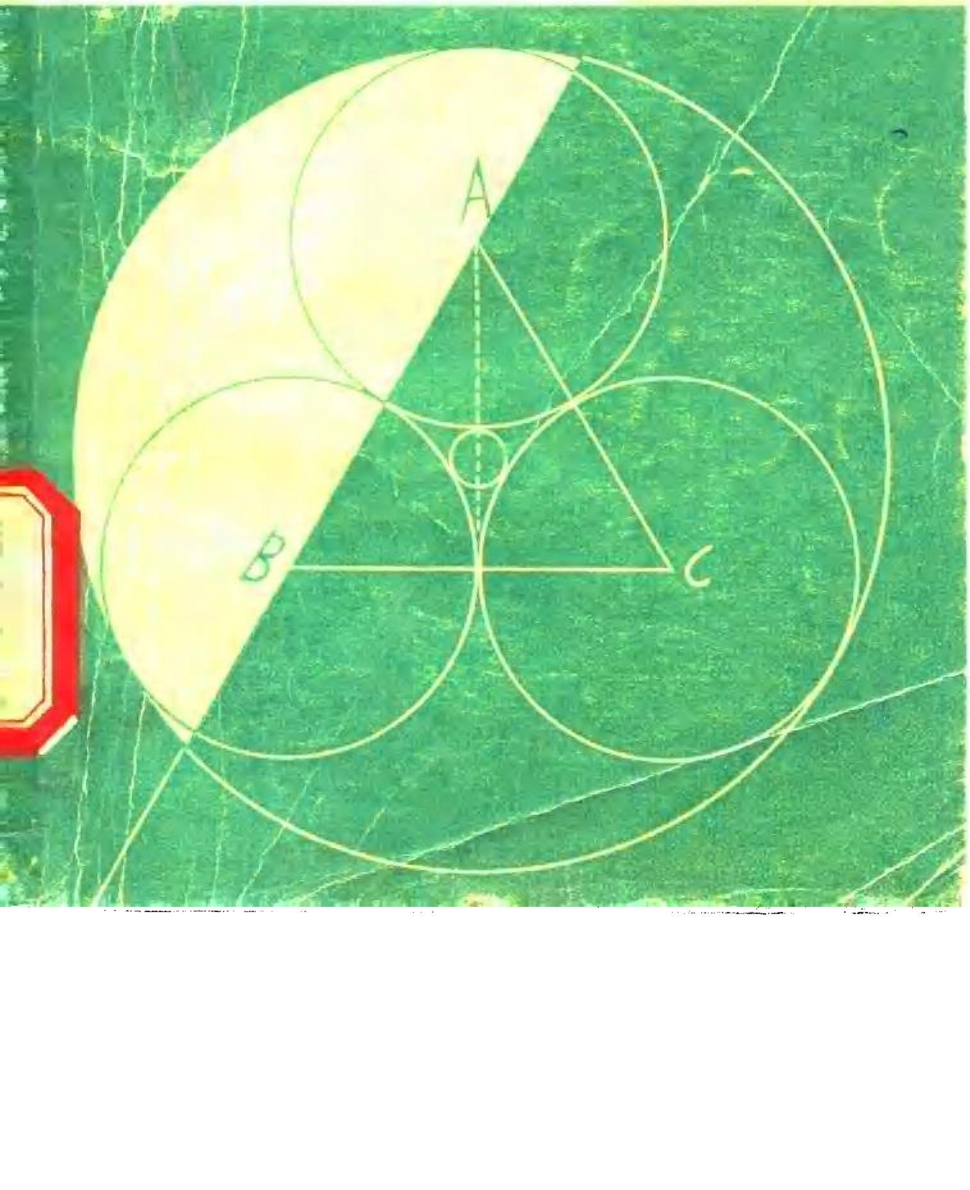
加拿大 美国

历届中学生数学竞赛题解



加拿大　美国

历届中学生
数学竞赛题解

福建师范大学数学系资料室编译

福建人民出版社

加拿大　美国
历届中学生数学竞赛题解
福建师范大学数学系资料室编译
*
福建人民出版社出版
（福州得贵巷27号）
福建省新华书店发行
福建新华印刷厂印刷
开本787×1092　1/32　3 3/4印张　83千字
1980年6月第1版
1980年6月第1次印刷
印数：1—230,500
书号：7173·409　　定价：0.29元

