# 高等数学

下册

会高等数学委员会

科技大学出版

## 内 容 简 介

本书是为了满足各种类型大专班高等数学与工程数学的教学需要而编写的.全书分上、下两册.本书为下册，内容包括向量代数与空间解析几何、多元函数微积分、线性代数与概率统计.内容适当，流畅易懂，便于教学与自学.

本书也可作为本科某些专业（对高等数学要求稍低、授课学时较少的专业）的教科书.

本书由成都科技大学王明慈副教授、重庆大学谢树艺副教授主编，四川大学胡鹏、敖硕昌教授主审.

高等学校大专试用教材
高 等 数 学
下册
四川省数学会高等数学委员会编
责任编辑：王泽彬

成都科技大学出版社出版
成都科技大学印刷厂印刷
四川省新华书店发行
开本787×1092毫米 1/32 印张 20.625
1987年1月第1版 1987年1月第1次印刷
印数 1—6000 字数：446,000

书号：15475·18 定价：3.09元

# 目　录

# 第十二章　向量代数

解析几何是以代数方法研究几何图形的一门数学学科. 它把几何问题化为代数的计算问题来研究，使数与形密切地结合. 这种结合的基本方法是坐标法. 有了坐标，就把点和一组有序数联系起来，从而，进一步把图形和方程相联系.

研究空间解析几何的一个重要工具是向量，所以本章首先建立空间直角坐标系，并引进向量的概念，介绍向量的一些运算与应用.

## §1　空间直角坐标系

从平面直角坐标系的概念很容易推广到空间中而得到空间直角坐标系的概念：

三条互相垂直、具有共同交点且一般具有相同长度单位的数轴就构成了**空间直角坐标系**. 它们的共同交点称为**坐标原点**，记为 $O$. 三条数轴分别称为 $ox$ 轴，$oy$ 轴，$oz$ 轴. 它们统称为**坐标轴**. 它们的正方向要符合右手规则，即若将右手的大姆指和食指分别指着 $ox$ 轴和 $oy$ 轴的正向，则中指所指方向即为 $oz$ 轴的正方向（图12-1）. 由 $ox$ 轴和 $oy$ 轴、$oy$ 轴和 $oz$ 轴以及 $ox$ 轴和 $oz$ 轴所确定的平面分别称为 $xy$ 面、$yz$ 面、$zx$ 面，它们统称为**坐标面**. 三个坐标面把空间分成八个部分，每部分称为一个卦限. 以正的 $ox$,$oy$, $oz$ 轴

为棱的卦限是第Ⅰ卦限；以负的 $ox$ 轴，正 $oy$ 轴及正 $oz$ 轴为棱的卦限是第Ⅱ卦限；以负的 $ox$ 轴，负 $oy$ 轴，正 $oz$ 轴为棱的卦限是第Ⅲ卦限；以正 $ox$ 轴，负 $oy$ 轴、正 $oz$ 轴为棱的卦限是第Ⅳ卦限；而第Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳ卦限的下面依次为第Ⅴ，Ⅵ，Ⅶ，Ⅷ卦限（图 12-2）．

