杨大淳
张鸿顺
刘　东
刘培娜
编译

新编
范氏代数

上册

科学出版社

新编
范氏代数

上册

杨大淳 张鸿顺
刘东 刘培娜 编译

科学出版社

1983

内 容 简 介

本书可以作为中学数学教学参考书，内容丰富，叙述严谨，深入浅出，循序渐进，便于学生接受．本书包括大量习题，有助于学生掌握各种概念和方法，提高解题能力．

本书可供中学教师和学生阅读，也可供高考复习之用．

新 编

范 氏 代 数

上 册

杨大淳 张鸿顺 刘 东 刘培娜 编译

责任编辑 张鸿林 杨贤英

科学出版社出版

北京朝阳门内大街137号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1983年1月第一版 开本：787×1092 1/32

1983年1月第一次印刷 印张：13 5/8

印数：0001—32,100 字数：312,000

统一书号：13031·2132

本社书号：2911·13—1

定价： 1.70 元

前　　言

以前《范氏代数》一书曾多年作为我国高中代数课的教材，因此，很多人都比较熟悉这本书．在内容方面，《范氏代数》包括了初等代数中的数系、代数式的恒等变形、方程、方程组、行列式和方程论等知识，还包括了概率、级数、连分式等知识，内容是丰富的；在阐述、论证的过程中，都是从具体到抽象，由特殊到一般，既便于接受，也不失推理的严密性，确是一本好的读物．以往这本书虽有多种中文译本，但大都为文言文，而且目前读者已很难见到．现在，我们重新编译了这本书．

在编译过程中，我们既尊重了原著的内容安排，也注意到我国中等学校数学教学的情况．具体地说，就是：

一、保持原书中大部分章节的内容，只对个别地方作了修改或补充．

二、对原书中某些章节，例如根式、不等式、数学归纳法等，进行了改写．

三、补充了平面向量、矩阵、逻辑代数、函数、随机变量、命题和命题的条件等内容．

四、删去了原书中个别的题目，也增加了一些题目．

本书编译稿各部分曾分别经惠仰淑、白尚恕、伊去病、刘吉江、王敏珍、刘清化、戴中器等同志审阅，提出了许多宝贵意见，谨在此表示衷心的感谢．

限于我们的水平，编译工作中必然存在不少错误和缺点，希望同志们予以批评指正．

编者

1981 年于北京

上 册 目 录

第一编　数 ……………………………………………… 1
一、自然数——计数法、加法和乘法……………………… 1
二、减法和负数 ………………………………………… 17
三、除法和分数 ………………………………………… 28
四、无理数和实数 ……………………………………… 40
五、虚数和复数 ………………………………………… 73
第二编　代数 ………………………………………… 82
一、绪论 ………………………………………………… 82
二、基本运算 …………………………………………… 96
三、一元一次方程 ……………………………………… 113
四、一次方程组 ………………………………………… 129
五、除法变形 …………………………………………… 158
六、有理整式的因式 …………………………………… 180
七、最高公因式与最低公倍式 ………………………… 203
八、有理分式 …………………………………………… 220
九、对称式 ……………………………………………… 256
十、二项式定理 ………………………………………… 264
十一、开方 ……………………………………………… 273
十二、无理函数,根式与分数指数……………………… 285
十三、一元二次方程 …………………………………… 318

十四、一元二次方程的讨论、极大与极小……………325
十五、用二次方程可解的高次方程 ………………333
十六、用二次方程可解的方程组 …………………342
十七、不等式 ……………………………………369
十八、一次不定方程 ……………………………386
答案 ……………………………………………392

第一编　数

一、自然数——计数法、加法和乘法

事物的集合和它们的基数

事物的集合. 在日常生活经验中，我们注意到，事物不仅仅是单独存在的，而且往往联系成群即集合. 1

手指、牛群、多边形的顶点都是事物的集合的一些例子.

对于某些事物，当我们不是个别地而是把它们当做一个整体来区别于另外一些事物，从而把它们整体地看成是我们关心的一个单一的对象时，就认为这些事物组成了一个集合(或集).

为了方便起见，我们把组成一个集合的每个事物叫做这个集合的元素.

等价的集合．一一对应. 由字母 A, B, C 与 D, E, F 组成的两个集合，它们有一种关系，就是能够把一个集合的所有元素与另一个集合的所有元素，一个对一个地配合成对. 例如，A 与 D 配，B 与 E 配，C 与 F 配. 2

无论什么时候，只要能够按上述方法使两个集合的所有的元素配合成对，我们就说这两个集合是等价的，并且说这种元素配对的方法使得两个集合之间有一对一的关系或一一对应关系.

