数学基础引论

黄耀枢 著

北京大学出版社

数学基础引论

黄耀枢 著

北京大学出版社

内 容 简 介

本书通过数学基础研究的历史阐述数学与逻辑、数学与哲学的关系问题。在1—11章中论述了$\sqrt{2}$"危机"的实质和意义、《几何原本》的局限与几何基础的研究、无穷小分析的争论、布尔代数和现代逻辑、形式证明的逻辑定义、数论和哥德尔不完全性定理等问题，每一章末还编有习题。在第12—15章中对数学中的逻辑主义、直觉主义、形式主义、柏拉图主义和拟经验主义的基本观点作了介绍和评述。最末一章是一个结论，它对数学的对象、性质和真理性问题作出了哲学解释。

本书可作为高等院校哲学系开设数学哲学课的教材使用。

数学基础引论
黄耀枢 著
责任编辑：苏 勇
*
北京大学出版社出版
（北京大学校内）
保定市华孚商标印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售
*
850×1168毫米 32开本 10.75印张 250千字
1987年12月第一版 1989年10月第二次印刷
印数：0001—4,000册
ISBIN 7-301-00587-3/B·047
定价：2.40元

前　言

《数学基础引论》是以多年来的讲稿为基础编写成的。全书共十六章。章节结构是依历史与逻辑的统一的原则来处理。内容包括两个方面：一是关于元数学问题的讨论；另一是关于纯数学理论的哲学问题的讨论。目的是通过数学基础问题的历史和现状来说明如何理解数学知识的可靠性问题，所以可证性的概念的逻辑论证和哲学解释成为全书的核心。

数学基础是一个理论性和技术性都很強的学科。为了保证教学效果，便于学生的学习，除了在一至十一章中编了习题外，还对书中一百多条定理、引理和推论，例如从古老的毕达哥拉斯定理到当代具有划时代意义的哥德尔不完全性定理都作了详细的讨论，除难度较大的几条定理只给出证明的概要外，其余的都给出了完整的证明。所以它不仅可使学生增加当代数学哲学的知识，而且可使学生的逻辑论证的训练大大加強。这一点对从事哲学专业学习的学生来说是十分重要的。因为，如果对接受数学训练的学生来说，是以掌握选择公理的熟练程度来衡量他们受训练的素质的话，那么对接受哲学训练的学生来说，就可以掌握哥德尔不完全性定理的熟练程度来衡量他们接受训练的素质了。所以我把“数学基础引论”课作为哲学系高年级学生和研究生的选修课，但它是自然辩证法专业和科学哲学专业的研究生的必修课，而且对后二者来说还要附加习题课。

本书的章、节和定理都采取独立编号。例如：定理1.2是指本章第1节第2条定理，而定理4.1.2是指第四章第1节第2条定理。从内容的安排看，每一章除作为一个独立的论题外，各章之间也有内在的联系，后一章的论述往往要用到前些章的概

念、定义和定理，所以要想深入地掌握每一章的内容，最好依次一章章读下去，并做一定数量的习题，否则不容易掌握好。

这些年来，《引论》的部分内容曾在一些兄弟院校和学习班介绍过，因而起了抛砖引玉的作用。我从他们那里得到不少有益的修改意见。特别是近三年来，由于我负责《自然辩证法百科全书》"数学哲学"学科编写组的工作，使我通过审稿和定稿的一系列讨论，听取了专家们有关数学基础问题的许多宝贵意见，这对我这次修改这讲稿无疑也起了重要的作用。