前　言

遵照毛主席关于"洋为中用"的指示，我们编译了《加拿大、美国历届中学生数学竞赛题解》。

关于加拿大历届中学生数学竞赛试题及其解答，我们译自《加拿大前十届数学奥林比亚》(The First Ten Canadian Mathematics Olympiads, 1969—1978)，并对其中某些试题另作不同解法。原书承加拿大西安大略大学(University of Western Ontario)地球物理系林衍立技师远道寄赠，特此志谢。

关于美国历届中学生数学竞赛(U.S.A.Mathematical Olympiads, 1972—1979)试题，我们摘译自下列美国期刊：

《数学杂志》(Mathematics Magazine)，

《数学教师》(Mathematics Teacher)。

第三、四届(1974、1975年)试题解答是从上述期刊译出的，其中某些试题另作不同解法；第五、六届(1976、1977年)试题解答是按上述期刊所登"题解提要"加以详解；第一、二、七、八届(1972、1973、1978、1979年)试题则由我系教师解答。

本书可供中学数学教师、中学生、上山下乡知识青年和数学爱好者阅读参考。由于时间匆促，且限于我们的水平，编译中难免存在缺点和错误，请读者批评指正。

福建师范大学数学系资料室

1980年1月

目　录

加拿大第一届(1969年)
中学生数学竞赛题解

1．证明：如果$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}$，并且$p_1$、$p_2$、$p_3$不全为零，那么对每个正整数n有

$$\left(\frac{a_1}{b_1}\right)^n=\frac{p_1a_1^n+p_2a_2^n+p_3a_3^n}{p_1b_1^n+p_2b_2^n+p_3b_3^n}.$$

【证】　令$k=\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}$，那么$a_1=kb_1$，$a_2=kb_2$，

$$a_3=kb_3.$$

$$\begin{aligned}&p_1a_1^n+p_2a_2^n+p_3a_3^n\\&=p_1(kb_1)^n+p_2(kb_2)^n+p_3(kb_3)^n\\&=k^n(p_1b_1^n+p_2b_2^n+p_3b_3^n),\end{aligned}$$

所以 $$\frac{p_1a_1^n+p_2a_2^n+p_3a_3^n}{p_1b_1^n+p_2b_2^n+p_3b_3^n}=k^n=\left(\frac{a_1}{b_1}\right)^n.$$

2．已知数c大于1，求证两数$\sqrt{c+1}-\sqrt{c}$，$\sqrt{c}-\sqrt{c-1}$的一个总是大于另一个。

【证1】　对于一切$c>1$都有

$$\sqrt{c+1}-\sqrt{c}<\sqrt{c}-\sqrt{c-1},$$

因为这个不等式同于下面不等式：

$$\sqrt{c+1}+\sqrt{c-1}<2\sqrt{c}，（注意两边都是正的）$$

$$(\sqrt{c+1}+\sqrt{c-1})^2<4c,$$

$$c+1+2\sqrt{c+1}\sqrt{c-1}+c-1<4c,$$

$$2\sqrt{(c+1)(c-1)}<2c,$$

$$\sqrt{c^2-1}<c,$$

$$c^2-1<c^2.$$

上式显然对一切c都成立。

【证2】 $\because\ \sqrt{c+1}+\sqrt{c}>\sqrt{c}+\sqrt{c-1}>0,$

$$\therefore \frac{1}{\sqrt{c+1}+\sqrt{c}}<\frac{1}{\sqrt{c}+\sqrt{c-1}},$$

即 $\sqrt{c+1}-\sqrt{c}<\sqrt{c}-\sqrt{c-1}$.