定理. 如果两个集合都与第三个集合等价，那么它们彼此等价. 3

因为，根据假设可知这两个集合都与第三个集合有一一

对应的关系，我们把这两个集合中都与第三个集合中同一个元素相对应的元素看成是一对，那么这两个集合之间就有一一对应的关系了.

4 **基数**. 我们可以考虑把所有可能存在的事物的集合按照等价集合进行分类，任意给定的两个集合，它们是否属于同一类，分别按照它们之间是否可以建立一一对应的关系而定.

例如，由字母 A, B, C, D 与 E, F, G, H 组成的两个集合是属于同一类，而 A, B, C, D 与 E, F, G 这两个集合不属于同一类.

一类集合所共有的，又是这一类集合区别于它类集合的性质，是这一类集合中的一个集合所包含的元素的数目，即这个集合的基数. 换句话说:

一个集合中元素的数目即它的基数，是这个集合的本身或与这个集合有一一对应关系的一切集合所共有的性质.

还可以这样说:“事物的集合的基数，就是当重新排列集合中的事物，或者用其他事物一一替换集合中的事物时，这个集合仍保持不变的性质”. 或者说:“它是与集合中事物本身的特性及其在集合中的排列顺序都无关的性质”.

因为重新排列事物或者用另外的事物一一代替它们，只不过是把这个集合变换成与它等价的集合(§2). 在集合中进行这些变换的时候，这个集合保持不变的性质必定是与集合中事物本身的特性以及它们的排列顺序无关的.

5 **子集**. 当甲集合的元素是乙集合的某些元素而不是它的全部元素时，就说甲集合是乙集合的一个子集(这里所说的子集通常叫做真子集).

例如，集合 A, B, C 是集合 A, B, C, D 的一个子集.

由这个定义立即推得:

6 在甲、乙、丙三个集合中，如果甲是乙的子集，乙是丙的子

集，那么甲也是丙的子集．

有限集和无限集．当一个集合不能与它的任何子集等价时，这个集合叫做有限集；能与它的某一子集等价时，叫做无限集[1]． 7

例如，集 A, B, C 是有限集，因为它不能与 B, C 或者其他任何子集有一一对应的关系．

但是记号或符号的任何无限序列，例如数码的无限序列 1，2，3，4，…，都是一个无限集．

因为我们能够在整个的集合 1，2，3，4，…与它的自 2 以后的子集之间建立一一对应的关系，也就是在

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \cdots \tag{a}$$

与

$$2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ \cdots \tag{b}$$

之间，使 (a) 中的 1 与 (b) 中的 2 相配，(a) 中的 2 与 (b) 中的 3 相配，依此类推，这样就使 (a) 中的每一个数与 (b) 中的一个数相对应．

因此集合 (a) 与它的子集 (b) 等价，所以 (a) 是无限集．

基数的大小．设 M 与 N 表示任意两个有限集．它们之间的关系必定是下述三种情形之一： 8

1. M 与 N 等价；

或 2. M 与 N 的一个子集等价；

或 3. N 与 M 的一个子集等价．

在第一种情形，我们说 M 与 N 有相同的基数(§4)，或者说基数相等；在第二种情形，M 的基数小于 N 的基数；在第三种情形，M 的基数大于 N 的基数．

例如，如果 M 是字母 a, b, c 所组成的集合，N 是集合 d, e, f, g，于是 M 与 N 的一个子集如 d, e, f 等价．

---

1) 当然实际上我们不可能一一地考虑到无限集的所有的元素．我们认为一个集合被定义了，是指有一个用符号表示的法则，它使我们能够对于任何给定的事物判断出它是不是属于这个集合．

因此，M的基数小于N的基数，而N的基数大于M的基数.

9 **注.** 根据有限集的定义(§7)，这里所定义的关于"相等"、"大于"、"小于"的关系，都不能有双重意义.

例如，这个定义不能使M的基数同时既等于而又小于N的基数，因为这就意味着M与N等价同时M又与N的一个子集等价，因而N与N的一个子集等价(§3)，其结果N是无限集(§7).

10 **推论.** 如果甲、乙、丙三个基数，甲小于乙，乙小于丙，那么甲也小于丙.

因为，如果基数是甲、乙、丙的事物的集合分别用M, N, P表示，那么M与N的一个子集等价，N与P的一个子集等价，因此，M与P的一个子集等价(§3，§6).