最后，特别要指出的是，冀建中同志认真阅读了全稿，且为一至十一章编了习题和有关全书的三个索引（人名索引、术语索引和符号索引），并对有些表述提出了十分好的修改意见。

谨此一并向这些同志们表示衷心的谢意。

由于这著作牵涉领域颇广，加上本人能力和水平都有限，所以难免有不足或错误，恳请专家和读者们给予批评指正。

作 者

1986年4月于北京大学

目　录

附 录

第一章　$\sqrt{2}$的发现和毕达哥拉斯学派的危机

1. 历史的回顾

恩格斯指出：数学起源于数数，它是从数量这个概念开始的。从数学发展的历史来看，初等数论起源于如下三种数的研究：完全数①，毕达哥拉斯数和循环十进小数。数论的许多定理和一些著名的猜测来源于希腊人对前二者的研究。例如猜测有无穷多个完全数；提出奇完全数是否存在的问题；此外数学家们还提出麦尔仙纳数是否有无穷多个素数②和是否存在麦尔仙纳合成数的问题以及著名的哥德巴赫（C.Goldbach）猜测等。

从欧几里得（Euclid）以后，大约两千年来，数学家们相继做了不少努力，企图证明数论发展中提出来的一些猜测，并在不同方面和不同程度上取得了进展、突破以至解决了一部分猜测。这主要应归功于数学的发展，但哲学思想对数学的发展往往会起加速或延缓的作用。对毕达哥拉斯（Pythagoras）学派的思想的研究，将给我们作出这方面的结论。

从完全数的研究发展来看，虽然已引起不少疑难和猜测，但它的发展还是按常规的方式进行着。它也不直接与当时某种哲学思潮相抵。所以作为考察数学基础研究的早期历史，更值得追溯的是毕达哥拉斯学派。

---

① 定义：一个完全数恰好等于它全部正因子（除它本身外）的和。例如，6的因子是1，2，3，而6＝1＋2＋3，所以6是完全数。

② 麦尔仙纳（M.Mersenne）数是指形如$M_n=2^n-1$的数，其指数n是一个素数。

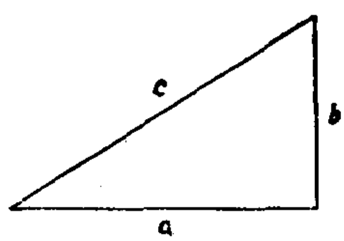
毕达哥拉斯数的研究不仅是数论发展的来源之一，而且也是早期数学基础研究的主要问题之一。关于这个数的研究比完全数的研究更为古老。为了定义这个数，先给出如下定理：

定理1.1

$$a^2+b^2=c^2 \tag{1}$$

这里a,b,c为正整数。通常称定理1.1为**毕达哥拉斯定理。**

定义1.1 毕达哥拉斯数是满足定理1.1的三个正整数。



毕达哥拉斯学派从两方面来说明等式（1）和定义1.1的内容：第一，它们提供一个有关直角三角形的毕达哥拉斯定理，且满足方程（1）的三个正整数解给出如左一个直角三角形；第二，毕达哥拉斯学派提供了下列等式（2）作为等式（1）的解。并意指等式（2）可给出无穷多个这样的三角形。他们认为，如果m是奇数，且$m>1$，那么有

$$a=m,\ b=\frac{1}{2}(m^2-1),\ c=\frac{1}{2}(m^2+1) \tag{2}$$

例如，$a=3$，$b=\frac{1}{2}(3^2-1)=4$，$c=\frac{1}{2}(3^2+1)=5$，即有

$$3^2+4^2=5^2$$

我们也称上列等式（2）为毕达哥拉斯数的"通式"。意指所有满足等式（1）的数都可由等式（2）给出。但严格说来，后一点的说明是不正确的，原因有二：第一，巴比仑人至少早于毕达哥拉斯一千多年已经知道能满足式（1）的数不是只由式（2）给出的，所以它不是真正的通式①。第二，这个"通式"事实上已隐含着这个学派认为：每个直角三角形只要选择合适的单位长度，其三边总有一个整数关系。显然这是不正确的。他们

