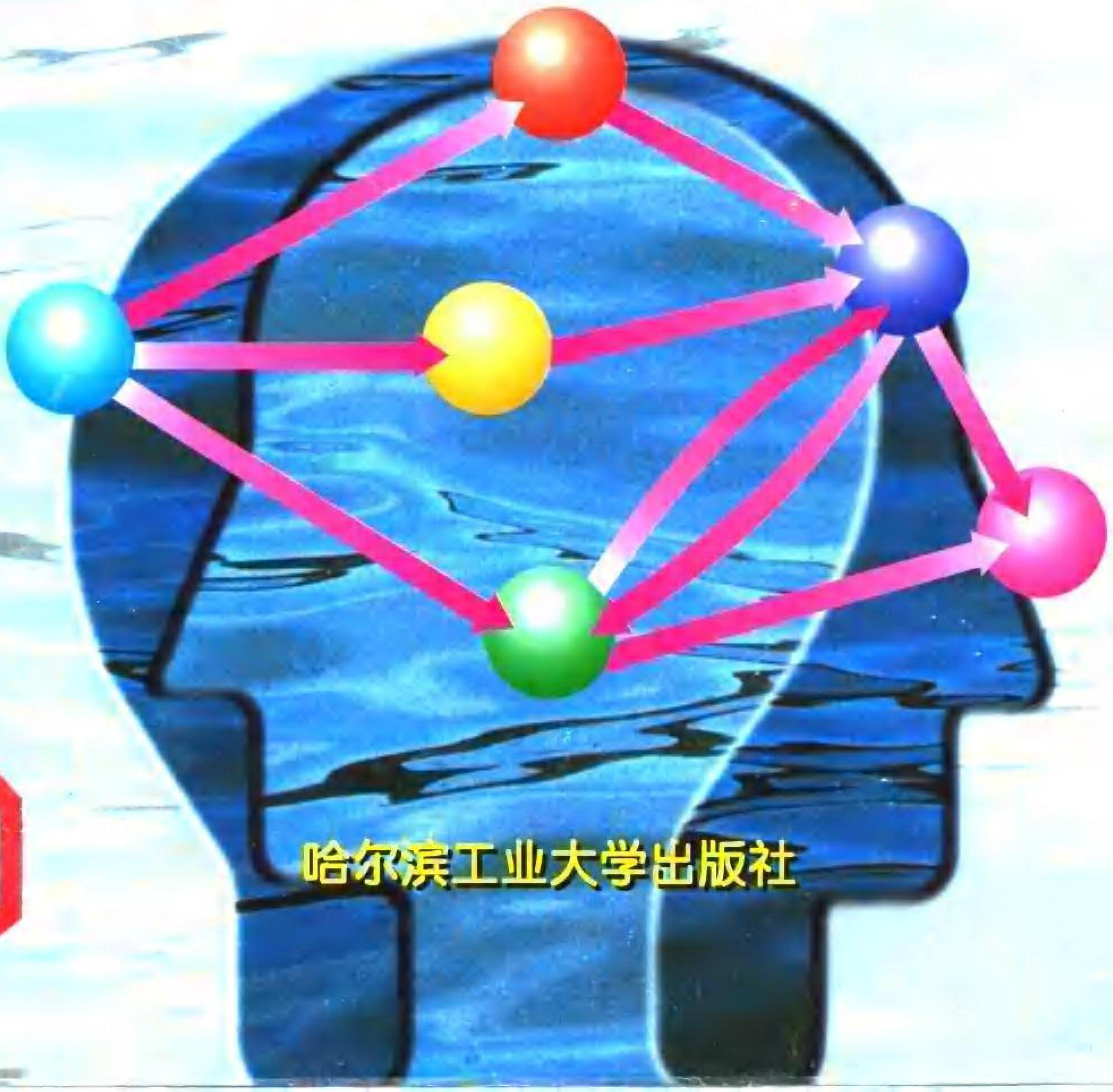
第三版

运筹学基础及应用

胡运权　主编



哈尔滨工业大学出版社

运筹学基础及应用

（第三版）

胡运权　主编

哈尔滨工业大学出版社

内 容 简 介

本书系统地介绍了运筹学的线性规划、整数规划、目标规划、图与网络分析、动态规划、存贮论、排队论、决策论、对策论各分支的主要理论和方法，内容上力求阐明概念和方法的经济、物理含义，用较多例子介绍各类模型的建立及它们在实际中的应用，在各章后附有习题，并在全书最后汇编了有一定难度的综合练习题，既可用于锻炼提高综合的构模能力，也可用作课堂的案例讨论。