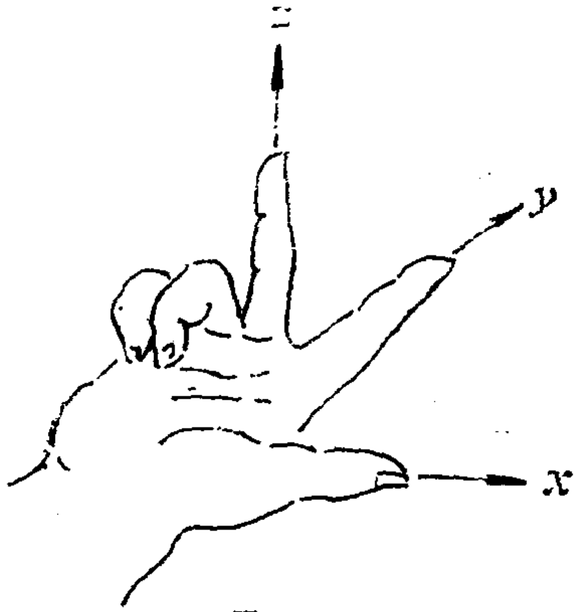

图 12-1

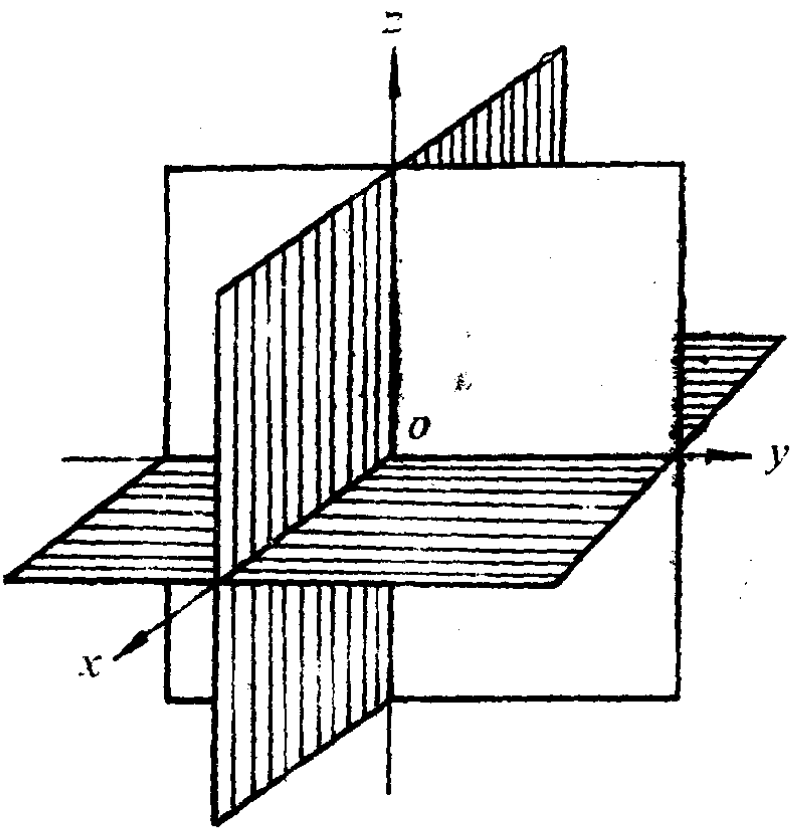

图 12-2

设 $M$ 为空间一已知点，过点 $M$ 作三个平面分别垂直于

$ox$ 轴、$oy$ 轴、$oz$ 轴，且分别交于点 $P$、$Q$、$N$（图12-3）.