① 见第3节。

有这种信念不是沒有原因的，它源出于他们的整个哲学观——“数是万物的本原”，或说世界的本原是数。而这个数实质上又是指正整数或分数。

此外，有些数学史家认为等式（1）和等式（2）都可能不是毕达哥拉斯学派发现的，他们只是在别人发现的基础上作了深入的研究。但也有不少数学史家认为，这个学派证明过这条定理，是可信的。因为他们对比例论和相似三角形理论都作过深入的研究，依图 1.1 用这两种理论证明这条定理是非常容易的。即有：

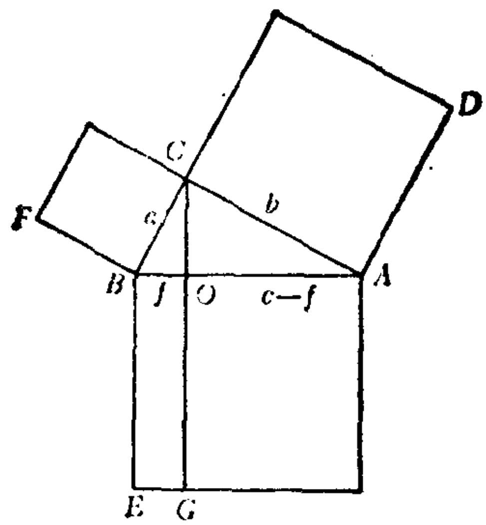


图 1.1

$$f:a=a:c,\qquad \because \triangle OBC\simeq\triangle CBA.$$

由此得：

$$\text{I}.\qquad a^2=fc.$$

$$b:c=c-f:b,\qquad \because \triangle ABC\simeq\triangle ACO.$$

由此得：

$$\text{II}.\qquad b^2=c(c-f)=c^2-fc.$$

I + II 得：

$$a^2+b^2=fc+c^2-fc=c^2.$$

如果上述总的说来是符合历史的话，那么毕达哥拉斯数的概念确是毕达哥拉斯学派的研究成果了。

2. $\sqrt{2}$ 的发现和数学基础的第一次危机

毕达哥拉斯学派的哲学一方面促进了他们对数论的研究；但另一方面也给他本身带来了不幸。因为依据毕达哥拉斯定理1.1，

且假设$a=b$，就可得如下定理：

定理2.1　等式

$$2a^2=c^2 \tag{3}$$

没有正整数解。

在证明定理2.1之前，先叙述两个定义：

定义2.1　对于大于1的任一整数a，如果它除1及$|a|$外再没有任何整约数，那么就称a为素数，否则a为合成数。此外，±1只有一个约数，0能被任何整数除尽，它有无穷多个约数。

定义2.2　如果g是可整除整数a，b的一个最大整数，那么我们称g为a，b的最大公因子，并记为

$$(a,\ b)=g.$$

特别是，如果

$$(a,\ b)=1,$$

就说a与b互素。

例如：

$$(9,\ 12)=3,\qquad (1,\ 7)=1,$$

$$(8,\ 16)=8,\qquad (n-1,\ n)=1.$$

现证明定理2.1.假设定理2.1有正整数解。令$(a,\ c)=g$，于是有$a=mg$，$c=ng$，而

$$(m,\ n)=1 \tag{4}$$

那么得：

$$2m^2=n^2$$

显然n^2是偶数，所以n也一定是偶数。令$n=2D$，并且

$$2m^2=4D^2\ \text{或}\ m^2=2D^2.$$

于是m也是偶数，这就与式(4)的结论发生矛盾，依反证法，表明式(3)确没有正整数解。其实式(3)不仅没有正整数解，它在有理数范围内都没有解，即

$$\sqrt{2}\neq c/a.$$

所以从近代数学观点看来，已知$\sqrt{2}$是一个无理数，但一个无理数不是通常意义下的一个数，它是由狄德金（Dedekind）切来定义的，是数的序偶的一个类的类。①

