \frac{2qb(1-\nu_s)}{\pi G_s} \{1 - \log b\} \quad (2.12)$$

随着 (2.12) 中的对数项而产生的明显矛盾, 可在 (2.11) 中引入一个刚体位移而消除, 这样就可使某个固定距离 d^* 处的 $w(x,0)$ 为零。

(ii) 轴对称三维问题。在本节内我们将研究与圆柱面极坐标系 r, θ, z (其中 $r^2 = x^2 + y^2$ 及 $\tan \theta = y/x$) 的 z 轴相对称的三维变形这一类问题。

各向同性弹性半空间。由于法向集中力 P^* 的作用所引起的各向同性弹性半空间边界上的应力和位移, 首先是由 Boussinesq (1885) 给出的。 z 方向的位移 $w(r,z) [=u_z(r,z)]$ 为

$$w(r,z) = \frac{P^*}{4\pi G_s R} \left[2(1-\nu_s) + \frac{z^2}{R^2} \right] \quad (2.13)$$

式中 G_s, ν_s 为弹性材料的剪切模量和泊松比, 而 $R^2 = r^2 + z^2$ 。从 (2.13) 可以看出: 当 $r \rightarrow \infty$ (图 2.3) 时, 表面挠度变为零。

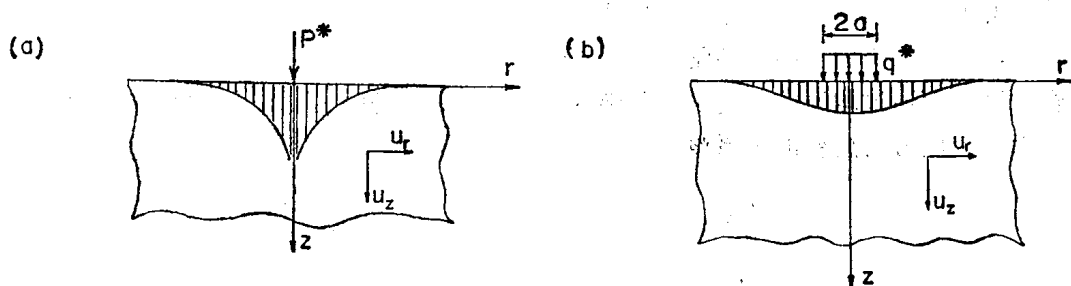


图 2.3 弹性半空间典型的表面位移剖面图。
(a) 承受集中荷载 P^* , (b) 承受半径为 a 的均布荷载 q^* 。

有限面积的轴对称荷载下的表面挠度剖面图, 可用 Hankel 积分变换法 (Sneddon, 1951) 或叠加方法求得。在第一种情况时, 由于半径为 a 及集度为 q^* 的均布应力所引起的弹性半空间的竖向位移可用下式表示

$$w(r,z) = \frac{q^*a}{2G_s} \int_0^\infty \frac{1}{\xi} [2(1-\nu_s) + \xi z] e^{-\xi z} J_0(\xi r) J_1(\xi a) d\xi \quad (2.14)$$

式中 $J_0(\xi r)$ 和 $J_1(\xi a)$ 分别为零阶和一阶第一类 Bessel 函数 (Watson, 1944)。利用叠加方法, $r > a$ 值时的半空间表面位移 $w(r,0)$ 可用下式表示

$$w(r,0) = \frac{2(1-\nu_s)q^*a}{\pi G_s} \cdot \frac{r}{a} \left[\int_0^{\pi/2} \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \sin^2 \theta \right)^{\frac{1}{2}} d\theta - \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \int_0^{\pi/2} \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \sin^2 \theta \right)^{-\frac{1}{2}} d\theta \right] \quad (2.15)$$

(2.15) 中的完全椭圆积分值可从各种 a/r 值的表 (参阅 Janke 和 Emde, 1960) 中查得。在边界 $r=a$ 处的表面挠度为

$$w(a,0) = \frac{2(1-\nu_s)q^*a}{\pi G_s} \quad (2.16)$$

对于处于受荷面积内 ($r < a$) 的各点, 可得