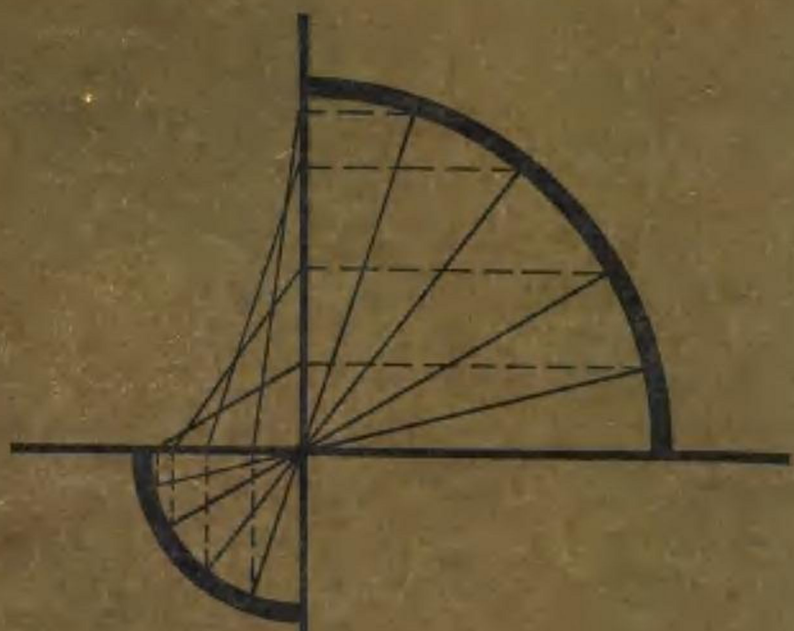
高等学校试用教材

测量平差基础

(增订本)

於宗俦 鲁林成 主编



测绘出版社

高等学校试用教材

测量平差基础

(增订本)

於宗俦
鲁林成 主编

测绘出版社

本书系统论述了条件平差、间接平差等经典平差方法（包括条件分组平差、附有未知数的条件平差和附有条件的间接平差），并对本学科的最新发展如相关平差、最小二乘滤波、推估和配置以及秩亏自由网平差等基本原理也作了较详细的介绍。此外，本书还专设章介绍误差传播、误差检验和误差椭圆等基本理论以及线性方程组的迭代解法。

为教学需要，本书另配有《测量平差基础习题集》。

本书为高等院校测量专业教材，亦可供有关专业人员学习参考。

高等学校试用教材

测量平差基础

（增 订 本）

於宗俦　鲁林成　主编

*

测 绘 出 版 社 出 版

国防科工委印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行・各地新华书店经售

*

开本787×1092　1/16・印张$32^{7}/_{8}$・　字数821千字

1978年6月第一版・1983年6月第二版・1983年6月第三次印刷

印数58,001—72,500册・定价3.35元

统一书号：15039・新288

前　　言

本书根据测量平差基础理论的发展，对1978年版《测量平差基础》（武汉测绘学院《测量平差》编写组编）作了较大的修改和补充。

为了加强基础理论，本书在理论阐述和公式推导中，尽量运用数理统计和矩阵代数的知识。为了反映本学科的最新发展，在内容上作了较多的补充，例如，相关观测平差，最小二乘滤波、推估、配置（亦称拟合推估）以及秩亏自由网平差等。此外，也提供了必要的算例，力求理论和实际有较好的结合。

教学中，根据各专业的不同需要，可以对各章内容作必要的增减或变动。课程如能安排在学过概率论、数理统计和线性代数之后进行，则本书第一、三、八章的内容就可以少讲或不讲。有“*”号的内容可作为课外选读或参考资料。各章之间的关联，附于目录之后，供教学或自学时参考。

本书由於宗俦和鲁林成两同志主编，参加编写的有吴俊昶、任慧龄、高士纯、刘大杰和刘家彬等同志。崔希璋教授担任编写的顾问。全书插图由冯秦珍同志描绘。

周江文教授和马大锜副教授对本书作了审阅，提出了许多宝贵意见和建议，谨此表示感谢。

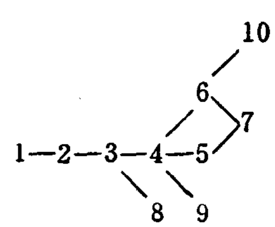
我们恳切希望读者对本书的错误和不足之处提出批评和建议，以便再版时修正和充实。

编　者

1982年9月

目 录

附：各章的关系



第一章　概率基本知识

§1-1　随机事件和概率的基本运算

先举两个简单的例子来说明随机事件的含义。

例[1-1]　抛一枚硬币，可能出现两种结果，即“正面向上”或“反面向上”，但在抛掷之前却不能预先肯定会出现正面向上还是反面向上。

例[1-2]　在一口袋中装有编号为1、2、…、10的十个球，其中1～2号球为黄色，3～5号球为红色，6～10号球为白色。现从袋中任取一球，可能出现三种不同的结果（黄、红、白），但在取出之前却不能预先肯定会出现哪一种颜色。

