

重庆大学出版社
黄翔 著

数学方法论选论



数学方法论选论

内 容 简 介

本书对数学方法论的若干重要问题进行了阐述。内容涉及：数学的本质、数学发展的规律、数学发现与创造的法则、各种典型的数学方法的特点与运用、数学中的逻辑方法与非逻辑方法、数学美学方法等。

作者还着意对该领域的一些新问题作了探索。如：数学家的数学活动方法、数学学派及研究方法、数学方法的现代发展等。

本书注意紧密联系数学研究及数学教育的实际，充分运用数学方法论的现代理论观点，从较广和较新的视角对问题进行分析和研究，以此形成了本书的一定特色。

数学方法论选论

黄 翔 著

责任编辑 黄开植

*

重庆大学出版社出版发行

新华书店经销

威远县印刷厂印刷

*

开本：1189×898 1/32 印张：12.625 字数：339千

1995年4月第1版

1995年4月第1次印刷

印数：1—2500

ISBN7-5624-1086-3/O·110 定价：16.80元

(川)新登字020号

1991/30/15

前 言

数学方法论的研究在 20 世纪后期逐渐形成热潮是数学发展的一个必然结果。

经过漫长而复杂的历史,数学特别是现代数学已发展成为一个博大精深的学科体系。数学信息量的激增及数学研究的日益精细化、艰深化,使当代已经很难产生象欧拉、高斯、庞加莱、希尔伯特那样“全能”的或雄视全局的数学大师。无论是数学的研究者或数学的学习者,当他身处如此浩瀚的数学海洋之时,都会深感自己的渺小,而惊叹数学的伟大。

尽管如此,人们仍在数学的征途上执着地追求,除了一步步继续把数学引向前进外,更希冀清楚地认识数学自身。一个坚定的信念是:“人类创造了数学,人类就一定能够明确地理解和表述数学。”

这里的关键是选取一个恰当的认识数学的视角,这一视角要能直接深入数学的本质,感受数学的精神,把握数学的脉搏,而不受形形色色、浩若烟海的数学具体理论的局限和束缚。

数学方法论就是这样的视角之一。

早在近代科学的黎明期,著名德国数学家、哲学家莱布尼兹就指出:数学的本质不在于它的对象,而在于它的方法。他的这一断言已为数学发展史上的无数事例所证实。综观今日数学,正以前所未有的速度,向着更广阔的空间渗透,今日社会的任何领域都已阻挡不住数学化的进程。可以说,数学的方法本质和方法价值在当代已得到淋漓尽致的展现。

正因为如此,数学方法论研究的意义就得到了升华。它不仅以特定的理性思辩的哲学反思的角度去审视数学、刻画数学,而且本身也必然

参与到数学活动中去,推动着数学。

正是顺应这样的时代潮流,数学方法论的旗帜下集结起更多的队伍,数学方法论的园地里结出了更为丰硕的成果。

作为这个队伍中的一员,奉献在读者面前的这本书,不敢自称为研究园地的一朵花、一个果,但它却能作为一棵小草。

作者在书中融入多年来在这一领域探索的心血,并试图在某些方面形成它自己的特色和风格。

首先,本书在研究方法上作了新的尝试。考虑到数学方法论的理论体系越来越呈现出开放性特征,已逐步形成一个多学科、多层次、多观点、多角度、多风格的所谓多元化的研究格局,因而本书较多地采用了比较研究的手法。正所谓“攀山千条路,同仰一月高”,通过相反或并列的多种角度和观点的比较,引导读者去形成一种互补的认识。

本书还充分关注数学方法论理论的时代特色,结合具体问题阐述,有机地引入诸多现代理论观点。如数学文化论、数学活动论、数学社会学、西方科学哲学的观点,使全书能在一定的理论高度反映这一领域的一些热点问题和前沿课题。

数学方法论的理论探索最终应指导数学及数学教育的实践,本书在这一方面亦作了努力,特别注意联系数学教育的实践是本书始终如一的侧重点。

作者还提出了一些自认为很有必要进行研究的新课题作专章论述。如数学的发展、数学家的数学活动方法、数学学派、数学方法的现代发展等,不揣肤浅,意在抛砖引玉,并就教于学界同仁。

本书无意于提供一个新的数学方法论的理论框架,也未顾及理论的系统与完整,只求对该领域的重点问题进行剖析和探索,这也是本书取名“选论”的缘由。

成书过程中,参阅了不少专家、学者的著述,在此深表谢意!