定理2.1的结论对毕达哥拉斯学派来说，引起如下疑难：

第一，比例论和相似三角形理论是否正确？

第二，毕达哥拉斯定理的证明是否正确？

第三，定理2.1的证明是否正确？

但对这三者的怀疑都是没有根据的。余下的唯一可能的结论是："数是万物的本原"的论题是可疑的，尽管毕达哥拉斯学派绝不愿意接受这一可怕的结论。定理2.1的结论说明，当直角三角形两个直角边相等（即在45°的直角三角形中）时，直角边与斜边无公度，它们之比无法用整数或分数来说明。这表明"数是万物的本原"的论题是不可靠的，因为不要说"万物"，在直角三角形中已有一部分是无法用毕达哥拉斯学派所说的数（即整数或分数）来说明了。由此动摇了毕达哥拉斯学派的哲学基础。

$\sqrt{2}$的发现，本来是数学发展史上人类对数概念认识的一次飞跃，但由于毕达哥拉斯学派被自己的哲学偏见所禁锢，使他们不敢承认它是一个数。数学史家们称这一史实为数学基础研究史中出现的**第一次危机**。其实更严重的不是数学基础的危机，而是动摇了这个学派的信念，使信徒们的思想陷入极度不安的深渊之中，这是导致这一学派瓦解的原因之一。

3. 定理2.1的推广和定理1.1通解的研究

尽管毕达哥拉斯学派由于$\sqrt{2}$的发现陷入危机，但数学家们还是在毕达哥拉斯数的基础上对三个问题作了研究：

第一个问题：关于定理2.1的推广。毕达哥拉斯学派在45°的

① 见第三章第四节。

直角三角形（即正方形沿对角线平分）研究中发现了$\sqrt{2}$，这是一个无理数的发现。其实不止这一个，在一个30°—60°的直角三角形（即等边三角形的一半）的研究中，人们发现$\sqrt{3}$，与它对应的方程是

$$c^2 = 3a^2. \tag{5}$$

等式（5）也没有正整数解和分数解。换句话说$\sqrt{3}$也是一个无理数。

据说毕达哥拉斯学派的狄奥拉斯（Theodurus，约公元前400年）曾证明过$\sqrt{3}$，$\sqrt{5}$，$\sqrt{6}$，$\sqrt{7}$，$\sqrt{8}$，$\sqrt{10}$，$\sqrt{11}$，$\sqrt{12}$，$\sqrt{13}$，$\sqrt{14}$，$\sqrt{15}$和$\sqrt{17}$都是无公度的数（即无理数）。但他没有作进一步研究，作出普遍性的处理。为了便于下面的讨论，我们先证明两条定理。

定理3.1 除1外一个大于1的整数的最小约数是一个素数。

证 设q是整数$a>1$的最小约数，并且q不等于1。如果q是一个合成数，那么它将有一个约数q_1满足$1<q_1<q$；这样q的一个倍数a也是q_1的一个倍数，这就与假设q是a的最小约数矛盾。

以下我们再证明一条重要定理——**算术基本定理**：

定理3.2 每一个大于1的整数可唯一地分解成素因子的一个连乘积，如果不考虑这些因子排列的顺序。

证 设a是一个大于1的整数。依上述定理可令p_1表示它的最小素因子，我们有$a=p_1a_1$。如果$a_1>1$，那么我们用p_2代表它的最小素因子，我们就有$a_1=p_2a_2$。如果$a_2>1$，相仿我们就可以找到$a_2=p_3a_3$，等等，直到分解至$a_n=1$，且$a_{n-1}=p_m$，将以上等式相乘，化简，我们就得

$$a = p_1p_2\cdots p_m.$$

上式只表明这个分解是存在的。现在我们还要证明这个分解的唯一性。

现设 a 还有另一个分解为素因子的表达式：

$$a = q_1q_2\cdots q_n.$$

因为素数因子 p_i 和 q_i 全是正的，两个分解式里的单位 ±1 必需相合，第一个分解式里的 p_1 是乘积 $a=\pm q_1q_2\cdots q_n$ 的一个约数，所以 p_1 至少可以和这个乘积的因子 q_i 相约①，于是 $p_1=q_i$。重新排列分解式 $q_1q_2\cdots q_n$，使 q_i 出现在第一位，再消去 p_1 和 q_i，就留下