上述“抛硬币一次”，“从袋中任取一球”，都称为进行一次试验。在一次试验中，可能出现也可能不出现的而在大量重复试验中却具有某种规律性的事情（这一点将在下面说明），在概率论中就称为随机事件，或简称为事件。例如，抛硬币一次“恰好出现正面向上”，从口袋中任取一球“恰好出现白色球”等等，都是随机事件。

在一次试验中可能出现不同的结果，我们常常希望知道其中每一随机事件出现的可能性的大小。如果在相同条件下，对同一试验重复地进行n次，若事件A出现了m次，那么我们就称比值m/n为事件A出现的频率。大量实践表明，当试验的次数n逐渐增加时，频率m/n的变化幅度也就逐渐减小，而且随着试验次数n的愈来愈大，m/n这一数值就逐渐稳定于某一常数，所稳定到的这一常数叫做理论频率。我们把这个理论频率称为在已知条件下事件A出现的概率，并记为$P(A)$。

例如，按前述的例[1-1]及[1-2]可知，抛硬币一次，它要么出现正面，要么出现反面，但如重复进行试验，则出现正面和出现反面的频率将随着抛掷次数的增加而逐渐稳定到1/2。因此，如用A_1表示“出现正面”的事件，用A_2表示“出现反面”的事件，则这两种事件的概率$P(A_1)$和$P(A_2)$都等于1/2。同样，从袋中任取一球，出现的颜色要么是黄色，要么是红色，要么是白色，但如重复进行试验，则随着试验次数的增加，出现这三种颜色球的频率将逐渐稳定到2/10、3/10和5/10，即取出黄色、红色、白色球的概率分别为2/10、3/10和5/10。由此可见，概率总是描述随机事件的集体规律性的，而不反映个别试验的结果。上面所提到的重复试验所具有的规律性正是指的这种集体规律性。

显然，当n次试验中，若某事件A总是出现，此时$m=n$，则$P(A)=m/n=1$。即在试验中一定发生的事件，其概率为1，这种事件就叫做必然事件。

当n次试验中，若事件A总是不出现，此时$m=0$，则$P(A)=m/n=0$。即在试验中不会发生的事件，其概率为0，这种事件就叫做不可能事件。

当n次试验中，若事件A有时出现，有时不出现，此时必有$m<n$。由此可见，任何事件A的概率$P(A)$应满足不等式

$$0\leqslant P(A)\leqslant 1。\tag{1-1-1}$$

即任一事件 A 的概率 $P(A)$ 总是介于 0 与 1 之间的一个真分数。不难理解，概率愈大，就表示事件 A 出现的可能性愈大；概率愈小，则表示出现的可能性愈小。当 $P(A)$ 虽不等于1,但非常接近于 1 时，就称事件 A 为实际上的必然事件；反之，当概率接近于 0 时，则称为小概率事件，或称为实际上的不可能事件。

在实际问题中，往往需要根据一些简单事件的概率来计算某些综合(复杂)事件的概率。下面将给出几个有关概率运算的公式，在给出这些公式之前，先阐述几个辅助的概念。

1. 完全事件组　若试验的结果必然要在某些事件中出现一件，这些事件的总体便称为一个完全事件组。例如，在例[1-1]中，事件 A_1 和 A_2 就构成一个完全事件组。因为抛硬币一次，不是出现事件 A_1，便是出现事件 A_2，除此之外，再不可能出现第三种结果（事件）。同样地，在例[1-2]中，如果以 B_1、B_2、B_3 分别表示任取一球所出现的颜色是黄、红、白三种事件，那么，事件 B_1、B_2、B_3 也是一个完全事件组。

2. 互斥事件　在一次试验中，当出现了其中任一事件，其它事件就不能同时出现，则称这些事件为互斥事件。例如，在例[1-1]中，当进行一次试验时，在 A_1、A_2 两事件中出现了任一事件，则另一事件就不能同时出现，因此它们是互斥事件。同样地，在例[1-2]中，B_1、B_2、B_3 也是互斥事件。

3. 事件和　若事件 C 是由事件 A 或 B 实现，或者两者同时实现所组成的综合事件，则称 C 为事件 A 与事件 B 之和，记为 $A+B$。特别是当 A 和 B 为互斥事件时，则事件 C 就是“事件 A 或事件 B 出现”的综合事件。