本书可供高等院校经济和管理类专业的本科生、研究生作教材使用，也可作为各类管理干部学院以及厂矿企业、经济管理部门的干部及工程技术人员学习运筹学的自学或参考读物。

运筹学基础及应用

Yunchouxue Jichu ji Yingyong

（第三版）

胡运权　主编

*

哈尔滨工业大学出版社出版发行

哈尔滨工业大学印刷厂印刷

*

开本 787×1092　1/16　印张 17.5　字数 400 千字

1998 年 2 月第 3 版　1998 年 2 月第 7 次印刷

印数 62 001—72 000

ISBN 7-5603-0566-0/F·123　定价 18.00 元

第三版前言

本书自1985年初版、1993年再版以来，受到了广大读者的欢迎，已先后6次印刷6.2万册，被不少高等院校选作教材，1995年荣获国家教委优秀教材二等奖。根据一些读者的建议，以及我们在教学中积累的经验，决定对本书再次修订、补充。

同第二版比较，这一版在书末增加了20多道有一定难度的综合练习题，既可作为锻炼提高构模能力的综合训练，也可用作课堂案例讨论。对策论一章中增补冲突分析一节，删去第三章的第4、5两节，其余各章也都作了部分改动。本书的宗旨仍然是根据管理专业学生的基础、特点，侧重介绍运筹学的基本概念、理论和方法，努力阐明它们的物理和经济意义，并尽可能结合实际，培养对管理问题建立运筹学模型的思路、方法。

本书第一版的作者有胡运权、钱颂迪，由胡运权主编。以胡运权为主，有胡祥培、王秀强、钱国明参加完成了第二版的修订。第三版的修订仍以胡运权为主，胡祥培、钱国明参加完成。沙聚桢教授、徐永仁副教授对本书的修订提出了不少宝贵的意见和建议，谨在此表示谢意。

由于编者水平有限，掌握的文献资料有限，书中不妥之处在所难免，恳请广大读者批评指正。

编　者

1997年10月

目　录

绪　论

一、运筹学一词起源于本世纪30年代。据《大英百科全书》释义,"运筹学是一门应用于管理有组织系统的科学","运筹学为掌管这类系统的人提供决策目标和数量分析的工具"。我国《辞海》(1979年版)中有关运筹学条目的释义为,运筹学"主要研究经济活动与军事活动中能用数量来表达有关运用、筹划与管理方面的问题,它根据问题的要求,通过数学的分析与运算,作出综合性的合理安排,以达到较经济较有效地使用人力物力。"《中国企业管理百科全书》(1984年版)中的释义为,运筹学"应用分析、试验、量化的方法,对经济管理系统中人、财、物等有限资源进行统筹安排,为决策者提供有依据的最优方案,以实现最有效的管理。"

运筹学一词的英文原名为 Operations Research(缩写为 O.R.),可直译为"运用研究"或"作业研究"。由于运筹学涉及的主要领域是管理问题,研究的基本手段是建立数学模型,并比较多地运用各种数学工具,从这点出发,曾有人将运筹学称做"管理数学"。1957年我国从"夫运筹策帷幄之中,决胜千里之外"(见《史记·高祖本纪》)这句古语中摘取"运筹"二字,将 O.R. 正式译作运筹学,比较恰当地反映了这门学科的性质和内涵。

二、朴素的运筹学思想在我国古代文献中就有不少记载,例如齐王赛马和丁渭主持皇宫的修复等事。齐王赛马的事是说一次齐王和田忌赛马,规定双方各出上中下三个等级的马各一匹。如果按同等级的马比赛,齐王可获全胜,但田忌采取的策略是以下马对齐王的上马,以上马对齐王的中马,以中马对齐王的下马,结果田忌反以二比一获胜。丁渭修皇宫的故事发生在北宋时代,皇宫因火焚毁,由丁渭主持修复工作。他让人在宫前大街取土烧砖,挖成大沟后灌水成渠,利用水渠运来各种建筑用材料,工程完毕后再以废砖乱瓦等填沟修复大街,做到减少和方便运输,加快了工程进度。但运筹学这个名词的正式使用是在1938年,当时英国为解决空袭的早期预警,做好反侵略战争准备,积极进行"雷达"的研究。但随着雷达性能的改善和配置数量的增多,出现了来自不同雷达站的信息以及雷达站同整个防空作战系统的协调配合问题。1938年7月,波得塞(Bawdsey)雷达站的负责人罗伊(A.P.Rowe)提出立即进行整个防空作战系统运行的研究,并用"Operational Research"一词作为这方面研究的描述,这就是 O.R.(运筹学)这个名词的起源。运筹学小组的活动,开始局限于对空军战术的研究,以后扩展到海军和陆军,并参与战略决策的研究。这种研究在美国、加拿大等国很快得到效法。二次世界大战中,各国的运筹学小组广泛进行了如何提高轰炸效果或侦察效果,如何用水雷有效封锁敌方海面和其它战略战术方面的分析,为取得反法西斯战争的胜利作出了贡献。1939年苏联学者康托维奇(Л.В. Канторович)出版了《生产组织与计划中的数学方法》一书,对列宁格勒胶合板厂的计划任务建立了一个线性规划的模型,并提出了"解乘数法"的求解方法,为数学与管理科学的结合作出了开创性的工作。