11 **基数体系.** 从只含有单一元素的集合开始，反复"加"一新元素，就得到下面的基数表：

1. 只含有单一元素的集合的基数为|.
2. 加一个单一元素于第一类集合，所得的集合的基数为||.
3. 加一个单一元素于第二类集合，所得的集合的基数为|||.
4. 依此类推，永无止境.

我们把这些逐次得到的基数叫做"一"，"二"，"三"，···，并且用符号1，2，3，···表示之.

12 **基数体系的考察.** 把任何有限集的基数叫做有限基数，我们就上述的基数表作如下的考察.

第一、表中所含每一个基数都是有限基数.

集合|是有限的，因为它没有一个与它等价的子集(§7)，而且以后的各集合也都是有限的，这是根据在有限集中加一单一的元素所得的集合还是有限的[1]. 这样，因为|有限，||就有限；因为||有限，|||就有

---

1) 证明如下(见 G. Cartor, Math. Ann. Vol. 46, p. 490):

如果M是一有限集，e是一单一的元素，加e于M得到集合Me，那么

限；….

第二、每个有限基数都包含在这个表内.

根据定义，每个有限基数都是某一个有限集M的基数，但是我们能够作出一个记号集合|||…|使得它与任意给定的有限集M等价，只要其中每一个记号表示M中的一个对象. 而这个记号集合必有最后一个记号，因此它必包含在§11的表内；否则它将是无止境的，从而它与M都是无限集(§7).

第三、这些基数之中没有相等的.

这是由§8中的定义而得的必然结果. 因为，如前所证，所有的集合|，||，|||，…都是有限集，并且对于其中每两个集合，必定是一个集合与另一个集合的一个子集等价.

自然刻度. 方程与不等式

13 **自然数**. 我们把记号1，2，3，…(或者它们的名字“一”、“二”、“三”、…)叫做正整数或自然数. 因此，

Me也是有限的.

设$G\equiv H$表示集合G与集合H等价.

如果Me不是有限集，那么它必定与它的某一个子集等价(§7).

令P表示这一子集，于是$Me\equiv P$.

(1) 假设P不含e.

设f表示P中与Me中的e相配的元素，并且用P_1表示由P除去f的剩余部分.

于是由$Me\equiv P_1f$和$e\equiv f$，得$M\equiv P_1$.

但是，这是不可能的，因为M是有限集，而P_1是M的子集(§7).

(2) 假设P含有e.

P中的e与Me中的e不能相配，否则P的剩余部分，它是M的一个子集，将与M等价.

假定P中的e与Me中的其他元素g相配，而Me中的e与P中的f相配.

如果在这个假定的条件下，$M_e\equiv P$是正确的，那么重新配合e, f, g，使P中的e与Me中的e相配，P中的f与Me中的g相配，$Me\equiv P$也一定是正确的，但是这正是已经证明了的将会出现P的一个子集与M等价.

因此这个假设也是不可能的.

一个自然数是一个基数的记号或符号.

14 **自然刻度.** 在 §11 中已给出用自然数表示的基数的顺序,按照这个顺序排列这些自然数,我们就得到记号的无穷序列

1, 2, 3, 4, 5, …,

或"一"、"二"、"三"、"四"、"五"、…,我们就把它们叫做自然刻度,或者叫自然数的刻度.

15 刻度中的每一个记号表示到该记号为止的那一部分刻度中所包含记号的个数.

例如,4 表示记号 1,2,3,4 的个数. 因为记号 1,2,3,4 的个数与集合 |,||,|||,|||| 的个数相同,而这些集合的个数又与最末一个集合|||| 中线条的个数相同(§8). 由此可见一般.

16 **刻度的顺序特征.** 仔细观察自然刻度本身,它不过是一个不同记号的集合,其中存在第一个记号,也就是 1;紧接着是下一个记号,也就是 2;又紧接着是再下一个记号,也就是 3;如此下去,永无止境.

换句话说,自然刻度仅仅是一个不同记号的集合,这些记号是按照一个确定的和已知的顺序,有头无尾地一个接着一个地排列着.

从这种观点来看,自然数本身只不过是有顺序的符号,当我们列举刻度的时候,它们就按这个顺序出现(就时间来说).

17 刻度与元素是按照已知的确定的顺序排列着的其他的所有集合一样,显然有以下的性质:

1. 对于它的任意两个元素,我们可以说一个"在前"而另一个"在后",并且"在前"与"在后"这两个词,用于任意一对元素与用于任意另外一对元素时具有同样的意义.