3. 设c是直角三角形斜边的长，另两边的长是a和b，求证$a+b\leqslant\sqrt{2}c$。等式什么时候成立？

【解1】 因 $a^2+b^2\geqslant 2ab,$

$$2(a^2+b^2)\geqslant 2ab+a^2+b^2=(a+b)^2,$$

$$\sqrt{2}\cdot\sqrt{a^2+b^2}\geqslant a+b,$$

而 $c=\sqrt{a^2+b^2},$

所以 $\sqrt{2}c\geqslant a+b,$

当且 仅当$a=b$时等式才成立，

【解2】 $a+b=c(\sin A+\cos A)$

$$=\sqrt{2}c\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin A+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos A\right)$$

$$=\sqrt{2}c\sin\left(A+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\leqslant\sqrt{2}c.$$

当且仅当$A+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$，即$A=\frac{\pi}{4}$时等式才成立，也就是当且仅当$a=b$时等式才成立。

4. 设ABC是等边三角形，P是三角形内任意点，作三角形三边的垂线 PD、PE、PF，D、E、F 是垂足，试证不

管P选取在哪里，总有

$$\frac{PD+PE+PF}{AB+BC+CA}=\frac{1}{2\sqrt{3}}.$$

【证】 令 $a=AB=BC=CA$，$\triangle ABC$的面积是$\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$，这个面积也是$\triangle PAB$，$\triangle PBC$，$\triangle PCA$面积的和，所以

$$\frac{\sqrt{3}}{4}a^2=\frac{a}{2}\cdot PD+\frac{a}{2}\cdot PE+\frac{a}{2}\cdot PF$$

$$=\frac{a}{2}(PD+PE+PF),$$

$$\frac{PD+PE+PF}{AB+BC+CA}=\frac{PD+PE+PF}{3a}=\frac{1}{2\sqrt{3}}.$$

5. 设ABC是边长为a，b，c的三角形，角C的平分线交AB于D，求证：CD的长是

$$\frac{2ab\cos\frac{C}{2}}{a+b}.$$

【证1】 如图，$\triangle BCD$的面积$=\frac{1}{2}ax\sin\frac{C}{2}$，

$$\triangle ACD\text{的面积}=\frac{1}{2}bx\sin\frac{C}{2},$$

$$\triangle ABC\text{的面积}=\frac{1}{2}ab\sin C=ab\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}.$$

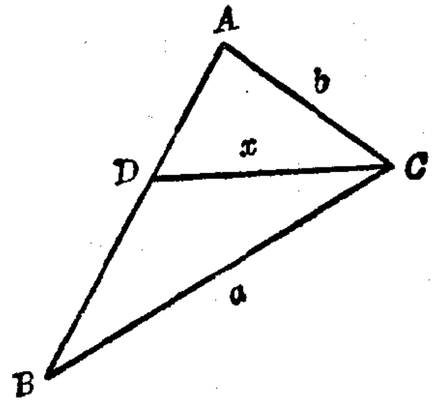
因此

$$\frac{1}{2}ax\sin\frac{C}{2}+\frac{1}{2}bx\sin\frac{C}{2}$$

$$=ab\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}.$$

所以 $CD=x=\frac{2ab\cos\frac{C}{2}}{a+b}.$

【证2】 由正弦定理得



$$AD=\frac{x\sin\frac{C}{2}}{\sin A},$$

$$BD=\frac{x\sin\frac{C}{2}}{\sin B},$$

相加得：

$$C=x\sin\frac{C}{2}\left(\frac{1}{\sin A}+\frac{1}{\sin B}\right)$$

$$=\frac{x}{2\cos\frac{C}{2}}\left(\frac{\sin C}{\sin A}+\frac{\sin C}{\sin B}\right)$$