战后,运筹学的活动扩展到工业和政府等部门,它的发展大致可分三个阶段:

1. 从 1945 年到 50 年代初，被称为创建时期。此阶段的特点是人数不多，范围较小，出版物、学会等寥寥无几。最早英国一些战时从事运筹学研究的人积极讨论如何将运筹学方法应用于民用部门，于 1948 年成立"运筹学俱乐部"，在煤炭、电力等部门推广应用运筹学取得一些进展。1948 年美国麻省理工学院把运筹学作为一门课程介绍，1950 年英国伯明翰大学正式开设运筹学课程，1952 年在美国喀斯（Case）工业大学设立了运筹学的硕士和博士学位。第一本运筹学杂志《运筹学季刊》（O.R.Quarterly）1950 年于英国创刊，第一个运筹学会美国运筹学会于 1952 年成立，并于同年出版运筹学学报（Journal of ORSA）。

2.50 年代初期到 50 年代末期，被认为是运筹学的成长时期。此阶段的一个特点是电子计算机技术的迅速发展，使得运筹学中一些方法如单纯形法、动态规划方法等，得以用来解决实际管理系统中的优化问题，促进了运筹学的推广应用。50 年代末，美国大约有半数的大公司在自己的经营管理中应用运筹学。另一个特点是有更多刊物、学会出现。从 1956 年到 1959 年就有法国、印度、日本、荷兰、比利时等十个国家成立运筹学会，并又有 6 种运筹学刊物问世。1957 年在英国牛津大学召开了第一次国际运筹学会议，1959 年成立国际运筹学会（International Federation of Operations Research Societies, IFORS）。

3. 自 60 年代以来，被认为是运筹学迅速发展和开始普及的时期。此阶段的特点是运筹学进一步细分为各个分支，专业学术团体的迅速增多，更多期刊的创办，运筹学书籍的大量出版以及更多学校将运筹学课程纳入教学计划之中。第三代电子数字计算机的出现，促使运筹学得以用来研究一些大的复杂的系统，如城市交通、环境污染、国民经济计划等。

我国第一个运筹学小组于 1956 年在中国科学院力学研究所成立，1958 年建立了运筹学研究室。1960 年在山东济南召开全国应用运筹学的经验交流和推广会议，1962 年和 1978 年先后在北京和成都召开了全国运筹学专业学术会议，1980 年 4 月成立中国运筹学会。在农林、交通运输、建筑、机械、冶金、石油化工、水利、邮电、纺织等部门，运筹学的方法已开始得到应用推广。除中国运筹学会外，中国系统工程学会以及与国民经济各部门有关的专业学会，也都把运筹学应用作为重要的研究领域。我国各高等院校，特别是各经济管理类专业中已普遍把运筹学作为一门专业的主干课程列入教学计划之中。

三、运筹学研究的基本特点是：考虑系统的整体优化、多学科的配合以及模型方法的应用。

系统的整体优化。所谓系统可以理解为是由相互关联、相互制约、相互作用的一些部分组成的具有某种功能的有机整体。例如一个企业的经营管理是由很多子系统组成，包括生产、销售、技术、供应、财务等，各子系统的工作好坏直接影响企业经营管理的好坏。但各子系统的目标往往不一致，生产部门为提高劳动生产率希望尽可能增大批量；销售部门为满足更多用户需要，要求增加花色品种；财务部门希望减少积压，加速流动资金周转，降低成本。运筹学不是对每一个决策行为孤立进行评价，而是把它同系统内所有其它重要的相互作用结合起来作出评价，把相互影响的各方面作为一个统一体，从总体利益的观点出发，寻找出一个优化协调的方案。

多学科的配合。一个企业的有效管理涉及到很多方面，运筹学研究中吸收来自不同领域、具有不同经验和技能的专家。由于专家们来自不同的学科领域，具有不同的经历经验，增强了发挥小组集体智慧提出问题和解决问题的能力。这种多学科的协调配合在研