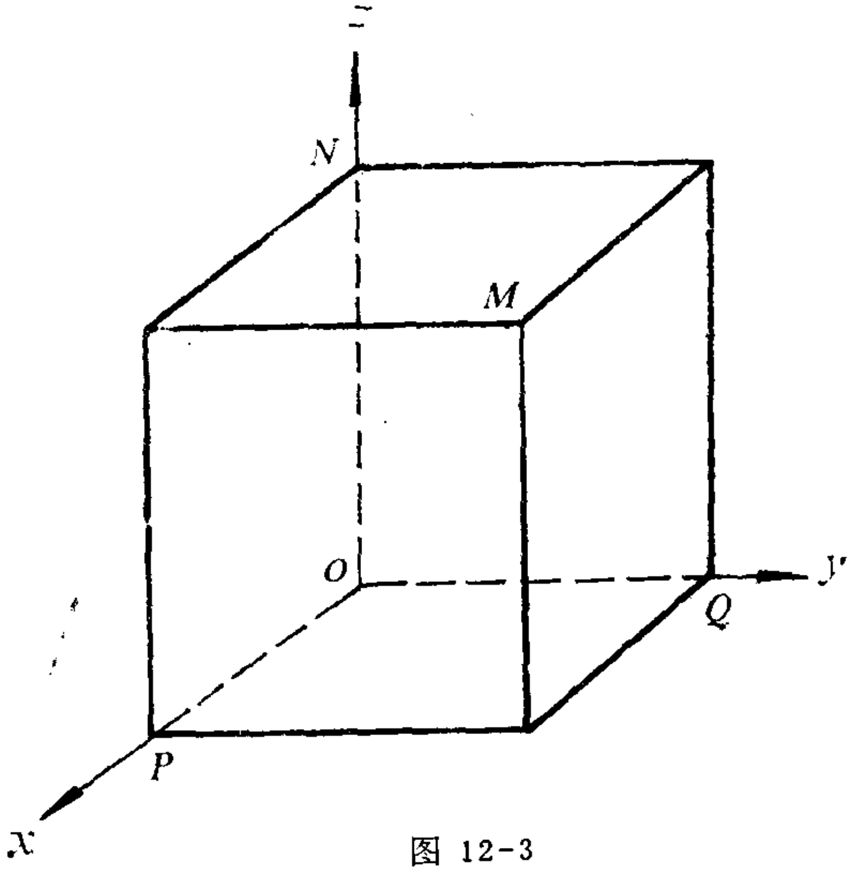


图 12-3

设这三点在 $ox$ 轴、$oy$ 轴、$oz$ 轴上的坐标分别为 $x$、$y$、$z$，这样由空间一点 $M$ 唯一地确定了一组有序实数 $x$，$y$，$z$，这组实数称为**点M的坐标**. 分别称 $x$、$y$ 和 $z$ 为点 $M$ 的横坐标、纵坐标和竖坐标. 记号 $M(x, y, z)$ 表示点 $M$，它的三个坐标分别为 $x$，$y$，$z$. 反过来，对于任意的有序数组 $x$，$y$，$z$，我们可以在 $ox$ 轴、$oy$ 轴和 $oz$ 轴上分别取坐标为 $x$、$y$、$z$ 的三点 $P$、$Q$、$N$，过 $P$，$Q$，$N$ 作平面分别垂直于 $ox$ 轴、$oy$ 轴和 $oz$ 轴，这三个平面交于一点 $M$. 这样，由有序数组 $x$，$y$，$z$ 唯一地确定了空间的一个点 $M$. 此点就是以有序数组 $x$，$y$，$z$ 为坐标的点（图12-3）.

由此可见，通过直角坐标系，空间的点和由三个实数构成的有序数组之间便建立了一一对应关系.

显然，空间中点 $M(x, y, z)$ 到原点的距离（图12-3）

$$|OM|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

坐标面上和坐标轴上的点，其坐标各有一定的特征．例如，$xy$ 面上的任一点都有 $z=0$；同样 $xz$ 面上的任一点都有 $y=0$；$yz$ 面上的任一点都有 $x=0$．$ox$ 轴上的任一点都有 $y=z=0$；$oy$ 轴上的任一点都有 $x=z=0$；$oz$ 轴上的任一点都有 $x=y=0$．

在每一卦限中，点的坐标的符号是确定的．八个卦限中坐标的符号依次为Ⅰ(＋，＋，＋)，Ⅱ(－，＋，＋)，Ⅲ(－，－，＋)，Ⅳ(＋，－，＋)，Ⅴ(＋，＋，－)，Ⅵ(－，＋，－，)，Ⅶ(－，－，－)，Ⅷ(＋，－，－)．

**例** 在空间直角坐标系中，画出以（1，2,-3）为坐标的点 $M$．

在 $xy$ 平面上，先确定点 $M_1(1, 2)$，过 $M_1$ 作 $M_1M\perp xy$平面，从 $M_1$ 往下取点 $M$ 使 $M_1M$ 的长等于三个单位，则 $M$ 点就是以（1，2，-3）为坐标的点，这个点在第Ⅴ卦限（图12-4）．