$$p_2p_3\cdots p_m = q_2q_3\cdots q_n'$$

这里撇号表示余下的 q 的一种重新排列。继续应用这方法一直到最后式子的一边没有素数留下来，这时另一边也不能有素数留下来。因为当等式左边的因子全消去后就等于1，如果右边还有因子的话，那就出现 $1=q_{m+1}\cdots q_n$，这样 $q_{m+1}\cdots q_n$ 中任一个大于1将是不可能的。

所以，a 被分解为两种素因子将一定相同。这就表明，我们只要重新排列第二个分解式里素数的次序就可以使这两个分解重合。这就是分解的唯一性的证明。

在一个数目的分解式里，同一个素因子 p_i 可能出现几次，把重复出现的聚集起来，我们就可以把分解式写作如下形式：

$$a=\pm p_1^{e_1}p_2^{e_2}\cdots p_k^{e_k} \quad (1<p_1<p_2\cdots<p_k)$$

这里定理的唯一性断定每个素数 p_i 的方次 e_i 是由已知数 a 唯一决定的。所以这条算术基本定理又可叙述为：**任何正整数可以唯一分解为素数幂的乘积**。所以，从乘法的观点看，素数是构成数的"原子"。

现应用上述定理证明从定理2.1推广的结论：

定理3.3 等式

$$c^n = Na^n$$

没有正整数解，除非 N 是一个整数的第 n 个幂。

---

① 这个相约不仅可能，而且可重复进行，这是以数论已证明的结论为根据，即：如果 p 是素数，那么从 p 可除 ab 推出 p 可以除 a，或 p 可以除 b。

证 依定理3.2，c 和 a 可写作如下标准形式：

$$c = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots, \qquad a = q_1^{\beta_1} q_2^{\beta_2} \cdots.$$

由此显见 c^n, a^n，从而 c^n/a^n 在它们的标准因子中的全部指数都可以用 n 除。所以 $N = c^n/a^n$ 是第 n 个幂。

这是通过对定理2.1推广的结果，与此有关无理数和超越数的不可解问题还很多，但它们已超出本著作讨论的范围。

第二个问题：对定理2.1（即等式(3)）可修改为如下命题：

$$c^2 - 2a^2 = \pm 1. \tag{6}$$

等式的右边不能用0代换。为了使它与一个等腰的直角三角形十分近似，我们可设法通过等式(6)右边的可能的最小值求出两个a边和一个“斜边”c，使对应的等腰三角形与一个直角三角形近似，且比值 c/a 是$\sqrt{2}$的有理近似。以相反的方法来讨论这个问题也一样。令三角形是直角的，它的两个（整数）边有极小的差别，即令等式(1)中的$\underline{b} = \underline{a} + 1$。这样从$\underline{a}^2 + \underline{b}^2 - \underline{c}^2 = 0$可得

$$2\underline{a}^2 + 2\underline{a}^2 + 1 - \underline{c}^2 = 0 \tag{7}$$

或

$$(2\underline{a} + 1)^2 - 2\underline{c}^2 = -1.$$

这样我们用$c = 2\underline{a} + 1$和$a = \underline{c}$就能求出等式(6)的一个解；即a等于其右边的-1。

这是一个有趣的解，毕达哥拉斯学派至少也知道有关这等式的某些解。后来数学家们还给出如下定理：

定理3.4 令“边”和“斜边”分别为a_n和c_n，且依下式定义：

$$a_1 = 1, \qquad c_1 = 1;$$
$$a_2 = 2, \qquad c_2 = 3;$$
$$a_3 = 5, \qquad c_3 = 7;$$

一般有

$$a_{n+1} = a_n + c_n, \quad c_{n+1} = 2a_n + c_n \tag{8}$$

于是有