究的初期，在分析和确定问题的主要方面，在选定和探索解决问题的途径时，显得特别重要。

模型方法的应用。在各门学科的研究中广泛应用实验的方法，但运筹学研究的系统往往不能搬到实验室来，代替的方法是建立这个问题的数学和模拟的模型。如果说辅助决策是运筹学应用的核心，建立模型则是运筹学方法的精髓。围绕着模型的建立、修正与应用，运筹学的研究可划分为以下步骤：

1. 分析与表述问题。首先对研究的问题和系统进行观察分析，归纳出决策的目标及制订决策时在行动和时间等方面的限制。分析时往往先提出一个初步的目标，通过对系统中各种因素和相互关系的研究，使这个目标进一步明确化。此外还需要同有关人员进一步讨论，明确有关研究问题的过去与未来，问题的边界、环境以及包含这个问题在内的更大系统的有关情况，以便在对问题的表述中明确要不要把整个问题分成若干较小的子问题，确定问题中哪些是可控的决策变量，哪些是不可控的变量，确定限制变量取值的工艺技术条件及对目标的有效度量等。

2. 建立模型。模型是真实系统的代表，是对实际问题的抽象概括和严格的逻辑表达。模型表达了问题中可控的决策变量、不可控变量、工艺技术条件及目标有效度量之间的相互关系。模型的正确建立是运筹学研究中的关键一步，对模型的研制是一项艺术，它是将实际问题、经验、科学方法三者有机结合的创造性的工作。建立模型的好处，一是使问题的描述高度规范化，如管理中，对人力、设备、材料、资金的利用安排都可以归纳为所谓资源的分配利用问题，可建立起一个统一的规划模型，而对规划模型的研究代替了对一个个具体问题的分析研究。二是建立模型后，可以通过输入各种数据资料，分析各种因素同系统整体目标之间的因果关系，从而确立一套逻辑的分析问题的程序方法。三是建立系统的模型为应用电子计算机来解决实际问题架设起桥梁。建立模型时既要尽可能包含系统的各种信息资料，又要抓住本质的因素。一般建模时应尽可能选择建立数学模型，但有时问题中的各种关系难于用数学语言描绘，或问题中包含的随机因素较多时，也可以建立起一个模拟的模型，即将问题的因素、目标及运行时的关系用逻辑框图的形式表示出来。

3. 对问题求解。即用数学方法或其它工具对模型求解。根据问题的要求，可分别求出最优解、次最优解或满意解；依据对解的精度的要求及算法上实现的可能性，又可区分为精确解和近似解等。

4. 对模型和由模型导出的解进行检验。将实际问题的数据资料代入模型，找出的精确的或近似的解毕竟是模型的解。为了检验得到的解是否正确，常采用回溯的方法。即将历史的资料输入模型，研究得到的解与历史实际的符合程度，以判断模型是否正确。当发现有较大误差时，要将实际问题同模型重新对比，检查实际问题中的重要因素在模型中是否已考虑，检查模型中各公式的表达是否前后一致，检查模型中各参数取极值情况时问题的解，以便发现问题进行修正。

5. 建立起对解的有效控制。任何模型都有一定的适用范围，模型的解是否有效要首先注意模型是否继续有效，并依据灵敏度分析的方法，确定最优解保持稳定时的参数变化范围。一旦外界条件参数变化超出这个范围时，及时对模型及导出的解进行修正。

6. 方案的实施。这是很关键但也是很困难的一步。只有实施方案后，研究成果才能

有收获。这一步要求明确:方案由谁去实施,什么时间去实施,如何实施,要求估计实施过程可能遇到的阻力,并为此制订相应的克服困难的措施。

四、运筹学按所解决问题性质上的差别,将实际的问题归结为不同类型的数学模型。这些不同类型的数学模型构成了运筹学的各个分支。主要的分支有:

线性规划 经营管理中如何有效地利用现有人力物力完成更多的任务,或在预定的任务目标下,如何耗用最少的人力物力去实现。这类统筹规划的问题用数学语言表达,先根据问题要达到的目标选取适当的变量,问题的目标通过用变量的函数形式表示(称为目标函数),对问题的限制条件用有关变量的等式或不等式表达(称为约束条件)。当变量连续取值,且目标函数和约束条件均为线性时,称这类模型为线性规划的模型。有关对线性规划问题建模、求解和应用的研究构成了运筹学中的线性规划分支。

非线性规划 如果上述模型中目标函数或约束条件不全是线性的,对这类模型的研究便构成了非线性规划的分支。

动态规划 有些经营管理活动由一系列阶段组成,在每个阶段依次进行决策,而且各阶段的决策之间互相关连,因而构成一个多阶段的决策过程。动态规划则是研究一个多阶段决策过程总体优化的问题。