作者

一九九五年三月

目 录

第一章 数学方法论概述	(1)
§ 1.1 数学方法论的研究对象	(1)
一、方法、方法论及数学方法论	(1)
二、数学方法论的研究对象	(2)
§ 1.2 数学方法论的形成与发展	(4)
一、数学萌芽时期与数学方法的产生	(4)
二、常量数学时期与数学方法论的萌芽	(5)
三、变量数学时期与数学方法论的形成	(5)
四、近、现代数学时期与数学方法论学科的建立及发展	(6)
§ 1.3 数学方法论的特点、意义及研究方法	(9)
一、数学方法论的基本特点	(9)
二、研究和学习数学方法论的意义	(11)
三、数学方法论的基本研究方法	(13)
第二章 数学观	(16)
§ 2.1 数学的本质	(16)
一、数学的基本特点	(16)
二、数学的客观基础	(21)
三、数学的研究对象	(24)
四、数学理论的真理性	(27)
§ 2.2 数学悖论、危机与数学无限观	(31)
一、数学悖论	(31)
二、数学危机	(37)

三、悖论的实质与无限观	(41)
§ 2.3 数学基础诸流派及哲学观	(44)
一、逻辑主义学派	(44)
二、直觉主义学派	(46)
三、形式主义学派	(48)
四、数学基础论的现代哲学思潮	(49)
第三章 数学的发展	(52)
§ 3.1 数学发展的几个直接动因	(52)
一、数学问题	(52)
二、数学观念	(61)
三、数学符号	(65)
四、数学美学标准	(68)
§ 3.2 对数学发展中若干现象的辩证认识	(71)
一、对立理论的并存现象	(71)
二、多重、独立地发现同一结论现象	(74)
三、历史与逻辑的非一致现象	(76)
四、数学的分化与整合	(77)
五、极大的普适性与自我封闭性	(79)
六、是发现呢还是发明	(80)
七、计算机给数学带来的哲学思考	(81)
§ 3.3 关于数学发展规律与模式的研究	(82)
一、亚历山大洛夫的数学发展观	(83)
二、怀尔德提出的数学发展 23 条规律	(83)
三、拉卡托斯的数学理论发展模式	(86)
四、柯朗与罗宾斯的数学发展观	(87)
五、斯蒂恩的数学球体结构发展理论	(88)
六、几点启示	(89)
第四章 数学化归原则	(90)
§ 4.1 化归原则概说	(90)
一、化归的特征	(90)
二、化归的要素、模式和方向	(92)

三、化归的实质	(93)
§ 4.2 化归的基本形式	(93)
一、特殊与一般的转化	(93)
二、整体与局部的转化	(97)
三、具体与抽象的转化	(101)
四、数与形的转化	(102)
五、化高为低	(108)
六、化正为反	(109)
七、化已知为未知	(109)
八、化无限为有限	(110)
第五章 关系映射反演方法	(112)
§ 5.1 RMI 方法概述	(112)
一、映射方法	(112)
二、数学对象与关系结构	(113)
三、映射与反演	(114)
§ 5.2 RMI 方法在数学中的应用	(115)
一、反映若干具体数学方法的共性与本质特征	(115)
二、作为探求证明数学命题的一种重要思路和方法	(118)
三、解决不可能性问题	(122)
四、解决理论的整体性结构问题	(126)
五、RMI 原理与数学创造	(127)
§ 5.3 使用 RMI 方法的条件	(129)
第六章 数学公理化方法	(130)
§ 6.1 数学公理化方法的意义	(130)
§ 6.2 数学公理化方法的产生与发展	(133)
一、公理化方法的萌芽——亚里士多德三段论体系	(133)
二、实质公理化方法的产生——欧几里得几何公理体系	(134)
三、潜形式公理化阶段——非欧几何公理体系	(135)
四、形式公理化阶段——希尔伯特公理体系	(136)
五、纯形式公理化阶段——元数学的建立	(137)
§ 6.3 公理化方法的特点与基本问题	(138)

一、公理化方法的特点	(138)
二、公理化方法的基本问题	(139)
三、对公理系统的检验	(140)
§ 6.4 公理化方法的应用举例	(148)
一、一个简单的实例	(148)
二、几何公理方法的重要实例——希尔伯特公理体系	(149)
三、现代形式公理系统的基本结构及具体实例	(151)
四、关于中学数学中的几何公理体系及处理方法	(152)
§ 6.5 对公理化方法的辩证认识	(154)
一、如何认识对同一对象的不同形式的公理描述	(154)
二、公理化方法是思维的“自由产物”呢还是建立在一定的 客观基础之上的东西	(155)
三、公理化方法是万能的呢还是带有某种局限的方法	(155)
四、关于实质性的公理法与形式化的公理法	(156)
第七章 数学模型方法	(157)
§ 7.1 数学模型的意义、类型及作用	(157)
一、数学模型	(157)
二、数学模型的分类	(158)
三、数学模型的作用	(159)
§ 7.2 建立数学模型的步骤与途径	(164)
§ 7.3 数学模型方法应用举例	(166)
§ 7.4 数学模型方法与数学教育	(173)
一、数学建模竞赛	(173)
二、MM方法与数学教学改革	(179)
第八章 数学构造方法	(183)
§ 8.1 构造法概述	(183)
一、构造法的特征	(183)
二、构造法的近、现代发展	(184)
三、构造性数学与非构造性数学的辩证关系	(186)
§ 8.2 构造方法在数学发展中的作用	(188)
一、对中西古代数学的影响	(188)

