数学方法论选论

重庆大学出版社

黄 翔 著

数学方法论选论

内 容 简 介

本书对数学方法论的若干重要问题进行了阐述。内容涉及：数学的本质、数学发展的规律、数学发现与创造的法则、各种典型的数学方法的特点与运用、数学中的逻辑方法与非逻辑方法、数学美学方法等。

作者还着意对该领域的一些新问题作了探索。如：数学家的数学活动方法、数学学派及研究方法、数学方法的现代发展等。

本书注意紧密联系数学研究及数学教育的实际，充分运用数学方法论的现代理论观点，从较广和较新的视角对问题进行分析和研究，以此形成了本书的一定特色。

数学方法论选论

黄 翔 著

责任编辑 黄开植

*

重庆大学出版社出版发行

新 华 书 店 经 销

威 远 县 印 刷 厂 印 刷

*

开本：1189×898 1/32 印张：12.625 字数：339千

1995年4月第1版 1995年4月第1次印刷

印数：1—2500

ISBN7-5624-1086-3/O·110 定价：16.80元

（川）新登字020号

前　　言

数学方法论的研究在20世纪后期逐渐形成热潮是数学发展的一个必然结果。

经过漫长而复杂的历史，数学特别是现代数学已发展成为一个博大精深的学科体系。数学信息量的激增及数学研究的日益精细化、艰深化，使当代已经很难产生象欧拉、高斯、庞加莱、希尔伯特那样“全能”的或雄视全局的数学大师。无论是数学的研究者或数学的学习者，当他身处如此浩瀚的数学海洋之时，都会深感自己的渺小，而惊叹数学的伟大。

尽管如此，人们仍在数学的征途上执着地追求，除了一步步继续把数学引向前进外，更希冀清楚地认识数学自身。一个坚定的信念是：“人类创造了数学，人类就一定能够明确地理解和表述数学。”

这里的关键是选取一个恰当的认识数学的视角，这一视角要能直接深入数学的本质，感受数学的精神，把握数学的脉搏，而不受形形色色、浩若烟海的数学具体理论的局限和束缚。

数学方法论就是这样的视角之一。

早在近代科学的黎明期，著名德国数学家、哲学家莱布尼兹就指出：数学的本质不在于它的对象，而在于它的方法。他的这一断言已为数学发展史上的无数事例所证实。综观今日数学，正以前所未有的速度，向着更广阔的空间渗透，今日社会的任何领域都已阻挡不住数学化的进程。可以说，数学的方法本质和方法价值在当代已得到淋漓尽致的展现。

正因为如此，数学方法论研究的意义就得到了升华。它不仅以特定的理性思辨的哲学反思的角度去审视数学、刻画数学，而且本身也必然

参与到数学活动中去，推动着数学。

正是顺应这样的时代潮流，数学方法论的旗帜下集结起更多的队伍，数学方法论的园地里结出了更为丰硕的成果。

作为这个队伍中的一员，奉献在读者面前的这本书，不敢自称为研究园地的一朵花、一个果，但它却能作为一棵小草。

作者在书中融入多年来在这一领域探索的心血，并试图在某些方面形成它自己的特色和风格。

首先，本书在研究方法上作了新的尝试。考虑到数学方法论的理论体系越来越呈现出开放性特征，已逐步形成为一个多学科、多层次、多观点、多角度、多风格的所谓多元化的研究格局，因而本书较多地采用了比较研究的手法。正所谓"攀山千条路，同仰一月高"，通过相反或并列的多种角度和观点的比较，引导读者去形成一种互补的认识。

本书还充分关注数学方法论理论的时代特色，结合具体问题阐述，有机地引入诸多现代理论观点。如数学文化论、数学活动论、数学社会学、西方科学哲学的观点，使全书能在一定的理论高度反映这一领域的一些热点问题和前沿课题。

数学方法论的理论探索最终应指导数学及数学教育的实践，本书在这一方面亦作了努力，特别注意联系数学教育的实践是本书始终如一的侧重点。

作者还提出了一些自认为很有必要进行研究的新课题作专章论述。如数学的发展、数学家的数学活动方法、数学学派、数学方法的现代发展等，不揣肤浅，意在抛砖引玉，并就教于学界同仁。