图与网络分析 生产管理中经常碰到工序间的合理衔接搭配问题,设计中经常碰到研究各种管道、线路的通过能力以及仓库、附属设施的布局等问题。运筹学中把一些研究的对象用节点表示,对象之间的联系用连线(边)表示,点边的集合构成图。如果给图中各边赋予某些具体的权数,并指定了起点和终点,称这样的图为网络图。图与网络分析这一分支通过对图与网络性质及优化的研究,解决设计与管理中的实际问题。

存贮论 为了保证企业生产正常进行,需一定数量材料和物资的储备。存贮论则是研究在各种供应和需求条件下,应当在什么时间,提出多大的订货批量来补充储备,使得用于采购、贮存和可能发生的短缺的费用损失的总和为最少等问题的运筹学分支。

排队论 是一种研究排队服务系统工作过程优化的数学理论和方法。在这类系统中,服务对象何时到达以及系统对每个对象的服务时间是随机的。排队论通过找出这类系统工作特征的数值,为设计新的服务系统和改进现有系统提供数量依据。工业企业生产中多台设备的看管、机修服务等都属于这类服务系统。

对策论 一种用来研究具有对抗性局势的模型。在这类模型中,参与对抗的各方均有一组策略可供选择,对策论的研究为对抗各方提供为获取对自己有利的结局应采取的最优策略。

决策论 在一个管理系统中,采用不同的策略会得到不同的结局和效果。由于系统状态和决策准则的差别,对效果的度量和决策的选择也有差异。决策论通过对系统状态的性质、采取的策略及效果的度量进行综合研究,以便确定决策准则,并选择最优的决策方案。

五、运筹学与管理科学。从生产出现分工开始就有管理,但管理作为一门科学则开始于20世纪初。随着生产规模的日益扩大和分工的越来越细,要求生产组织高度的合理性、高度的计划性和高度的经济性,促使人们不仅研究生产的个别部门,而且要研究它们相互之间的联系,要当作一个整体研究,并在已有方案基础上寻求更优的方案,从而促进了运筹学的发展和应用。

运筹学的诞生既是管理科学发展的需要，也是管理科学研究深化的标志。管理科学是研究人类管理活动的规律及其应用的一门综合性交叉科学，这是运筹学研究和提出问题的基础。但运筹学又在对问题进一步分析的基础上找出各种因素之间的本质联系，并对问题通过建模和求解，使人们对管理活动的规律性认识进一步深化。例如管理中有关库存问题的讨论，对最高和最低控制限的存贮方法，过去只从定性上进行描述，而运筹学则进一步研究了在各种不同需求情况下最高与最低控制限的具体数值。又如计划的编制，过去习惯采用的甘特图只是反映了各道工序的起止时间，反映不出它们相互之间的联系和制约。而运筹学中通过编制网络计划，从系统的观点揭示了这种工序间的联系和制约，为计划的调整优化提供了科学的依据。

有人将运筹学概括为是用科学方法去了解和解释运行系统的现象，这种系统的含义非常广泛，从包含着人和在自然环境中运行的机器，一直到按一定规则运行的复杂社会结构。运筹学观察运行系统的现象，创造理论、模型来解释这些现象，描述在条件变化时会发生的事情，并根据新的观察来检验这些预言。运筹学应用科学方法来创建它的知识，它研究运行系统的现象，这正是被其它科学所忽略的部分。

任何一门科学的发展，一是受科学发展的内在客观规律支配，二是社会因素，特别是社会经济发展的需求。我国管理科学的发展正面临十分有利的机遇，但由于管理科学所研究的社会经济运动是物质运动的最高方式，因而它的发展更有赖于其它学科的发展，而运筹学则是从数量上揭示管理活动规律，促进管理科学发展的学科之一。

运筹学的研究应用已经在管理工作中带来了大量财富的节约。一般是问题的规模越大、越复杂，应用的效果越显著。如印度巴罗达市对汽车行车路线和时刻表进行研究改进，使该市公共汽车的载运系数提高了 11%，由于提高了公共汽车的利用率，减少使用车辆 10%。我国在国民经济各部门应用运筹学也已带来了巨大的财富节约。但运筹学毕竟是一门年青的科学，它的诞生还只有五十多年历史。一方面现有的运筹学模型分支还远远描述不了复杂的管理的现象，需要发展新的分支的模型，另一方面，实际的管理问题中社会、经济、技术、心理各种问题互相交织，需要各方面的专业人员协同配合。总之，运筹学是在解决实际管理问题中发展起来，而管理科学的发展又必将为运筹学的进一步研究发展开辟广阔的领域。