2. 如果给定任意两个元素,我们总是能够确定哪个在前哪个在后.

3. 如果 a，b 和 c 表示任意三个元素，且 a 在 b 前，b 在 c 前，那么 a 在 c 前.

一个集合，或者已经具有上述性质，或者能够用我们自己选择的某种排列法则使它具有上述性质，无论哪种情况，我们都说这个集合是一个顺序体系.

第一种情况的例子有(1)自然刻度本身；(2)按时间顺序发生的事件的序列；(3)沿水平线从左到右排列着的一行点. 第二种情况的例子有按照姓氏笔画的次序排列着的人群.

一个集合中也可能有“相重的”元素. 例如，一组事件中 18
可能有两个或多个同时发生的事件.

当一个集合的不相重的元素符合上述 1，2，3 这三条关系，而相重的元素又使得：

4. 如果 a 与 b 相重，且 b 与 c 相重，那么 a 与 c 相重；

5. 如果 a 与 b 相重，且 b 在 c 前，那么 a 在 c 前，

都是正确的，那么这个集合叫做一个**有序集**.

自然数是按照它们**在刻度中的顺序关系**来表示基数之间 19
的大小关系的.

对于任意两个给定的基数，其中哪一个的自然数在刻度中出现在后，哪一个就较大.

而且关系：“在三个基数中，如果第一个小于第二个，且第二个小于第三个，那么第一个小于第三个”，在刻度中被表示为关系：“如果 a 在 b 前，且 b 在 c 前，那么 a 在 c 前”.

事实上，我们很少使用任何其他的方法来比较基数的大小. 我们不直接使用 §8 的方法来比较事物的集合的基数. 恰恰相反，我们用适当的自然数来代表他们，并且由这些自然数在刻度中出现的顺序关系来断定哪个大哪个小. 这个过程对于我们来说是不费思索的，因为刻度是如此鲜明地铭刻在我们的头脑之中，只要提出任意两个自然数，我们就能立刻辨认出哪个在前，哪个在后. 例如，如果我们已知 A 城人口是 120,000 人，而 B 城人口是 125,000 人，我们立刻可以断定 B 城的

居民多，因为我们知道125,000在刻度中出现在120,000之后.

20 **数的等式与不等式.** 请注意：下文中“数”这个词表示自然数(§13)，且字母 a, b, c 表示任意自然数.

21 当我们希望指出 a 与 b 是相同的数或者在自然刻度中“相重”时，就用等式

$a=b$，读做“a 等于 b”.

22 但是当我们希望指出在自然刻度中 a 在前和 b 在后时，就用不等式

$a<b$，读做“a 小于 b”；

或者

$b>a$，读做“b 大于 a”.

23 当然，严格来说，“等于”、“小于”、“大于”这些词不是对记号 a, b 本身，而是对它们所表示的基数来说的. 如“a 小于 b”这句话，只不过是“a 表示的基数小于 b 表示的基数”的缩写.

但是，就记号 a 与 b 本身来说，不等式 $a<b$ 所表示的全部意思是：在刻度中，a 在 b 的前边.

24 **等式与不等式的法则.** 由§17，§18和§21，§22中的定义立即可以得出：

1. 如果 $a=b$ 且 $b=c$，那么 $a=c$.
2. 如果 $a<b$ 且 $b<c$，那么 $a<c$.
3. 如果 $a=b$ 且 $b<c$，那么 $a<c$.

计　　数

25 算术所考虑的主要是自然数之间存在的顺序关系以及结合这些数的一些运算.

算术运算起源于计数.

26 **计数.** 为了知道已知物体的集合的基数是多少，就要计

数这个集合.

这个计数的过程是大家很熟悉的. 我们把物体中的一个标以"一",另一个标以"二",这样继续下去,一直到没有剩余物体为止(要仔细地运用这些记号"一","二",…,不要遗漏,要按它们在刻度中出现的次序,但是在选择物体本身时,可以按我们一时的兴致或我们认为方便的任何次序),而这个计数的过程终了的记号或标号正是我们所要探求的:即这个集合本身的基数的名称. 根据刻度的顺序的特性,这个最后的记号就告诉我们已经读过多少个记号了(§15),因此就知道这个集合中有多少个元素(§8).

这样,计数的过程可以叙述为:使要计算的集合与自然刻度的一部分(由"1"开始,以所计数的最后一个数为结尾的一部分)成一一对应 (§2).