二、对经典数学的构造性解释	(190)
三、对开拓数学新领域的作用	(192)
§ 8.3 构造法在数学解题中的运用	(192)
第九章 数学中的逻辑思维方法	(201)
§ 9.1 分类与类比	(201)
一、分类法	(201)
二、类比法	(206)
§ 9.2 归纳与演绎	(215)
一、归纳法	(215)
二、演绎法	(219)
三、归纳与演绎的哲学论争	(221)
§ 9.3 分析与综合	(223)
一、分析与综合的含义	(223)
二、分析法	(224)
三、综合法	(229)
四、分析与综合的统一	(231)
五、还原论与系统观	(231)
§ 9.4 证明与反驳	(233)
一、证明法	(233)
二、反驳法	(238)
三、证明与反驳的数学探索价值	(241)
第十章 数学中的非逻辑思维方法	(243)
§ 10.1 想象与联想	(243)
一、想象	(243)
二、联想	(248)
§ 10.2 直觉与灵感	(256)
一、直觉	(257)
二、灵感	(266)
第十一章 数学美学方法	(274)
§ 11.1 数学美	(274)
一、数学美的本质	(274)

二、数学发展中的数学美学思想掠影	(277)
三、数学美的表现形式	(285)
§ 11.2 数学美学方法的运用	(291)
一、数学美学方法的特点	(291)
二、数学美学方法运用的基本途径	(292)
§ 11.3 数学美育	(300)
一、审美教育的特征	(300)
二、审美教育的功能	(300)
三、数学审美教育的途径	(301)
四、数学美育的层次	(302)
第十二章 数学家的数学活动方法	(303)
§ 12.1 笛卡儿——科学方法与数学理论的统一	(303)
一、笛卡儿的科学方法论	(303)
二、解析几何的方法论价值	(305)
三、笛卡儿模式及数学解题	(308)
§ 12.2 欧拉——他的数学多产得力于他的数学 思想方法	(311)
一、“他是一个顶呱呱的方法发明家,又是一个熟练的巨匠”	(311)
二、合情推理的高手	(315)
三、抽象分析法与映射法	(323)
§ 12.3 庞加莱——通过内省来研究数学创造的心理活动	(324)
一、数学构造性观点及对数学归纳法的认识	(325)
二、没有假设,科学家将寸步难行	(326)
三、对数学创造发明活动的心理分析	(327)
§ 12.4 希尔伯特——以数学问题为杠杆推动数学前进	(331)
一、不循常规,独辟蹊径——果尔丹问题	(331)
二、类比、猜想、推广——代数数域理论	(333)
三、旧瓶装新酒——《几何基础》	(334)
四、妙手回春之术——挽救狄氏原理	(335)
五、数学问题——数学前进的杠杆	(336)
第十三章 数学学派	(339)

§ 13.1 现代数学学派概说	(339)
一、哥廷根学派	(339)
二、波兰学派	(342)
三、布尔巴基学派	(346)
四、前苏联学派	(351)
§ 13.2 对数学学派若干问题的认识	(355)
一、由几种现代观点看数学学派	(355)
二、数学学派形成及发展的基本形式	(360)
三、数学学派研究方法特色分析	(364)
第十四章 数学方法的现代发展	(368)
§ 14.1 集合观念的嬗变与数学方法的拓展	(368)
一、传统集合观念面临的挑战	(369)
二、集合观念的重大突破	(370)
三、集合多元化及对数学方法的拓展	(372)
§ 14.2 20 世纪数学思想方法的发展足迹	(374)
一、高度的抽象化建立起现代数学基础的新支柱	(374)
二、对标准与常规方法的叛逆冲破了传统的理论禁区	(376)
三、任何领域都阻挡不住数量化的进程	(379)
四、计算机带来数学思想方法的新突破	(382)
§ 14.3 数学方法的现代发展趋势	(383)
一、抽象化方法呈现新特点	(383)
二、综合性方法日显威力	(385)
三、反常规方法将独领风骚	(386)
四、渗透性方法使数学四处结缘	(387)
五、计算机方法大有用武之地	(387)
主要参考文献	(389)