本书无意于提供一个新的数学方法论的理论框架，也未顾及理论的系统与完整，只求对该领域的重点问题进行剖析和探索，这也是本书取名"选论"的缘由。

成书过程中，参阅了不少专家、学者的著述，在此深表谢意！

作者

一九九五年三月

目 录

第一章　数学方法论概述

早在近代科学的黎明时期，德国数学家莱布尼兹(Leibniz，1646—1716)就指出：数学的本质不在于它的对象，而在于它的方法。

在数学的发展过程中，人们逐渐认识到对数学方法本身进行理论研究的重要性。特别是进入近、现代数学时期，关于数学方法的理论研究专著大量涌现。自 20 世纪 80 年代开始，我国开始形成该领域的研究热潮，时至今日，数学方法论作为一个独立的学科已得到一定发展。

本章对数学方法论的研究对象、历史沿革、基本特点、意义及研究方法作一概述。

§1.1　数学方法论的研究对象

一、方法、方法论及数学方法论

何谓方法？最早的解释源于希腊文“沿着”($\mu\varepsilon\tau\alpha$)和“道路”($o\delta o\rho$)这两个术语，理解为“按照某种途径”。以后，在漫长的历史进程中，许多哲人从不同的角度对方法进行过论述，其观点和表述虽不尽相同，却都包含着上述最原始的含义。

方法具有多种特性，如层次性(相应于不同的范围)、明确性(本身可识别)、倾向性(服从于一定目的)、可操作性(非任意、可学习)、创造性(富有意外成果)和经济性(体现效率)。

把方法本身作为研究对象，既合理也是事实。最初且著名的例子当推苏格拉底、柏拉图对辩证法的研究及亚里士多德对形式逻辑的研究。

对方法本身进行研究所形成的专门理论是方法的元理论，即方法论。

对方法论含义的界定，在当今理论界有不同的观点。一种观点认为，有必要将研究方法的理论划分为方法学和方法论两个相对独立、且相辅相成的部分，方法学指方法自身及其如何应用的学问，而方法论则是与方法学相联系但在更一般、更抽象层次上对方法进行的哲学反思。另一种观点认为，方法学和方法论就其本质上看都是一样的，都是关于方法的元理论，它们是把某种共同的发展规律和研究方法作为理论对象的一门学问。在本书的论述中，将不作方法学与方法论的这种区分。方法论发展的历史表明，世界上没有“自在的”方法论，它始终同某一个或更多的学科紧密联系在一起。就数学而言，数学理论、数学方法以及对方法的理性思考常常水乳交融、难解难分。对数学的一般性的方法原理的哲学探讨，往往以对方法的内容、特点、发展历史的认识为前提。而当我们对具体数学方法的特征进行研究时，又常常需要对它作更一般的或多角度的交叉性的理性分析。

任何科学都有一个方法问题。当今科学日新月异的发展使方法问题日显重要。科学活动的重大特点之一，是以方法论问题作为形成科学本身各种崭新思想的必要条件。一门科学的发展，不仅表现出理论上的意义，而且表现出方法上的意义。这种特点刺激了科学方法论以及各种专门的学科方法论的兴起，数学方法论就是其中之一。

由上所述，我们可以对数学方法论从总体上作这样的概括：它是关于数学认识活动的体系、形式和方式的原理的学说。

二、数学方法论的研究对象

我国学者徐利治于 1983 年对数学方法论的研究对象作了这样的表述：它主要研究和讨论数学的发展规律、数学的思想方法以及数学中的发现、发明与创新等法则。他还进一步把上述研究对象划分为宏观和微观两个范畴。即：撇开数学内在因素不提，从社会生产实践及科技发展的角度研究数学发展规律属宏观数学方法论范畴；以数学内部体系结构及数学活动者研究出发研究数学思想方法以及数学发现、发明与

创造的法则属微观数学方法论范畴。

看来，数学方法论的研究对象和范围是十分广泛的。可将其归纳成如下主要的方面：

1. 数学科学体系发展的动力及规律

从系统论的观点看，数学科学既是相对独立存在于科学总体系中的一个系统，又是与社会、科技、文化等大系统紧密相关的一个系统，数学所具有的独立性与开放性这双重性质决定了数学发展的动因及发展规律、机制必然要受外部与内部双重因素的制约。数学方法论就是从社会的、文化的、科技的、教育的以及学科内部的多种角度对数学发展的动力及规律作审视和分析。

2. 数学的本质及基础问题

在数学的发展过程中，众多的数学家和哲学家对数学的本质及基础问题（诸如数学的对象、特点、客观基础、真理观、无限观、悖论与危机等）形成了不同的哲学观点和流派，从方法论的角度研究这些问题对于形成正确的数学观，发挥数学的作用，促进数学的发展具有重要的意义。