注意在计数中自然数具有双重意义:(1)用它们的某一个子集作为纯粹的筹码,以实现计数的过程;(2)用最后一个数来记载计数的结果.

我们曾指出,选择物体本身的次序是无关紧要的. 可如下证明:

定理. 计数一个有限的物体的集合,不论怎样选择物体的次序,计数的结果都是相同的. 27

例如,假设对于某集合按照一种选择物体的次序 P 来计数,所得的结果是 99,而按另一种次序 Q 来计数,结果是 97.

于是由按次序 P 计数时前 97 个物体组成的集合,与由按次序 Q 计数时全体物体的集合等价,这是因为根据假设两者都可与自然刻度的前 97 个数相配(§3).

但是,这是不可能的,因为,这样就会使得这个集合的一个子集与整个集合等价,然而根据假设条件这个集合是有限集(§7).

28 **基数的另一种定义**. 上面的定理可以作为定义一个有限集合的基数的根据，也就是：

事物的有限集的基数是这个集合的一个特性，由于这个特性，我们无论以任何次序来计数这个集合，都将得到相同的自然数.

如果我们选择如同 §16 所定义的自然刻度作为我们讨论数的出发点，自然就会导致上述的基数的定义.

加　　法

29 **加法的定义**. 加 3 于 5，就是在自然刻度中找出位于 5 以后第三个位置的数.

在刻度上从 6 开始向后数三个数，即 6，7，8，就得到所求的数 8.

我们用符号＋表示这种运算，读作"加"，记作 $5+3=8$.

一般地，加 b 于 a，就是在自然刻度中找出位于 a 以后第 b 个位置上的数.

因为在刻度中没有最末尾的记号，所以这个数总能找到. 我们把它叫做 a 与 b 的和，并且用式子 $a+b$ 表示.

30 **注**. 用在刻度中向后计数而求出 $a+b$ 的过程，与向含有 a 个事物的集合一次一个地加入含有 b 个事物的集合的元素的过程，是步步对应的. 因此，(1) 后一过程的结果是含有 $a+b$ 个事物的集合 (§8)，(2) 如果 a 和 b 表示有限基数，那么 $a+b$ 也表示有限基数. 参看第 4 页的脚注.

31 因为 $a+1$，$a+2$，等等，表示 a 以后的第一个数，第二个数，等等，所以序列 $a+1$，$a+2$，…就表示刻度中 a 以后的整个部分.

因此 a 后边的任意已知数都可以表示为 $a+d$ 的形式，其中 d 是一个确定的自然数.

步骤. 用计数的方法加一个大数是非常费力的. 因此, 32
我们熟记较小数的和（加法表）, 并用以下各节所叙述的所谓加法"定律", 来求较大数的和.

加法定律. 加法是一种"可交换的"和"可结合的"运算, 33
也就是它适合于下面的两个定律:

交换律. $a+b=b+a$. 34

加b于a与加a于b, 所得结果相同.

结合律. $a+(b+c)=(a+b)+c$. 35

先加c于b再加所得的和于a, 与先加b于a再加c于所得的和, 所得的结果相同.

注. 事实上, 我们用 $a+b+c$ 代替 $(a+b)+c$, 并且约定 36
$a+b+c+\cdots$表示加b于a, 再加c于所得的和, 等等的结果.

这些定律的证明. 这些定律可以证明如下: 37

第一、交换律: $a+b=b+a$.

例如, 3+2 与 2+3 这两个和相等.

因为 3 + 2 表示在自然刻度中先数完 3 个数, 再数 2 个数所得的数. 这样,

被计数的集合: 1, 2, 3, 4, 5, (a)

筹　　码: 1, 2, 3, 1, 2, (b)

但是, 由于在记号集合 (a) 与 (b) 之间有一对一的关系, 而且每个一对一的关系都是相互作用的 (§2), 所以可以相互交换 (a) 与 (b) 所起的作用, 就是使 (b) 为被计数的集合, (a) 为筹码的集合.

于是求 3+2 相当于计数记号集合

1, 2, 3, 1, 2. (b)

同样, 求 2+3 相当于计数记号集合

1, 2, 1, 2, 3. (c)

但是, 由于(b)与(c)是由相同的记号组成的, 所不同的仅仅是记号的排列不同, 所以计数它们的结果是相同的(§27), 于是 3+2=2+3.

对于任意两个自然数a和b, 情况也是一样的.

第二. 结合律: $a+(b+c)=(a+b)+c$.