第一章　线性规划及单纯形法

§1. 一般线性规划问题的数学模型

1-1　问题的提出

生产和经营管理中经常提出如何合理安排，使人力、物力等各种资源得到充分利用，获得最大的效益，这就是所谓规划问题。

【例1】 用一块边长为 a 的正方形铁皮做一个容器，应如何裁剪，使做成的容器的容积为最大(见图 1-1)。

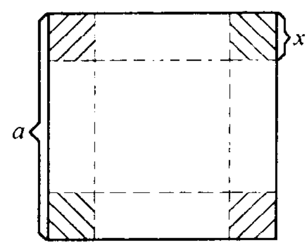


图 1-1

【例2】 某企业计划生产Ⅰ、Ⅱ两种产品。这两种产品都要分别在 A、B、C、D 四种不同设备上加工。按工艺资料规定，生产每件产品Ⅰ需占用各设备分别为 2、1、4、0 h，生产每件产品Ⅱ，需占用各设备分别为 2、2、0、4 h。已知各设备计划期内用于生产这两种产品的能力分别为 12、8、16、12 h，又知每生产一件产品Ⅰ企业能获得 2 元利润，每生产一件产品Ⅱ企业能获得 3 元利润，问该企业应安排生产两种产品各多少件，使总的利润收入为最大。

类似的例子还可以举出很多。如物资的调运：已知某些地区生产一种物资，另一些地区需要该种物资，在已知各地区间调运单位该种物资的运价的情况下，应如何制定调运方案，使其满足供需要求并使总运费为最少，等等。问题的提法可以各种各样，但归结起来不外乎：一是给定一定数量的人力、物力等资源，研究如何充分利用，以发挥其最大效果；二是已给定计划任务，研究如何统筹安排，用最少的人力和物力去完成。

对例 1 中提出的问题，一般只要在铁皮四个角上剪去四个边长各为 x 的正方形，折叠起来就做成一个容器，容积为 $V=(a-2x)^2\cdot x$。要使容积最大，就是要确定 x 的值，使 V 达到最大。

例 2 中提出的问题要复杂一些。假定用 x_1 和 x_2 分别表示Ⅰ、Ⅱ两种产品在计划期内的产量。因设备 A 在计划期内的可用时间为 12 h，不允许超过，于是有 $2x_1+2x_2\leqslant 12$。对设备 B、C、D 也可列出类似的不等式：$x_1+2x_2\leqslant 8$；$4x_1\leqslant 16$；$4x_2\leqslant 12$。企业的目标是在各种设备能力允许的条件下，使总的利润收入 $z=2x_1+3x_2$ 为最大。因此例 2 可归结为：

满足

$$\begin{cases} 2x_1+2x_2\leqslant 12 \\ x_1+2x_2\leqslant 8 \\ 4x_1 \qquad\ \leqslant 16 \\ \qquad 4x_2\leqslant 12 \\ x_1,x_2\geqslant 0 \end{cases}$$

使 $$z=2x_1+3x_2\to\max$$

比较上述两个例子，从数学角度讲，都是求极值的问题，但例 1 中除变量取值要求非负外无其它更多限制，这类问题可以用微积分中已学过的求极值的古典方法解决；而例 2 中变量的取值要受一系列条件的限制，求解这类带附加限制条件的极值问题是运筹学中规划论部分研究的内容。

1-2 线性规划问题的数学模型

通常称现实世界中人们关心、研究的实际对象为原型。模型是指将某一部分信息简缩、提炼而构造的原型替代物。数学模型则是对现实世界的一个特定对象，为达到一定目的，根据内在规律做出必要的简化假设，并运用适当数学工具得到的一个数学结构。从上述例子看到规划问题的数学模型包含三个组成要素：(1)决策变量，指决策者为实现规划目标采取的方案、措施，是问题中要确定的未知量；(2)目标函数，指问题要达到的目的要求，表示为决策变量的函数；(3)约束条件，指决策变量取值时受到的各种可用资源的限制，表示为含决策变量的等式或不等式。如果在规划问题的数学模型中，决策变量为可控的连续变量，目标函数和约束条件都是线性的，这类模型称作为线性规划问题的数学模型。

一般线性规划问题的数学模型可表示为以下几种形式：

$$\max\ (\text{或}\ \min)\ z=c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n$$

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n\leqslant(\text{或}=,\geqslant)b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n\leqslant(\text{或}=,\geqslant)b_2\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n\leqslant(\text{或}=,\geqslant)b_m\\ x_1,x_2,\cdots,x_n\geqslant 0\end{cases}\tag{1.1}$$