3. 数学中的典型方法

数学在其自身的发展中形成了许多具有数学特色的典型方法。如化归方法、RMI 方法、公理化方法、模型方法、构造方法等。对这些方法的内容、特点及应用作系统的理论研究是数学方法论的重要内容。

4. 数学中的逻辑方法

数学从总体上看是属于演绎科学，逻辑推理是数学活动中最重要的形式，数学离不开逻辑。因此逻辑的一些主要方法，如分类、类比、归纳、演绎、分析、综合、证明、反驳等就成为数学方法中的重要组成部分。数学方法论研究这些方法的原理、规则、结构和程序、相互关系，以及对数学发展的作用。

5. 数学中的非逻辑方法

无数事实说明，数学中的非逻辑方法，如审美方法、想象方法、形象思维方法、灵感思维方法等在数学研究及数学发现、发明、创造等方面

起着不可估量的作用,实在可与逻辑方法放在同等重要的位置上。

数学思维活动和心智活动是数学活动的核心,它是思维主体(数学家及数学学习者)的活动。从发明心理学及思维科学的角度对数学的发现与创造作方法论的总结是很有意义的。研究表明,数学的发现与创造很大程度上与非逻辑方法有关。因此,数学中的非逻辑方法的确应当被看成数学方法论,特别是关于数学发明、创造的研究的一个重要内容。

6. 数学家的数学活动方法

数学家之所以成果卓著,很大程度上应归之于他善于运用合理的数学方法。考察和剖析数学家特别是著名数学家的思想方法,是研究数学方法的重要方面。更由于有些数学家本身就擅长于对数学方法进行研究(如笛卡儿、欧拉、庞加莱、希尔伯特等),因此,对这些数学家的数学活动方法进行探讨就更具有典型意义。

对数学家群体——数学学派的研究也是一个重要的方面。通过对其产生的原因、兴衰过程、形成方式、研究特色与方法、对历史的贡献等的分析,有利于我们从一个侧面去把握数学创造的法则和数学发展的规律。

§1.2 数学方法论的形成与发展

从数学的发展史看,数学的产生和发展总包含着数学方法的产生、积累和发展,而人们在研究数学本身的同时,也就开始了数学方法的研究。可以说,数学发生发展的历史,也就是数学方法论的产生、演进的历史。在本节,将按照一般所公认的数学发展史分期的划分,对数学方法论的形成与发展历史作一分析。

一、数学萌芽时期与数学方法的产生

从远古时代到公元前600年是数学的萌芽时期。这一时期主要是研究解决生活和农业生产上的实际计算和测量问题,例如天文历算、土

地测量和水利工程计算等，对数和形的认识还未脱离实物形象与具体经验。已形成的只是初步的算术和几何。

这一时期，在中国、巴比伦、埃及、希腊、印度已出现了一些简单的数学方法。如印度的进位记数法。古埃及纸草书及巴比伦楔形文字记载的算术与几何的一些简单算法，我国汉代《周髀》中记载有西周时期用“矩”来测量的方法等等。

二、常量数学时期与数学方法论的萌芽

从公元前600年到17世纪中叶是常量数学时期。这一时期的数学研究对象已经从实际事物中得到抽象，成为独立的、纯粹的研究对象，即客观事物相对静止状态下保持不变的量和形。此外，由于运用了逻辑方法（主要是演绎方法），过去积累的零乱的数学知识被整理成具有系统性的演绎体系。数学引入了自己的符号系统，其表达、计算、推理和证明方法都日趋完善，算术、几何、代数、三角等分支的形成表明数学已发展成为独立的科学。

伴随着新的数学思想和方法的出现，人们开始了对数学方法的总结和研究，并开始出现研究、论述数学方法的论著。古希腊杰出的思想家亚里士多德对观察、分类等方法进行了研究，在其名著《工具论》中创立了形式逻辑，论述了归纳法和演绎法；希腊学者欧几里得在其著名的《原本》中创立了几何公理化的思想和方法；中国古代数学家刘徽在《九章算术注》中提出了割圆术，创立了极限的思想和方法；英国数学家纳皮尔（Narayana，1356—？）发明了对数方法；英国哲学家弗兰西斯·培根发表了以系统阐述实验方法与归纳方法、创立归纳逻辑为内容的名著《新工具》。

这一时期对观察、实验、归纳、演绎等方法的研究，为数学方法论的形成奠定了基础。

三、变量数学时期与数学方法论的形成

从17世纪中叶到19世纪20年代，数学起了根本的变化，人们对