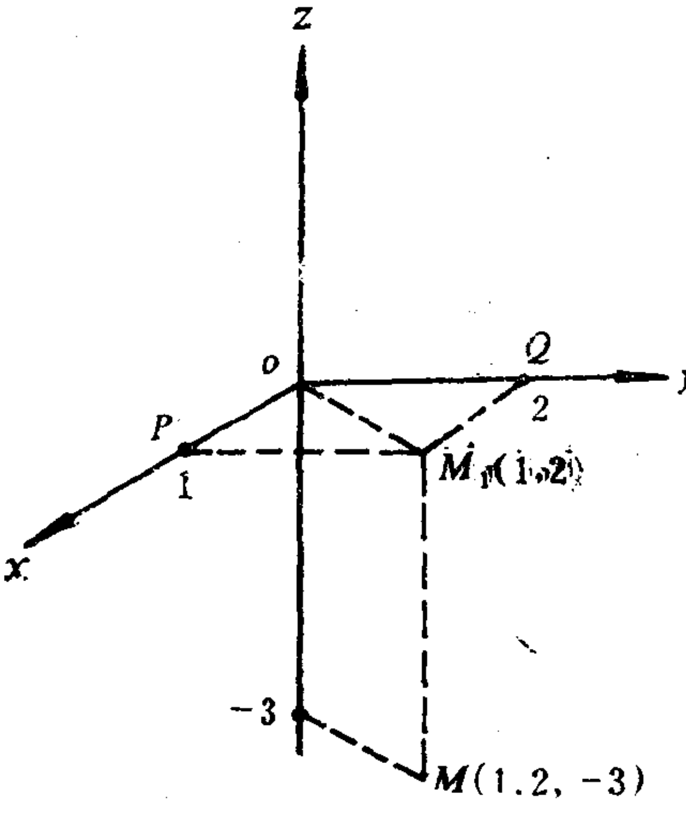


图 12-4

## §1 习　　题

1． 在空间直角坐标系中，画出下列各点：

$A(1, 2, 3)$；　$B(-3, 2, 4)$；　$C(1, -2, -4)$；
$D(2, -3, 4)$；　$E(2, 3, 0)$；　$F(0, 1, 2)$；
$G(1, 0, 0)$.

2． 求点 $(a, b, c)$ 关于：

（1）各坐标面；（2）各坐标轴；（3）坐标原点的对称点的坐标.

## §2 向量及其加减法，向量与数量的乘法

### I　向量的概念

在研究力学、物理学以及其他科学时所遇到的量，可以分为两类：一类量只有大小．例如面积、体积、温度、时间、质量、密度等都是属于这一类量，这一类量称为**数量**；另一类量，除了有大小外，还有方向．例如力、速度、加速度等都属于这一类量，这一类量称为**向量**.

在图形上，向量通常用一有向线段来表示．有向线段的长度表示向量的大小，有向线段的方向表示向量的方向．以 $A$ 为起点，$B$ 为终点的向量记为 $\overrightarrow{AB}$（图12-5）．有时也可用一个上面加箭头的字母来表示．例如，向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$ 等.


图12-5

向量的大小称为向量的**模**.向量 $\overrightarrow{AB}$，$\vec{a}$ 的模分别用 $|\overrightarrow{AB}|$，$|\vec{a}|$ 来表示. 两种特殊的向量是：模等于 1 的向量称为**单位向量**；模等于零的向量称为**零向量**，记为 $\vec{0}$，其方向可以看作是任意的.

当两个向量的方向相同，模相等时，我们就说它们是**相等向量**. 因此，经过平移后能完全重合的向量是相等的向量. 也就是说，一个向量经过平移后仍旧是原来的那个向量. 但经过旋转后的向量一般便变成另一个向量了.

## Ⅰ 向量的加减法

### 一、向量的加法法则及运算规律

速度的合成常用平行四边形法则. 仿此，我们对一般的向量规定其加法运算如下：已知两个向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$，平移 $\vec{a}$ 或 $\vec{b}$ 使它们的起点重合，以 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 为相邻两边作平行四边形，则以 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 的起点为起点的对角线向量就是 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 的和，记为 $\vec{a}+\vec{b}$（图12-6）.

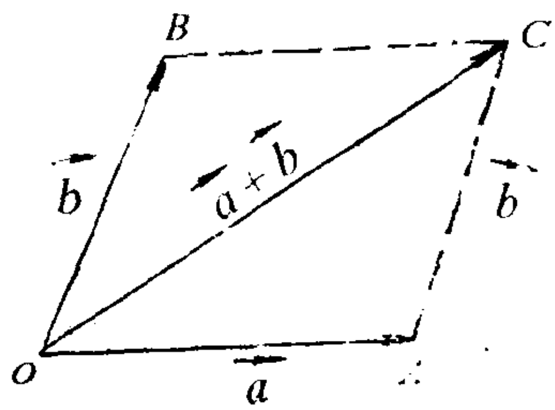

图12-6

象这种用平行四边形的对角线向量来规定两向量的和的方法称为向量加法的**平行四边形法则**.

由两向量相等的规定，在图12-6 中，$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，所

以我们得出两向量加法的**三角形法则**：已知两向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$，将 $\vec{b}$ 平移使其起点与 $\vec{a}$ 的终点重合，则从 $\vec{a}$ 的起点到 $\vec{b}$ 的终点的向量就是 $\vec{a}+\vec{b}$．

以上两种法则相比，三角形法则较简单．

如果两向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 在同一直线上（或者在平行直线上），定义它们的和是这样一个向量：当 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 指向相同时，和向量的方向与原来两向量同向，其模等于两向量的模的和；当 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 指向相反时，和向量的方向与较长向量的方向相同，而模等于两向量的模的差．