以上模型的简写形式为：

$$\max\ (\text{或}\ \min)\ z=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j$$

$$\begin{cases}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\leqslant(\text{或}=,\geqslant)b_i & (i=1,\cdots,m)\\ x_j\geqslant 0 & (j=1,\cdots,n)\end{cases}\tag{1.2}$$

用向量形式表达时，上述模型可写为：

$$\max\ (\text{或}\ \min)\ z=CX$$

$$\begin{cases}\sum_{j=1}^{n}P_jx_j\leqslant(\text{或}=,\geqslant)b\\ X\geqslant 0\end{cases}\tag{1.3}$$

式中 $C=(c_1,c_2,\cdots,c_n)$； $X=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}$； $P_j=\begin{bmatrix}a_{1j}\\a_{2j}\\\vdots\\a_{mj}\end{bmatrix}$； $b=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_m\end{bmatrix}$

用矩阵形式来表示可写为：

$$\max\ (\text{或}\ \min)\ z = CX$$

$$\begin{cases} AX \leqslant (\text{或} =, \geqslant) b \\ X \geqslant 0 \end{cases} \tag{1.4}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

A 称为约束方程组变量的系数矩阵,或简称约束变量的系数矩阵。

1-3 线性规划问题的标准形式

由于目标函数和约束条件内容和形式上的差别,线性规划问题可以有多种多样。为了便于讨论,规定线性规划问题的标准形式如下:

$$\max\ z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{1.5 a}$$

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i & (i = 1, \cdots, m) \qquad (1.5\ \text{b}) \\ x_j \geqslant 0 & (j = 1, \cdots, n) \qquad (1.5\ \text{c}) \end{cases}$$

标准形式的线性规划模型中,目标函数为求极大值(有些书上规定是求极小值),约束条件全为等式,约束条件右端常数项 b_i 全为非负值,变量 x_j 的取值为非负。对不符合标准形式(或称非标准形式)的线性规划问题,可分别通过下列方法化为标准形式。

1. 目标函数为求极小值,即为:

$$\min\ z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

因为求 $\min z$ 等价于求 $\max(-z)$,令 $z' = -z$,即化为:

$$\max\ z' = -\sum_{j=1}^{n} c_j x_j = \sum_{j=1}^{n} (-c_j) x_j$$

2. 约束条件为不等式。当约束条件为"$\leqslant$"时,如 $2x_1 + 2x_2 \leqslant 12$,可令 $x_3 = 12 - 2x_1 - 2x_2$ 或 $2x_1 + 2x_2 + x_3 = 12$,显然 $x_3 \geqslant 0$。当约束条件为"$\geqslant$"时,如 $10x_1 + 12x_2 \geqslant 18$,可令 $x_4 = 10x_1 + 12x_2 - 18$ 或 $10x_1 + 12x_2 - x_4 = 18$,$x_4 \geqslant 0$。x_3 和 x_4 是新加上去的变量,取值均为非负,加到原约束条件中去的目的是使不等式转化为等式,其中 x_3 称为松弛变量,x_4 一般称为剩余变量,其实质与 x_3 相同,故也有统称松弛变量的。松弛变量或剩余变量在实际问题中分别表示未被充分利用的资源和超用的资源数,均未转化为价值和利润,所以引进模型后它们在目标函数中的系数均为零。

3. 取值无约束的变量。如果变量 x 代表某产品当年计划数与上一年计划数之差,显然 x 的取值可能是正也可能为负,这时可令 $x = x' - x''$,其中 $x' \geqslant 0$,$x'' \geqslant 0$,将其代入线性规划模型即可。

4. 变量 $x_j \leqslant 0$。可令 $x_j' = -x_j$,显然 $x_j' \geqslant 0$。

【例 3】 将下述线性规划模型化为标准形式。

$$\min\ z = x_1 + 2x_2 + 3x_3$$

$$
\begin{cases}
-2x_1 + x_2 + x_3 \leqslant 9 \\
-3x_1 + x_2 + 2x_3 \geqslant 4 \\
\ \ 3x_1 - 2x_2 - 3x_3 = -6 \\
x_1 \leqslant 0, x_2 \geqslant 0, x_3 \text{ 取值无约束}
\end{cases}
$$

【解】 令 $z' = -z, x_3 = x_3' - x_3''(x_3' \geqslant 0, x_3'' \geqslant 0), x_1' = -x_1$，并按上述规则将问题转化为：

$$\max z' = x_1' - 2x_2 - 3x_3' + 3x_3'' + 0x_4 + 0x_5$$

$$
\begin{cases}
2x_1' + x_2 + x_3' - x_3'' + x_4 = 9 \\
3x_1' + x_2 + 2x_3' - 2x_3'' - x_5 = 4 \\
3x_1' + 2x_2 + 3x_3' - 3x_3'' = 6 \\
x_1', x_2, x_3', x_3'' \geqslant 0
\end{cases}
$$