例[1-3]　在例[1-2]中，如以 C_1、C_2、…、C_{10} 分别表示任取一球出现的编号为 1、2、…、10 号球的事件，则“出现黄色球”的事件 B_1 就是“出现 1 号球”和“出现 2 号球”两事件之和。因为只要 1 号球(C_1）或者 2 号球(C_2）的事件出现了，则黄色球的事件（B_1）也就实现了，即 $B_1=C_1+C_2$。同样$B_2=C_3+C_4+C_5$，$B_3=C_6+C_7+C_8+C_9+C_{10}$。

4. 逆事件　若事件 $A+B$ 为必然事件，且 A 和 B 为互斥事件，则称 A 和 B 为互逆事件。一般将 A 的逆事件记为 $\bar{A}$。

例[1-4]　在例[1-2]中，设 B_1 为任取一球“出现黄色球”的事件，又设 $\bar{B}_1$ 为任取一球“出现红色球或白色球”的事件，即 $\bar{B}_1=B_2+B_3$，则 B_1 与 $\bar{B}_1$ 互为逆事件。因为此处事件 B_1 和事件 $\bar{B}_1$ 构成一个完全事件组，且两者互斥。

5. 事件积　如果事件 C 是由事件 A 与 B 同时实现所组成的综合事件，则事件 C 为事件 A 与 B 之积，记为 AB。

例[1-5]　在甲口袋中装有两个红球和一个白球，在乙口袋中装有四个红球和三个白球。现从甲、乙口袋中各取一球，若以 A_1、B_1 和 A_2、B_2 分别表示从甲、乙口袋中取出红球和白球的事件，则 $C_1=A_1A_2$ 是表示“取出的球都是红球”的事件。同样，事件$C_2=A_1B_2$则是表示从甲袋中取出的是红球，乙袋中取出的是白球”的事件，余类推。

6. 独立事件与不独立事件　如果事件A的出现不影响事件 B 的出现，则称事件 A 与B相互独立。例如，在例 [1-5] 中，从甲袋中取出什么颜色的球并不影响从乙袋中取出什么颜色的球，因此，这些都是互为独立事件。

反之，如果事件 A 的概率是随事件 B 的是否出现而改变，则称事件 A 与 B 互为不独立事件。例如，在例 [1-5] 中，有两人从甲袋中各取一球，若以 B 表示第一人取出的为红球的事件，A 表示第二人取出红球的事件，如果没有事件 B，则事件 A 的概率为 2/3；如果事件

B 已经发生，则事件 A 的概率等于 1/2，因而事件 A 与 B 互为不独立事件。

在事件 B 已经发生的情况下计算事件 A 的概率，这一概率就称为事件 A 的**条件概率**，记为 $P(A|B)$。对于上述情况：

$$P(A)=\frac{2}{3}, \qquad P(A|B)=\frac{1}{2},$$

可见，若

$$P(A)=P(A|B) \quad (\text{或 } P(B)=P(B|A)), \tag{1-1-2}$$

则表示 A 与 B 独立；若

$$P(A)\neq P(A|B) \quad (\text{或} P(B)\neq P(B|A)), \tag{1-1-3}$$

则表示 A 与 B 相互不独立。

下面给出几个常用的概率运算公式。

一、概率加法定理

若事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两互斥，并设事件 A 为各事件之和，即

$$A=A_1+A_2+\cdots+A_n, \tag{1-1-4}$$

就是说事件 A_i $(i=1,2,\cdots,n)$ 中任一事件出现了就算是事件 A 出现，则

$$P(A)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n), \tag{1-1-5}$$

即**事件和的概率等于各事件概率之和**。

当上述 n 个互斥事件构成一个完全事件组时，此时事件 A 就成为必然事件，因此

$$P(A)=P(A_1+A_2+\cdots+A_n)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)=1。 \tag{1-1-6}$$

特别是，当 A、B 两事件构成一完全事件组，且为互逆事件时（记 $B=\bar{A}$），则由(1-1-6)式可以写出

$$P(A+\bar{A})=P(A)+P(\bar{A})=1, \tag{1-1-7}$$

由此得

$$P(A)=1-P(\bar{A})。 \tag{1-1-8}$$

在实际计算中，如果计算 $P(\bar{A})$ 比计算 $P(A)$ 方便，则可先求出 $P(\bar{A})$，然后由(1-1-8)式计算 $P(A)$。

二、概率乘法定理

两事件 A 与 B 同时出现的概率等于其中一事件的概率和另一事件对前一事件的条件概率的乘积，即

$$P(AB)=P(A)P(B|A)=P(B)P(A|B)。 \tag{1-1-9}$$

由上式可以写出

$$\left.\begin{aligned} &P(A|B)=P(AB)/P(B), \\ \text{及}\quad &P(B|A)=P(AB)/P(A)。\end{aligned}\right\} \tag{1-1-10}$$