由两向量的加法很容易推广到有限多个向量的加法．从图12-7可以看出，只要把第二个向量平移使其起点重合于第一个向量的终点，把第三个向量平移使其起点重合于第二个向量的终点，仿此类推，则以第一个向量的起点为起点，以最后一个向量的终点为终点的向量就是这些向量的和．

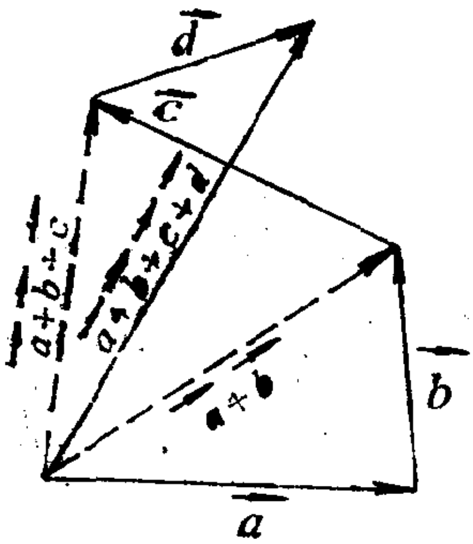


图12-7

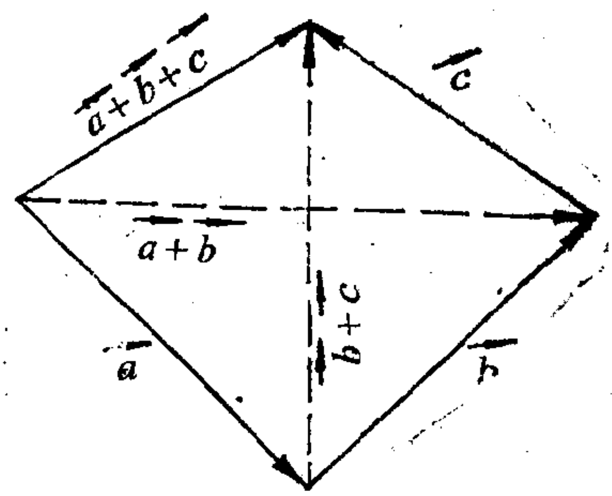


图12-8

向量加法的运算规律：

1. 交换律 $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$

2. 结合律 $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$

用三角形法则容易验证这两条规律．其中结合律的验证可参看图12-8．

应注意，由于三角形两边之和大于第三边，所以 $\vec{a}+\vec{b}$ 的模一般并不等于 $\vec{a}$ 的模与 $\vec{b}$ 的模的和，而是

$$|\vec{a}+\vec{b}|\leqslant|\vec{a}|+|\vec{b}|$$

二、向量的减法

设 $\vec{a}$ 为一向量，与 $\vec{a}$ 的模相等而方向相反的向量称为 $\vec{a}$ 的负向量，记为 $-\vec{a}$（图12-9）．因此，我们规定两向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 的差为 $\vec{a}$ 和 $-\vec{b}$ 的和

$$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$$

按此规定，我们将 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的起点放在一起，则 $\vec{b}$ 的终点到 $\vec{a}$ 的终点的向量就是 $\vec{a}-\vec{b}$，事实上把向量 $-\vec{b}$ 加到 $\vec{a}$ 上去也就是 $\vec{a}-\vec{b}$（图12-10）．