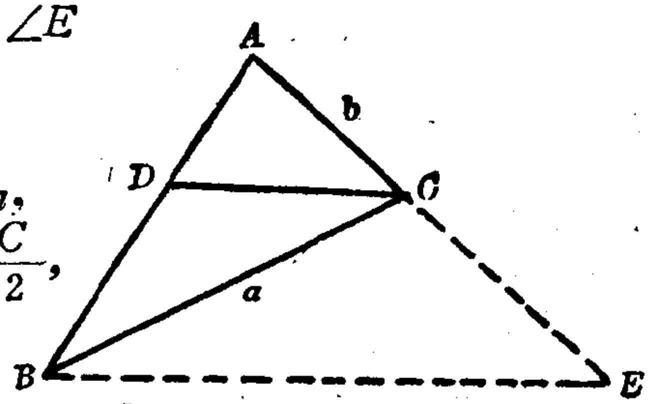
$$=\frac{x}{2\cos\frac{C}{2}}\left(\frac{c}{a}+\frac{c}{b}\right)=\frac{cx(a+b)}{2ab\cos\frac{C}{2}}.$$

所以 $CD=x=\dfrac{2ab\cos\frac{C}{2}}{a+b}$.

【证3】 过B作直线平行于CD，交AC延长线于E，则 $\angle CBE=\angle BCD$

$$=\angle ACD=\angle E$$

$$=\frac{\angle C}{2},$$



所以 $CE=CB=a$,

$BE=2a\cos\dfrac{C}{2}$,

而 $\dfrac{CD}{BE}=\dfrac{AC}{AE}$,

即 $\dfrac{CD}{2a\cos\frac{C}{2}}=\dfrac{b}{a+b}$,

所以 $CD=\dfrac{2ab\cos\dfrac{C}{2}}{a+b}$。

6. 求$1\cdot1!+2\cdot2!+3\cdot3!+\cdots+(n-1)(n-1)!+n\cdot n!$的和，这里$n!=n(n-1)(n-2)\cdots2\cdot1$。

【解】 因 $k\cdot k!=(k+1)!-k!$，$k=1, 2, 3, \cdots$，由此推出

$$\begin{aligned}&1\cdot1!+2\cdot2!+3\cdot3!+\cdots+(n-1)(n-1)!+n\cdot n!\\&=(2!-1!)+(3!-2!)+\cdots+[n!-(n-1)!]\\&\quad+[(n+1)!-n!]=(n+1)!-1.\end{aligned}$$

（这个结果也容易用归纳法证得）

7. 证明没有整数a，b，c满足$a^2+b^2-8c=6$。

【证】 每个整数具有形式$4n$，$4n+1$，$4n+2$，$4n+3$之一，它们的平方是$16n^2$，$16n^2+8n+1$，$16n^2+16n+4$，$16n^2+24n+9$，故被8除的余数是0，1或4，这三个数中任何两数（可以相同）的和都不等于6，所以a^2+b^2不可能等于$8c+6$，即没有整数a，b，c满足$a^2+b^2-8c=6$。

8. 设f是具有下列性质的函数：

(1) f(n)对每个正整数n定义；

(2) f(n)是整数；

(3) f(2)＝2；

(4) f(mn)＝f(m)f(n)，对一切m和n；

(5) f(m)＞f(n)，当m＞n时，

试证：f(n)＝n。

【证1】 首先注意

$2=f(2)=f(1\cdot2)=f(1)f(2)=f(1)\cdot2$，$\therefore f(1)=1$。

而且 $f(2^2)=f(2\cdot2)=f(2)f(2)=2\cdot2=2^2$，

$$f(2^3)=f(2\cdot 2^2)=f(2)f(2^2)=2\cdot 2^2=2^3,\text{ 等等。}$$

所以　对$k=0, 1, 2, 3, \cdots$有

$$f(2^k)=2^k.$$

现在考虑2的两个相继方幂及其间的整数：

$$2^k<2^k+1<2^k+2<\cdots<2^k+2^k-1=2^{k+1}-1<2^{k+1}.$$

它们的f值满足：

$$2^k<f(2^k+1)<f(2^k+2)<\cdots<f(2^{k+1}-1)<2^{k+1}.$$

这表明$f(2^k+j)$，$j=1, 2, \cdots, 2^k-1$是2^k和2^{k+1}之间的2^k-1个相异整数。而2^k和2^{k+1}之间恰好有$2^{k+1}-2^k-1=2^k-1$个整数，所以$f(2^k+j)=2^k+j$。