若 A、B 两事件互相独立，顾及(1-1-2)式，则(1-1-9)式可以写成

$$P(AB)=P(A)P(B)。 \tag{1-1-11}$$

推广之，如有 n 个互相独立的事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$，则其事件积的概率

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n)。 \tag{1-1-12}$$

例[1-6]　在例[1-2]中，若从袋中取球两次，每次任取一只（第一次取出后，球不再放

回袋中)。(1)问两次都拿到红球的概率是多少?(2)在取出的两只球中，至少有一只不是红球的概率是多少?

解:(1)设事件 A 为"第一次取出的是红球",事件 B 是"第二次取出的是红球"。因为 $P(A)=3/10$,当第一次取出的已是红球的情况下,第二次取出红球的概率则为 $P(B|A)=2/9$。由(1-1-9)式得

$$P(AB)=P(A)P(B|A)=\frac{3}{10}\times\frac{2}{9}=\frac{6}{90}=\frac{1}{15}。$$

(2)因为"两只球中至少有一只不是红球"的事件，实际上是包括除了"两只球都是红球"以外的所有事件，所以这两种事件互为逆事件。设前者为事件 A，则后者即为事件 $\bar{A}$。由(1-1-8)式得

$$P(A)=1-P(\bar{A})=1-\frac{1}{15}=\frac{14}{15}。$$

例[1-7] 在例[1-2]中，若从袋中任取一球，发现它是白色，问该球编号为偶数的概率是多少?

解：设 A 为"取出的是白球"的事件，B 为"球的编号为偶数"的事件，按题意就是要求 $P(B|A)$。因为任取一球出现白球的概率为 $P(A)=\frac{5}{10}$，而取出的球为白色且为偶数的概率为 $P(AB)=\frac{3}{10}$，故由(1-1-10)式得

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{\frac{3}{10}}{\frac{5}{10}}=\frac{3}{5}。$$

事实上，这一结果是很明显的，因为袋中有5个白球，其中有3个编号为偶数，当取出的球已知是白球的情况下，显然该球为偶数的概率应为3/5。

例[1-8] 抛掷三个硬币，观察其出现正面的个数，问出现(1)三个都不是正面，(2)一个正面，(3)两个正面，(4)三个正面的概率各是多少?

解：如果用 A_i、$B_i(i=1、2、3)$ 分别表示三个硬币出现正面和反面的事件，每一硬币出现正面和反面的概率 $P(A_i)=P(B_i)=1/2$，而且每一硬币出现哪一面并不影响另两个硬币出现什么面，所以三者是相互独立的事件。

出现"三个都不是正面"的事件只有一种情况，即 B_1、B_2、B_3 同时出现的情况。由(1-1-12)式得

$$P(B_1B_2B_3)=P(B_1)P(B_2)P(B_3)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}。$$

同理可得出现"三个正面"事件的概率也是1/8。

出现"一个正面"的事件有三种情况，即 $A_1B_2B_3$，$B_1A_2B_3$，$B_1B_2A_3$，其中每一事件出现的概率均为1/8。由于在一次试验中，只可能出现其中之一，所以它们为互斥事件，由加法定理知，出现"一个正面"事件的概率应为3/8。同理可得出现"两个正面"事件的概率也是3/8。

三、全概率公式

设事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为两两互斥事件，若事件 B 能而且只能与这些事件$A_i(i=1,2,\cdots,n)$中的一个事件同时发生，就是假设事件 B 是这样的一个事件，即

$$B=A_1B+A_2B+\cdots+A_nB。\tag{1-1-13}$$

由于事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两互斥，所以 $A_1B,A_2B,\cdots,A_nB$ 也是两两互斥，于是由概率的加法定理可以写出

$$P(B)=P(A_1B)+P(A_2B)+\cdots+P(A_nB)=\sum_{i=1}^{n}P(A_iB),\tag{1-1-14}$$

上式中 A_iB 是表示事件 A_i 与事件 B 同时发生的事件，根据概率的乘法定理可以写出

$$P(A_iB)=P(A_i)P(B|A_i),$$

因此(1-1-14)式可以写成

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B|A_i)。\tag{1-1-15}$$

上式称为全概率公式。

例[1-9]　在例[1-2]中，若从袋中任取一球，问拿到的是奇数号球的概率是多少？

解： 设事件 A_1,A_2,A_3 分别表示取出的是黄、红、白三种颜色的球，事件 B 表示取出的是奇数号球。则知 $P(A_1)=\frac{2}{10}$，$P(A_2)=\frac{3}{10}$，$P(A_3)=\frac{5}{10}$。当取出的球已知为黄色，且恰好为奇数的概率$P(B|A_1)=\frac{1}{2}$，同样，$P(B|A_2)=\frac{2}{3}$，$P(B|A_3)=\frac{2}{5}$。故由(1-1-15)式得