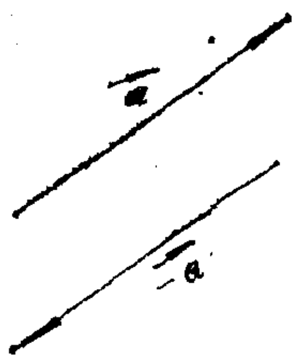


图12-9

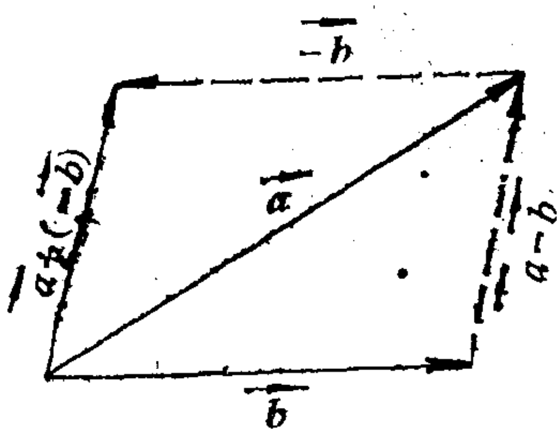


图12-10

## Ⅱ 向量与数量的乘法

我们规定数量$\lambda$与向量$\vec{a}$的乘积$\lambda\vec{a}$是由下列两个条件所确定的向量，即

（1） $\lambda\vec{a}$的模是$\vec{a}$的模的$|\lambda|$倍，即

$$|\lambda\vec{a}|=|\lambda|\cdot|\vec{a}|$$

（2） $\lambda\vec{a}$与$\vec{a}$平行．当$\lambda>0$时，$\lambda\vec{a}$与$\vec{a}$同方向；当$\lambda<0$时，$\lambda\vec{a}$与$\vec{a}$方向相反；当$\lambda=0$时，$\lambda\vec{a}$是零向量，即$\lambda\vec{a}=0\cdot\vec{a}=\vec{0}$．特别当$\lambda=-1$时，$(-1)\vec{a}$就是$\vec{a}$的负向量，即$(-1)\vec{a}=-\vec{a}$．按此规定，若向量$\vec{a}$与一个非零向量$\vec{b}$互相平行，则一定存在一个常数$\lambda$，使$\vec{a}=\lambda\vec{b}$．反之，若$\vec{a}=\lambda\vec{b}$（$\lambda\neq 0$），则$\vec{a}$与$\vec{b}$是互相平行的向量．

数量与向量的积的运算规律：

1． 结合律 $\lambda(\mu\vec{a})=\mu(\lambda\vec{a})=(\lambda\mu)\vec{a}$；

2． 第一分配律 $(\lambda+\mu)\vec{a}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}$；

3． 第二分配律 $\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$．

上面三式中，$\lambda$与$\mu$都是数量．

上面规律1与2的正确性可以从定义直接推出．

对于规律3，我们借助于图形说明如下：

因为$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{a}+\vec{b}$构成一个平行四边形的两邻边及一条对角线，作这三个向量与$\lambda$的乘积，就得到三个新向量$\lambda\vec{a}$，$\lambda\vec{b}$，$\lambda(\vec{a}+\vec{b})$．由平面几何知识，它们仍旧构成了一个与

原平行四边形相似的新平行四边形的两邻边及一条对角线（图12-11）．而这条对角线又正是$\lambda\vec{a}$，$\lambda\vec{b}$的和向量$\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$，由此可见

$$\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$$

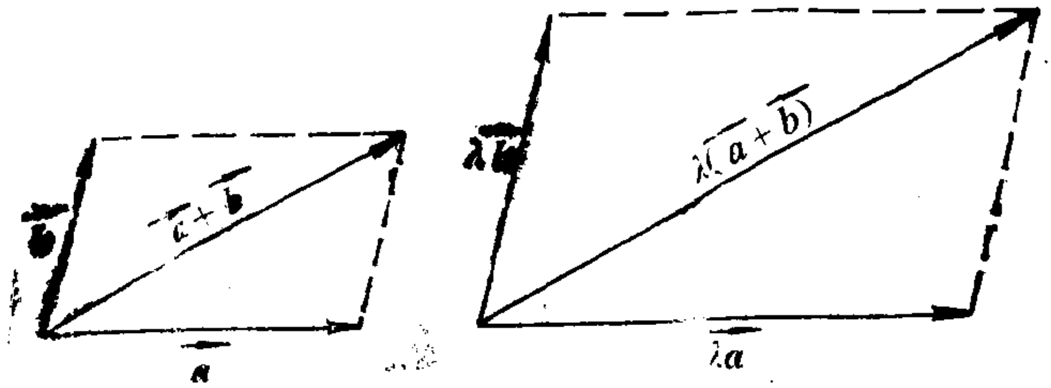


图12-11

前面已经定义过，模等于1的向量称为单位向量．设$\vec{a}^{\circ}$表示与非零向量$\vec{a}$同方向的单位向量，那末按照数量与向量的乘积规定：一个向量可以用它的模与跟它同方向的单位向量的乘积来表示，即$\vec{a}=|\vec{a}|\vec{a}^{\circ}$.

这个公式既简单又重要．因为它把向量$\vec{a}$的两个要素——模和方向分开了．$|\vec{a}|$是$\vec{a}$的模，$\vec{a}^{\circ}$表示$\vec{a}$的方向．

当$|\vec{a}|\neq 0$时，上面公式也常写为 $\vec{a}^{\circ}=\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$

### Ⅳ　向径

以坐标原点为起点，向一个点$M$引向量$\overrightarrow{OM}$，这个向量称为点$M$对于原点$O$的**向径**.