1-4 线性规划问题的解

线性规划问题

$$\max z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{1.6 a}$$

$$
\begin{cases}
\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad (i = 1, \cdots, m) & (1.6\ \mathrm{b}) \\
x_j \geqslant 0 \quad (j = 1, \cdots, n) & (1.6\ \mathrm{c})
\end{cases}
$$

求解线性规划问题，就是从满足约束条件(1.6 b)、(1.6 c)的方程组中找出一个解，使目标函数(1.6 a)达到最大值。

可行解 满足上述约束条件(1.6 b)、(1.6 c)的解 $X = (x_1, \cdots, x_n)^T$，称为线性规划问题的可行解。全部可行解的集合称为可行域。

最优解 使目标函数(1.6 a)达到最大值的可行解称为最优解。

基 设 A 为约束方程组(1.6 b)的 $m \times n$ 阶系数矩阵，(设 $n > m$)，其秩为 m。B 是矩阵 A 中的一个 $m \times m$ 阶的满秩子矩阵，称 B 是线性规划问题的一个基。不失一般性，设

$$B = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{bmatrix} = (P_1, \cdots, P_m)$$

B 中的每一个列向量 $P_j (j = 1, \cdots, m)$ 称为基向量，与基向量 P_j 对应的变量 x_j 称为基变量。线性规划中除基变量以外的其它变量称为非基变量。

基 解 在约束方程组(1.6 b)中，令所有非基变量 $x_{m+1} = x_{m+2} = \cdots = x_n = 0$，又因为有 $|B| \neq 0$，根据克莱姆规则，由 m 个约束方程可解出 m 个基变量的唯一解 $X_B = (x_1, \cdots, x_m)$。将这个解加上非基变量取 0 的值有 $X = (x_1, x_2, \cdots, x_m, 0, \cdots, 0)^T$，称 X 为线性规划问题的基解。显然在基解中变量取非零值的个数不大于方程数 m，又基解的总数不超过 C_n^m 个。

基可行解 满足变量非负约束条件(1.6 c)的基解称为基可行解。

可行基 对应于基可行解的基称为可行基。

【例4】 在下述线性规划问题中,举例说明什么是基、基变量、基解、基可行解和可行基。

$$\max z = 2x_1 + 3x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 & & & = 12 \\ x_1 + 2x_2 & + x_4 & & = 8 \\ 4x_1 + 0x_2 & & + x_5 & = 16 \\ 0x_1 + 4x_2 & & & + x_6 = 12 \\ x_i \geqslant 0 \end{cases}$$

【解】 写出约束方程组的系数矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

矩阵 A 的秩不大于 4,而

$$(P_3, P_4, P_5, P_6) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

是一个 4×4 的满秩矩阵,故 (P_3, P_4, P_5, P_6) 是上述线性规划问题的一个基。因而与 P_3、P_4、P_5、P_6 对应的变量 x_3、x_4、x_5、x_6 是基变量,x_1、x_2 是非基变量。在约束方程组中如果令 $x_1 = x_2 = 0$,即可解得 $x_3 = 12, x_4 = 8, x_5 = 16, x_6 = 12$,由此

$$X = (0,0,12,8,16,12)^T$$

是线性规划问题的一个基解。因该基解中所有变量取值为非负,故它又是基可行解。因而与这个基可行解对应的基 (P_3, P_4, P_5, P_6) 是一个可行基。

§2. 图 解 法

为了便于建立 n 维空间中线性规划问题的概念及便于理解求解一般线性规划问题的单纯形法的思路,先介绍图解法。这种方法的优点是直观性强,计算方便,但缺点是只适用于问题中有两个变量的情况。图解法的步骤是:建立坐标系,将约束条件在图上表示;确立满足约束条件的解的范围;绘制出目标函数的图形;确定最优解。用本章例 2 来具体说明图解法的原理步骤。例 2 的数学模型如下:

$$\max z = 2x_1 + 3x_2 \tag{1.7 a}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \leqslant 12 & (1.7\text{ b}) \\ x_1 + 2x_2 \leqslant 8 & (1.7\text{ c}) \\ 4x_1 \leqslant 16 & (1.7\text{ d}) \\ 4x_2 \leqslant 12 & (1.7\text{ e}) \\ x_1, x_2 \geqslant 0 & (1.7\text{ f}) \end{cases}$$