$$\begin{aligned}P(B)&=P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)+P(A_3)P(B/A_3)\\&=\frac{2}{10}\times\frac{1}{2}+\frac{3}{10}\times\frac{2}{3}+\frac{5}{10}\times\frac{2}{5}=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}\ 。\end{aligned}$$

事实上，上述结果也是很明显的，因为在十个球中有五个奇数号球，因此，任取一球恰好出现奇数的概率应为 1/2。

四、　贝叶斯（Bayes）公式

设事件 B 能而且只能与两两互斥事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中的任一事件同时发生，即事件 B 仍是(1-1-13)式中所表达的事件。

根据(1-1-10)式可以写出

$$P(A_i|B)=\frac{P(A_iB)}{P(B)},$$

及

$$P(B|A_i)=\frac{P(A_iB)}{P(A_i)},$$

即

$$P(A_iB)=P(B)P(A_i|B)=P(A_i)P(B|A_i),$$

故得

$$P(A_i|B)=\frac{P(A_i)P(B|A_i)}{P(B)},\tag{1-1-16}$$

将(1-1-15)式代入，则得

$$P(A_i|B)=\frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B|A_i)} \quad (i=1,2,\cdots,n)。 \tag{1-1-17}$$

上式称为贝叶斯公式。它是用来计算在事件 B 已发生的条件下事件 $A_i(i=1,2,\cdots,n)$发生的概率。

例[1-10] 在例[1-9]中，如任取一球，已知其编号为奇数，问该球恰好是红色球的概率是多少?

解：按题意就是要求 $P(A_2|B)$，将例[1-9]中的已知数据代入(1-1-17)式，则得

$$P(A_2|B)=\frac{P(A_2)P(B|A_2)}{\sum_{i=1}^{3}P(A_i)P(B|A_i)}$$

$$=\frac{\frac{3}{10}\times\frac{2}{3}}{\frac{2}{10}\times\frac{1}{2}+\frac{3}{10}\times\frac{2}{3}+\frac{5}{10}\times\frac{2}{5}}=\frac{2}{5}。$$

由此例看出，$P(A_2|B)=\frac{2}{5}$，但 $P(B|A_2)=\frac{2}{3}$，所以不能把 $P(A_2|B)$ 和 $P(B|A_2)$ 搞混淆了，它们的含义是不相同的。

§1-2 随机变量及其分布

为了全面地研究随机试验的结果，以揭示客观存在着的统计规律性，现在引入随机变量的概念。

我们知道，当进行某项随机试验时，由于受到种种偶然因素的影响，使得该项试验得到不同的结果（随机事件)。例如，在例[1-8] 中进行一次“抛掷三个硬币出现正面个数”的试验，它可能出现四种结果，即出现 0 个、1个、2个、3 个正面。如果现在用大写字母 X 来表示一次试验中出现正面的个数，那么，X 随着试验的不同结果将取得不同的值，即 $X=0$、$X=1$、$X=2$、$X=3$，并已知在一次试验中取得各个数值的概率分别为1/8、3/8、3/8、1/8，但在试验之前都不能预知它会取得其中的哪一个值。

有些试验，它的结果并不是通过数字的形式表现出来的，但为了便于研究起见，我们也可以将每一结果用一个实数来代表。例如，在例 [1-2] 中，我们可用 1,2,3 分别表示出现黄球、红球、白球的事件，这样，当我们讨论试验的结果时，就可以简单地说：结果是数“1”，数“2”，或数“3”。建立这种数量化的关系，实际上就相当于引入了一个变量 X。对于试验的三个结果，可以表示为 X 的三个取值，并分别规定为 1,2 和 3，而且取得每一个值都具有各自不同的概率，但在试验之前却不能预知 X 会取得哪一个值，我们就称这样的变量 X 为随机变量。显然，这一性质显示了随机变量与普通函数有着本质的差异。

在以上所举的例子中，随机变量的全部可能取值是有限个，是可以一一列举出来的，这种随机变量称为离散型随机变量。除此之外，在实践中还有非离散型随机变量。例如，射击命中点的横（纵）坐标、命中点到靶心的距离、观测误差的数值等等，都是些非离散型随机