按此定义，空间中任一点 $M$ 与其对原点 $O$ 的向径 $\overrightarrow{OM}$ 之间是一一对应的. 因此，空间中点的位置可以由它的向径来确定. 由向量加法的三角形法则，空间中任一向量都可用它的两个端点的向径来表示（图12-12），即

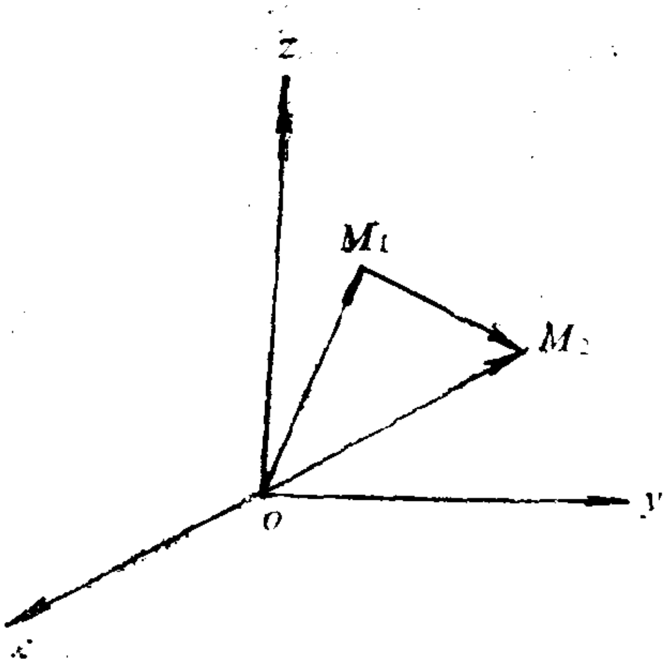


图12-12

$$\overrightarrow{M_1M_2}=\overrightarrow{OM_2}-\overrightarrow{OM_1}$$

**例 1** 已知空间中平行四边形 $ABCD$ 的三个顶点，试用向径表示其第四个顶点.

解 在平行四边形 $ABCD$ 中，设顶点 $A$，$B$，$C$ 为已知的，即它们的向径 $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$ 是已知的（图12-13）.

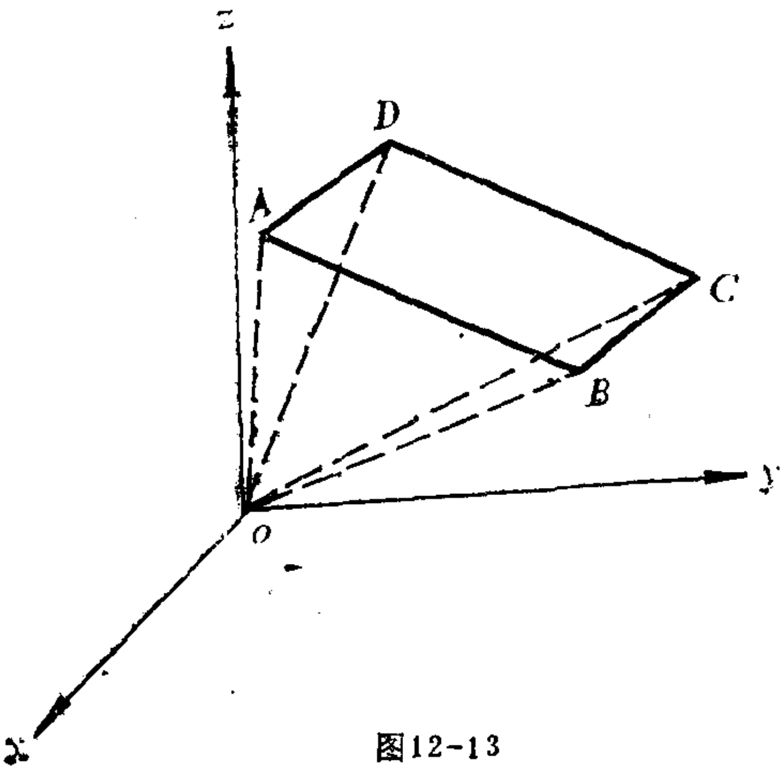


图12-13