第一章 数学方法论概述

早在近代科学的黎明时期,德国数学家莱布尼兹(Leibniz, 1646—1716)就指出:数学的本质不在于它的对象,而在于它的方法。

在数学的发展过程中,人们逐渐认识到对数学方法本身进行理论研究的重要性。特别是进入近、现代数学时期,关于数学方法的理论研究专著大量涌现。自 20 世纪 80 年代开始,我国开始形成该领域的研究热潮,时至今日,数学方法论作为一个独立的学科已得到一定发展。

本章对数学方法论的研究对象、历史沿革、基本特点、意义及研究方法作一概述。

§ 1.1 数学方法论的研究对象

一、方法、方法论及数学方法论

何谓方法? 最早的解释源于希腊文“沿着”(μετα)和“道路”(οδος)这两个术语,理解为“按照某种途径”。以后,在漫长的历史进程中,许多哲人从不同的角度对方法进行过论述,其观点和表述虽不尽相同,却都包含着上述最原始的含义。

方法具有多种特性;如层次性(相应于不同的范围)、明确性(本身可识别)、倾向性(服从于一定目的)、可操作性(非任意、可学习)、创造性(富有意外成果)和经济性(体现效率)。

把方法本身作为研究对象,既合理也是事实。最初且著名的例子当推苏格拉底、柏拉图对辩证法的研究及亚里士多德对形式逻辑的研究。

对方法本身进行研究所形成的专门理论是方法的元理论,即方法论。

对方法论含义的界定,在当今理论界有不同的观点。一种观点认为,有必要将研究方法的理论划分为方法学和方法论两个相对独立、且相辅相成的部分,方法学指方法自身及其如何应用的学问,而方法论则是与方法学相联系但在更一般、更抽象层次上对方法进行的哲学反思。另一种观点认为,方法学和方法论就其本质上看都是一样的,都是关于方法的元理论,它们是把某种共同的发展规律和研究方法作为理论对象的一门学问。在本书的论述中,将不作方法学与方法论的这种区分。方法论发展的历史表明,世界上没有“自在的”方法论,它始终同某一个或更多的学科紧密联系在一起。就数学而言,数学理论、数学方法以及对方法的理性思考常常水乳交融、难解难分。对数学的一般性的方法原理的哲学探讨,往往以对方法的内容、特点、发展历史的认识为前提。而当我们对具体数学方法的特征进行研究时,又常常需要对它作更一般的或多角度的交叉性的理性分析。

任何科学都有一个方法问题。当今科学日新月异的发展使方法问题日显重要。科学活动的重大特点之一,是以方法论问题作为形成科学本身各种崭新思想的必要条件。一门科学的发展,不仅表现出理论上的意义,而且表现出方法上的意义。这种特点刺激了科学方法论以及各种专门的学科方法论的兴起,数学方法论就是其中之一。

由上所述,我们可以对数学方法论从总体上作这样的概括:它是关于数学认识活动的体系、形式和方式的原理的学说。

二、数学方法论的研究对象

我国学者徐利治于1983年对数学方法论的研究对象作了这样的表述:它主要研究和讨论数学的发展规律、数学的思想方法以及数学中的发现、发明与创新等法则。他还进一步把上述研究对象划分为宏观和微观两个范畴。即:撇开数学内在因素不提,从社会生产实践及科技发展的角度研究数学发展规律属宏观数学方法论范畴;以数学内部体系结构及数学活动者研究出发研究数学思想方法以及数学发现、发明与

创造的法则属微观数学方法论范畴。

看来,数学方法论的研究对象和范围是十分广泛的。可将其归纳成如下主要的方面:

1. 数学科学体系发展的动力及规律

从系统论的观点看,数学科学既是相对独立存在于科学总体系中的一个系统,又是与社会、科技、文化等大系统紧密相关的一个系统,数学所具有的独立性与开放性这双重性质决定了数学发展的动因及发展规律、机制必然要受外部与内部双重因素的制约。数学方法论就是从社会的、文化的、科技的、教育的以及学科内部的多种角度对数学发展的动力及规律作审视和分析。

2. 数学的本质及基础问题

在数学的发展过程中,众多的数学家和哲学家对数学的本质及基础问题(诸如数学的对象、特点、客观基础、真理观、无限观、悖论与危机等)形成了不同的哲学观点和流派,从方法论的角度研究这些问题对于形成正确的数学观,发挥数学的作用,促进数学的发展具有重要的意义。