变量。这是因为它们的可能取值都不能预先一一列举出来的，而是连续地充满某一个区间(a,b)(a可以是$-\infty$，b可以是$+\infty$)，所以非离散型随机变量也称为连续型随机变量。

一般而言，设离散型随机变量X的所有可能取值为$x_1,x_2,\cdots,x_n$，则可将X取各个可能值的概率，即事件$(X=x_i)$的概率表达为

$$P(X=x_i)=p_i \quad (i=1,2,\cdots,n)。 \tag{1-2-1}$$

由于事件$x_i(i=1,2,\cdots,n)$构成一个完全事件组，且为两两互斥的，因此必有

$$\sum_{i=1}^{n} p_i=1。 \tag{1-2-2}$$

即随机变量取所有可能值的概率之和等于1。(1-2-1)式称为离散型随机变量X的概率分布或分布律。给定了分布律，我们不仅知道了一个离散型随机变量X的所有可能取值，而且知道了取每个可能值的概率。因此，分布律可以完整地描述一个离散型随机变量X的统计规律性。

分布律可以用表格的形式表示出来：

X	x_1	$x_2\cdots x_n$
p_i	p_1	$p_2\cdots p_n$

这样的表格称为随机变量X的分布列。为了更加直观，还可以用图形来表示（图1-1）。图中横轴上的点表示可能的取值，纵轴表示取这些值的概率。这种图也称为分布多边形。

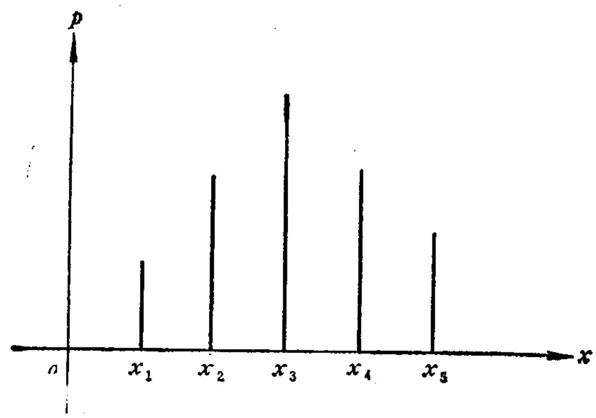


图 1-1

例[1-11]　设以随机变量X取值0,1,2,3分别表示射击成绩不及格，及格，良好，优秀四种情况。已知甲、乙两人的射击成绩的分布列如下表所示：

甲：

X	0	1	2	3
p_i	0.0	0.2	0.3	0.5

乙：

X	0	1	2	3
p_i	0.1	0.3	0.4	0.2

则甲乙两人相应的分布多边形如图1-2(a)及(b)所示。

下面介绍离散型随机变量一种比较重要的分布：二项分布。

设进行一试验，在一次试验中只可能出现两种结果，即不是出现事件A，便是出现事件$\bar{A}$。现记$P(A)=p$，$P(\bar{A})=1-p=q$。若将此试验重复进行n次，观察事件A出现的次数。显然，在n次试验中，事件A可能出现的次数X有0次，1次，$\cdots$，n次，它是一个随机变量。现在来求事件A恰好出现k次（$0\leqslant k\leqslant n$）的概率$P(X=k)$。

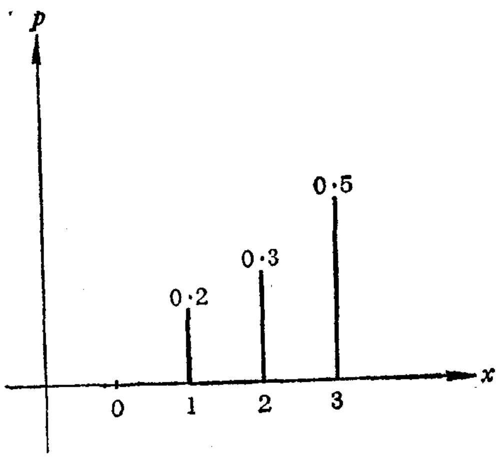
先以$n=3$、$k=1$为例来讨论。在3次试验中，事件A出现1次的情况有以下C_3^1种：

$$A_1\bar{A}_2\bar{A}_3,\quad \bar{A}_1A_2\bar{A}_3,\quad \bar{A}_1\bar{A}_2A_3。$$

由于各次试验是相互独立的，故有

$$P(A_1\bar{A}_2\bar{A}_3)=P(\bar{A}_1A_2\bar{A}_3)=P(\bar{A}_1\bar{A}_2A_3)=p^1q^{3-1},$$