综上所述，对一切自然数n，都有

$$f(n)=n.$$

【证2】　如前，注意$f(2^k)=2^k$，$k=0, 1, 2, \cdots$。由性质(5)看出$f(m+1)>f(m)$，即$f(m+1)\geqslant f(m)+1$；于是　$f(m)\geqslant f(m-1)+1\geqslant f(m-2)+2\geqslant\cdots\geqslant f(1)+m-1=m$。　(1)

$$f(m+k)\geqslant f(m+k-1)+1\geqslant f(m+k-2)+2\geqslant\cdots\geqslant f(m+1)+k-1\geqslant f(m)+k.$$

再用反证法证明对一切自然数n，都有

$$f(n)\leqslant n. \tag{2}$$

假设对某个自然数n，有

$$f(n)>n.$$

因为　$2^n>n$，$2^n-n>0$，

所以　$2^n=f(2^n)=f(n+2^n-n)\geqslant f(n)+2^n-n>n+2^n-n=2^n$。

这是不可能的。

由(1)，(2)知对一切自然数n，有

$$f(n)=n.$$

【证3】 （归纳法）首先注意$f(1)=1$。现在假定对$k=1,2,\cdots,n$有$f(k)=k$。我们来证明$f(n+1)=n+1$。

如果 $n+1=2j$，那么 $1\leqslant j\leqslant n$，从而

$$f(n+1)=f(2j)=f(2)f(j)=2j=n+1.$$

如果 $n+1=2j+1$，那么 $1\leqslant j<n$，从而

$$\begin{aligned}2j=f(2j)<f(2j+1)<f(2j+2)&=f[2(j+1)]\\&=2f(j+1)\\&=2(j+1)=2j+2.\end{aligned}$$

这样 $2j<f(2j+1)<2j+2$，

而 $f(2j+1)$是整数，所以

$$f(2j+1)=2j+1=n+1.$$

因而对一切自然数n，有

$$f(n)=n.$$

9. 证明半径为1的圆内接四边形最短边小于或等于$\sqrt{2}$。

【证】 四边形的顶点把圆周分成四个弧，弧长的和为2π，所以最小弧的长至多是$\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$，对应的线段（连结这个最小弧的端点）的长$\leqslant\sqrt{2}$。

10. 设ABC是等腰直角三角形，它的腰长是1，P是斜边AB上一点，由P到其他两边的垂线足是Q和R，考虑三角形APQ和PBR的面积，以及矩形QCRP的面积，证明无论P怎样选取，这三个面积中最大的至少是$\frac{2}{9}$。

【证1】 按题意，只要证明所述三个面积中有一个不小于$\frac{2}{9}$就可以了。

设　$x=BR=RP=QC$，那么$1-x=RC=PQ=AQ$.

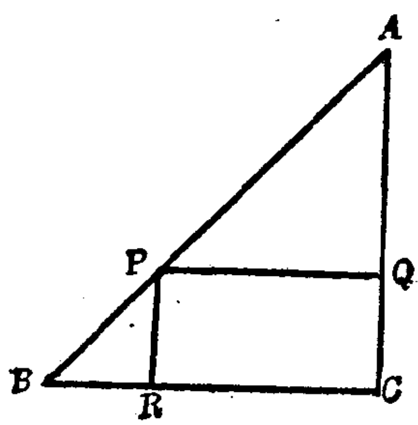
如果$x\geqslant\frac{2}{3}$，

那么

$$\triangle BRP\text{面积}=\frac{x^2}{2}\geqslant\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{2}{9}.$$