3. 数学中的典型方法

数学在其自身的发展中形成了许多具有数学特色的典型方法。如化归方法、RMI方法、公理化方法、模型方法、构造方法等。对这些方法的内容、特点及应用作系统的理论研究是数学方法论的重要内容。

4. 数学中的逻辑方法

数学从总体上看是属于演绎科学,逻辑推理是数学活动中最重要的形式,数学离不开逻辑。因此逻辑的一些主要方法,如分类、类比、归纳、演绎、分析、综合、证明、反驳等就成为数学方法中的重要组成部分。数学方法论研究这些方法的原理、规则、结构和程序、相互关系,以及对数学发展的作用。

5. 数学中的非逻辑方法

无数事实说明,数学中的非逻辑方法,如审美方法、想象方法、形象思维方法、灵感思维方法等在数学研究及数学发现、发明、创造等方面

起着不可估量的作用,实在可与逻辑方法放在同等重要的位置上。

数学思维活动和心智活动是数学活动的核心,它是思维主体(数学家及数学学习者)的活动。从发明心理学及思维科学的角度对数学的发现与创造作方法论的总结是很有意义的。研究表明,数学的发现与创造很大程度上与非逻辑方法有关。因此,数学中的非逻辑方法的确应当被看成数学方法论,特别是关于数学发明、创造的研究的一个重要内容。

6. 数学家的数学活动方法

数学家之所以成果卓著,很大程度上应归之于他善于运用合理的数学方法。考察和剖析数学家特别是著名数学家的思想方法,是研究数学方法的重要方面。更由于有些数学家本身就擅长于对数学方法进行研究(如笛卡儿、欧拉、庞加莱、希尔伯特等),因此,对这些数学家的数学活动方法进行探讨就更具有典型意义。

对数学家群体——数学学派的研究也是一个重要的方面。通过对其产生的原因、兴衰过程、形成方式、研究特色与方法、对历史的贡献等的分析,有利于我们从一个侧面去把握数学创造的法则和数学发展的规律。

§ 1.2 数学方法论的形成与发展

从数学的发展史看,数学的产生和发展总包含着数学方法的产生、积累和发展,而人们在研究数学本身的同时,也就开始了数学方法的研究。可以说,数学发生发展的历史,也就是数学方法论的产生、演进的历史。在本节,将按照一般所公认的数学发展史分期的划分,对数学方法论的形成与发展历史作一分析。

一、数学萌芽时期与数学方法的产生

从远古时代到公元前 600 年是数学的萌芽时期。这一时期主要是研究解决生活和农业生产上的实际计算和测量问题,例如天文历算,土

地测量和水利工程计算等,对数和形的认识还未脱离实物形象与具体经验。已形成的只是初步的算术和几何。

这一时期,在中国、巴比伦、埃及、希腊、印度已出现了一些简单的数学方法。如印度的进位记数法。古埃及纸草书及巴比伦楔形文字记载的算术与几何的一些简单算法,我国汉代《周髀》中记载有西周时期用“矩”来测量的方法等等。

二、常量数学时期与数学方法论的萌芽

从公元前 600 年到 17 世纪中叶是常量数学时期。这一时期的数学研究对象已经从实际事物中得到抽象,成为独立的、纯粹的研究对象,即客观事物相对静止状态下保持不变的量和形。此外,由于运用了逻辑方法(主要是演绎方法),过去积累的零乱的数学知识被整理成具有系统性的演绎体系。数学引入了自己的符号系统,其表达、计算、推理和证明方法都日趋完善,算术、几何、代数、三角等分支的形成表明数学已发展成为独立的科学。

伴随着新的数学思想和方法的出现,人们开始了对数学方法的总结和研究,并开始出现研究、论述数学方法的论著。古希腊杰出的思想家亚里士多德对观察、分类等方法进行了研究,在其名著《工具论》中创立了形式逻辑,论述了归纳法和演绎法;希腊学者欧几里得在其著名的《原本》中创立了几何公理化的思想和方法;中国古代数学家刘徽在《九章算术注》中提出了割圆术,创立了极限的思想和方法;英国数学家纳皮尔(Narayana, 1356—?)发明了对数方法;英国哲学家弗兰西斯·培根发表了以系统阐述实验方法与归纳方法、创立归纳逻辑为内容的名著《新工具》。

这一时期对观察、实验、归纳、演绎等方法的研究,为数学方法论的形成奠定了基础。

三、变量数学时期与数学方法论的形成

从 17 世纪中叶到 19 世纪 20 年代,数学起了根本的变化,人们对