又由于上述三种情况是互斥的，所以在3次试验中，事件A发生1次的概率为



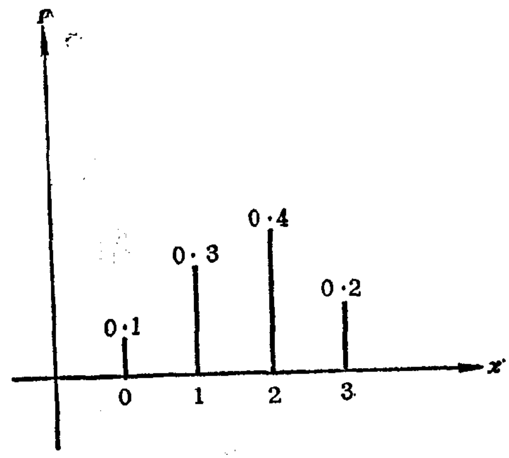


图 1-2

$$P(X=1)=P(A_1\bar{A}_2\bar{A}_3)+P(\bar{A}_1A_2\bar{A}_3)+P(\bar{A}_1\bar{A}_2A_3)=C_3^1p^1q^{3-1}。$$

一般而言，在 n 次重复试验中，事件 A 恰好出现 k 次($0\leqslant k\leqslant n$)的概率为

$$P(X=k)=C_n^kp^kq^{n-k},\quad (k=0,1,\cdots,n),\tag{1-2-3}$$

其中 $0<p<1,p+q=1$。

既然 n 次试验中所可能发生的互斥结果是 A 出现 0 次，1次，…，n 次，故有

$$\sum_{k=0}^{n}P(X=k)=\sum_{k=0}^{n}C_n^kP^kq^{n-k}=1。\tag{1-2-4}$$

由于 $C_n^kP^kq^{n-k}$ 刚好是二项式$(p+q)^n$的展开式中的第 $k+1$ 项，所以就说这一随机变量 X 服从二项分布。

例[1-12] 设在相同观测条件下测得三角形闭合差 w_1,w_2,w_3,w_4，已知出现正负闭合差的概率各为 1/2，求在此四个闭合差中分别有 0 个，1个，…，4 个正闭合差的概率。

解：在(1-2-3)式中代入 $n=4,k=0、1、2、3、4$ 得

$$P(X=0)=C_4^0\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{16},\quad (注\ C_n^0=1)$$

$$P(X=1)=C_4^1\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{4}{16},$$

$$P(X=2)=C_4^2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{6}{16},$$

$$P(X=3)=C_4^3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{4}{16},$$

$$P(X=4)=C_4^4\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^0=\frac{1}{16}。$$

由(1-2-4)式有 $P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)=1$，即出现上述五种情况之一是必然事件。

上面所讲的(1-2-1) 式或分布列只能用来描述离散型随机变量的概率分布，对于连续型

随机变量则不能采用。这是因为连续型随机变量具有无限个可能值，它充满着某一个区间，所以不可能通过事件（$X=x$）的形式把它们的概率一一列举出来；此外，以后我们将会看到，连续型随机变量取个别值的概率等于零。在此情况下，将不采用事件($X=x$)的概率，而用事件($X\leqslant x$)的概率。事件($X\leqslant x$)的概率显然是x的函数，现令

$$F(x)=P(X\leqslant x)。\tag{1-2-5}$$

函数$F(x)$称为随机变量的累积分布函数，简称为分布函数。无论是离散型或连续型的随机变量都存在分布函数，所以它是描述随机变量概率分布的更一般形式。

因为事件($X\leqslant a$)和事件($a<X\leqslant b$)是两个互斥事件，其和即为($X\leqslant b$)事件，所以

$$P(X\leqslant b)=P(X\leqslant a)+P(a<X\leqslant b),$$

由此得

$$P(a<X\leqslant b)=P(X\leqslant b)-P(X\leqslant a),$$

顾及(1-2-5)式，上式可以写成

$$P(a<X\leqslant b)=F(b)-F(a)。\tag{1-2-6}$$

可见，只要知道了X一切可能值的累积分布函数时，则随机变量X出现在某一区间内的概率就可以由上式求得。同时由(1-2-6)式可以看出，随机变量X落在给定区间上的概率等于分布函数在这一区间上的增量。