如果　$x\leqslant\frac{1}{3}$，那么$1-x\geqslant\frac{2}{3}$，从而

$$\triangle AQP\text{面积}=\frac{1}{2}(1-x)^2\geqslant\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{2}{9}.$$



如果　$\frac{1}{3}<x<\frac{2}{3}$，那么

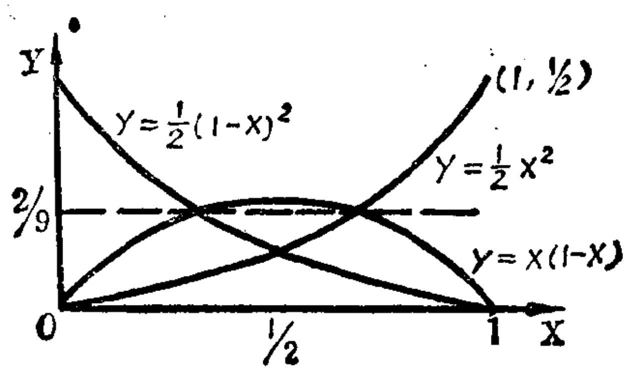
$$-\frac{1}{6}<x-\frac{1}{2}<\frac{1}{6},$$

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2<\frac{1}{36},$$

从而矩形$PQCR$面积$=x(1-x)=\frac{1}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$

$$>\frac{1}{4}-\frac{1}{36}=\frac{2}{9}.$$

【证2】 画三条曲线$y=\frac{x^2}{2}$，$y=x(1-x)$和$y=\frac{1}{2}(1-x)^2$，且注意到$0\leqslant x\leqslant 1$，三个y值中最大的至少是$\frac{2}{9}$。



加拿大第二届(1970年)
中学生数学竞赛题解

1．求所有三数组（x,y,z），使得其中任何一数加上其他两数的积，结果都是2．

【解】 求解的方程组是：

$$x+yz=2;\quad y+zx=2;\quad z+xy=2.$$

由第一（第二）式减去第二（第三）式，得

$$(x-y)(1-z)=0,\quad (y-z)(1-x)=0.$$

有四种可能情形：

$$x-y=0=y-z,\quad x-y=0=1-x,$$

$$1-z=0=y-z,\quad 1-z=0=1-x.$$

由第一种情形得$x=y=z$，代入原方程得

$$x^2+x-2=0,\quad x=1\text{或}-2.$$

由第二种情形得$x=y=1$，代入原方程得$z=1$．

由第三种情形得$y=z=1$，代入原方程得$x=1$．

由第四种情形得$z=x=1$，代入原方程得$y=1$．

所以所求的三数组是(1，1，1)和(−2，−2，−2)．

2．已知△ABC有钝角A和高线长h及k如图所示，证明$a+h\geqslant b+k$，并求在什么条件下$a+h=b+k$．

【解】 由相似三角形AEC和BDC得

$$\frac{h}{b}=\frac{k}{a}.$$

或 $$2ah=2kb.$$

又因 $b^2+k^2<CD^2+k^2$

$=a^2<a^2+h^2$,

所以 b^2+k^2+2kb

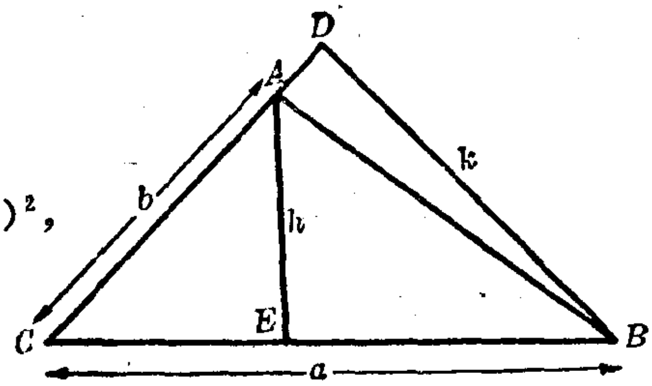
$<a^2+h^2+2ah$,

即 $(b+k)^2<(a+h)^2$,

或 $b+k<a+h$.

显然不可能

$b+k=a+h$.



3. 已知一组球，每个球染成红色或蓝色，每色至少有一个球，每个球重1磅或2磅，每种重量至少有一个球，证明有两个球具有不同的重量和不同的颜色。

【证】 不失普遍性，可设第一个球是红色，第二个球是蓝色。如果它们有不同的重量，问题就解决了。如果它们有相同的重量，例如同是1磅，就有2磅重的第三个球。如果这个第三球是红色的，那么第二球和第三球就有不同的重量和不同的颜色。如果第三球是蓝色的，那么第一球和第三球就有不同的重量和不同的颜色。

4. (a) 求一切正整数，它的首位数码是6，去掉这个6，所成整数是原整数的$\frac{1}{25}$.

(b) 证明没有这样的整数，去掉它的第一个数码所得结果是原整数的$\frac{1}{35}$.

【证】 首位数码是6的正整数具有形式

$$6\cdot10^n+m,\ 0\leqslant m\leqslant10^n-1.$$

(a) 这里条件是 $m=\frac{1}{25}(6\cdot10^n+m)$，化简为$m=2^{n-2}\cdot5^n$，所求的数具有形式$6\cdot10^n+2^{n-2}5^n=625\cdot10^{n-2}$，即

$$625，6250，62500，625000，\cdots$$

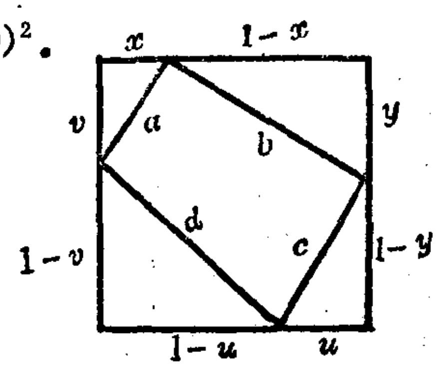
(*b*) 这里条件是 $m=\frac{1}{35}(6\cdot10^n+m)$ 或 $17m=3\cdot2^n\cdot5^n$，这样素数17必须是 $3\cdot2^n\cdot5^n$ 的因子，这是不可能的。

5．一个四边形在边长为1的正方形各边上各有一个顶点。证明四边形的边长a，b，c，d满足不等式

$$2\leqslant a^2+b^2+c^2+d^2\leqslant4.$$

【证】 如图，首先注意

$$\begin{aligned}&a^2+b^2+c^2+d^2\\&=x^2+(1-x)^2+y^2+(1-y)^2\\&\quad+u^2+(1-u)^2+v^2+(1-v)^2.\end{aligned}$$



现在考虑 $x^2+(1-x)^2$

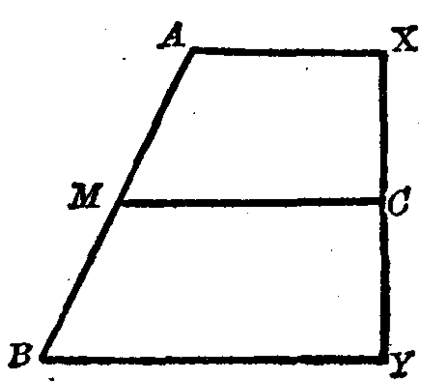
$$=2\left\{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\right\}.$$

因 $0\leqslant x\leqslant1$，容易推出

$$\frac{1}{2}\leqslant x^2+(1-x)^2\leqslant1,$$

x 改为 y，u 或 v，也有相类似的不等式．把四个不等式相加，便得所求结果。

6．已知三个不共线的点A，B，C，以C为中心作圆，使得由A和B到圆的切线是平行线。



【解】 设 M 是线段 AB 的中点，过 A 和 B 作直线平行于直线 MC，过 C 作直线垂直于直线 MC，设这直线与过 A 和 B 的直线相交于点 X，Y，那么 $CX=CY$，所以 C 为中