根据以上所述，可知分布函数$F(x)$具有以下几个性质：

1．因为概率是一个非负数，所以分布函数$F(x)$是所有变量的非降函数，即当$x_2>x_1$时，

$$F(x_2)\geqslant F(x_1)。\tag{1-2-7}$$

2．因为随机变量的取值恒大于$-\infty$，所以事件($X<-\infty$)成为不可能事件。换言之，在负无穷远处的分布函数值等于零，即

$$F(-\infty)=P(X<-\infty)=0。\tag{1-2-8}$$

3．因为随机变量的取值恒小于$+\infty$，所以事件($X<+\infty$)成为必然事件。换言之，在正无穷远的分布函数值等于1，即

$$F(+\infty)=P(X<+\infty)=1。\tag{1-2-9}$$

根据分布函数的定义，对于离散型随机变量而言，其分布函数应为

$$F(x)=P(X\leqslant x)=\sum_{x_i\leqslant x}P(X=x_i),\tag{1-2-10}$$

在和式下面的$x_i\leqslant x$是表示对小于或等于x的所有x_i求和。

例[1-13] 试求例[1-11]中属于射击手乙的分布函数，并求$P\left(X\leqslant\frac{1}{2}\right)$，$P\left(1<X\leqslant\frac{3}{2}\right)$，$P(1\leqslant X\leqslant 3)$。

解：射手乙的分布函数为

$$F(x)=P(x\leqslant x)=\begin{cases}0 & =0 & x<0,\\ 0.1 & =0.1 & 0\leqslant x<1,\\ 0.1+0.3 & =0.4 & 1\leqslant x<2,\\ 0.1+0.3+0.4 & =0.8 & 2\leqslant x<3,\\ 0.1+0.3+0.4+0.2 & =1.0 & x\geqslant 3。\end{cases}$$

$F(x)$的图形如图 1-3 所示，它是一条阶梯形的曲线，在 $x=0、1、2、3$ 处具有跳跃点，跳跃值分别为 0.1,0.3,0.4,0.2。

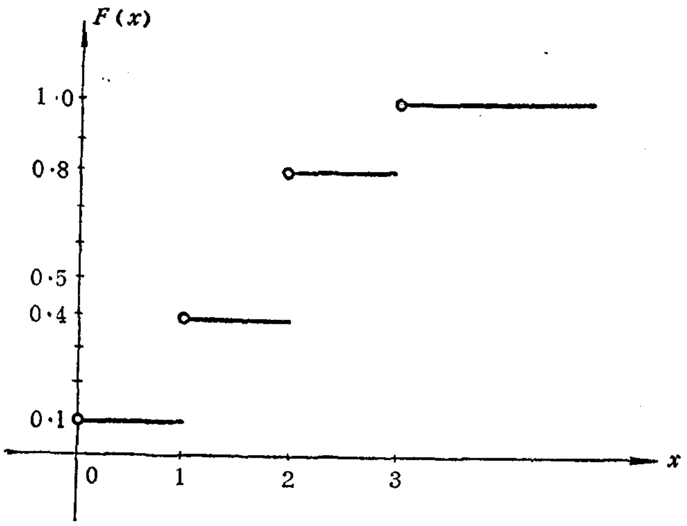


图 1-3

又

$$P\left(X\leqslant\frac{1}{2}\right)=F\left(\frac{1}{2}\right)=0.1,$$

$$P\left(1<X\leqslant\frac{3}{2}\right)=F\left(\frac{3}{2}\right)-F(1)=0.4-0.4=0,$$

$$P(1\leqslant X\leqslant 3)=F(3)-F(1)+P(X=1)=1.0-0.4+0.3=0.9。$$

假定分布函数 $F(x)$是连续的，且具有连续的微商，现计算随机变量落入区间$(x,x+\Delta x)$的概率：

$$P(x<X\leqslant x+\Delta x)=F(x+\Delta x)-F(x)。\tag{1-2-11}$$

这就是分布函数在此区间内的增量，上式除以区间长度 Δx，即为 X 落在此区间内的平均概率。当 $\Delta x\to 0$，并取极限，即得分布函数的导数，即

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}=F'(x)。\tag{1-2-12}$$

引入记号

$$f(x)=F'(x),\tag{1-2-13}$$

故得

$$\frac{dF(x)}{dx}=f(x),\tag{1-2-14}$$

同时有

$$dF(x)=f(x)dx。\tag{1-2-15}$$

函数 $f(x)$ 刻划了随机变量在给定点上概率分布的密度，故称它为概率密度或密度函数，简称为密度。概率密度 $f(x)$ 是 x 的一个连续函数，根据它作出的曲线称为概率分布曲线，或简称分布曲线。

由（1-2-15）式不难理解，$f(x)dx$ 就是连续随机变量 X 落在点 x 的基本区间 dx 上的概率，称为概率元素（图1-4）。$f(x)dx$ 在连续型随机变量理论中所起的作用与概率 $P(X=x_i)=p_i$ 在离散型随机变量理论中所起的作用是类似的。随机变量 X 落入区间 (a,b)内的概率应为该区间内所有概率元素之和（图1-4），即

$$P(a<X\leqslant b)=\int_a^b f(x)dx。\tag{1-2-16}$$