

沃尔什函数及其应用

(美) K. G. 比彻姆 著

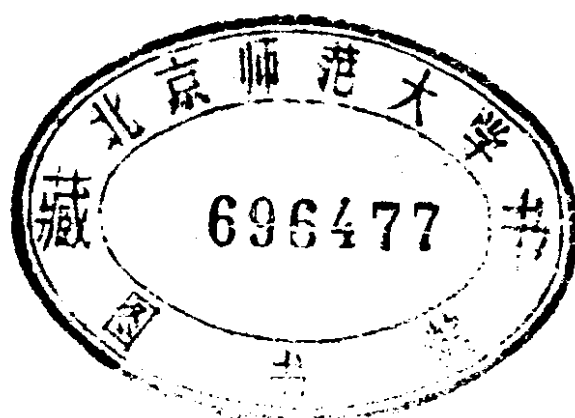
科学出版社

沃尔什函数及其应用

〔美〕K. G. 比彻姆 著

常 邈 译

12-6106



科学出版社

1980

内 容 简 介

本书对沃尔什函数作了全面介绍,内容比较丰富,讲述清楚易懂,是一本了解沃尔什函数很好的入门书。

全书共分八章。前四章介绍正交函数、沃尔什函数、沃尔什级数、沃尔什变换以及哈尔函数的基本概念。第五、第六两章讨论了沃尔什谱和数字滤波器。最后两章综述了沃尔什函数在谱分析和信号处理中的应用。

本书可供通信、广播、应用数学、波谱学和地震学等领域中的科技人员和大专院校有关专业师生参考。

K. G. Beauchamp

WALSH FUNCTIONS AND THEIR APPLICATIONS

Academic Press, 1975

沃尔什函数及其应用

[美] K. G. 比彻姆 著

常 迥 译

*

科学出版社出版

北京朝阳门内大街 137 号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1980 年 4 月第 一 版 开本: 787×1092 1/32

1980 年 4 月第一次印刷 印张: 8 3/4

印数: 0001—7,700 字数: 193,000

统一书号: 15031·274

本社书号: 1720·15—7

定价: 1.10 元

前 言

在电工程的许多领域中，正弦和余弦函数一直被视为是这些工程的发展基础，这主要是因为在工程设计的理论和实践中，经常是用频域法来研究各种信号的特征。正弦-余弦函数具有一些优点。在通信领域中，可举出很多示例，特别是在分析随机问题时，正弦和余弦函数的完备性与正交性对于解决判别问题更显示出它们的优越性。自从数字技术和半导体技术发展以来，人们开始采用其它更有普遍性的完备正交函数。就线性时不变系统而言，这些正交函数虽缺少正弦和余弦函数在线性时不变网络中的一些有用特性，但却具有另一些有用的特点使得它们在某些方面的应用更为直接和简便。

沃尔什函数和哈尔函数就是这类函数中最重要的两个函数。它们的主要特点是仅包括有两个状态，与数字逻辑的特点一致，同时还具有与正弦-余弦函数相似的一些特性。

从历史的发展来看，哈尔级数是在 1910 年^[1]由匈牙利数学家哈尔 (A. Harr) 首先提出的。他所提出的正交函数只取两个数值，任何连续函数都可用这种正交函数展成级数，并满足一致收敛的条件。这个特点并非当时所知的所有正交函数都具备的。此外，哈尔级数的提出完全证实了二十世纪初由施米特 (Schmidt) 等人在戈廷根 (Göttingen) 所提出的正交级数的统一理论^[2]。

沃尔什函数是在 1923 年由美国数学家沃尔什 (J L Walsh) 提出的^[3]。这些函数同样构成一组完备的正交函数，它虽只取 +1 和 -1 两个数值，但仍具有许多与三角级数相

似的特性。几乎同时(1922年),德国数学家拉德梅克(H. Rademacher)提出了另一组两值的正交函数。后来发现这是一组不完备的正交函数。实际上,拉德梅克函数是沃尔什函数的一个子集^[4]。

上述三种函数构成了有关通信和处理这一新方向的基础,这是本书要讨论的内容。所有这些函数都构成了包括无限多个周期性的正交方波可数函数的集合。这些函数是在无限多个不连续跳变点之间具有分段不变的特点。但在大多数实际情况下,我们只取有限个离散的函数。

沃尔什在他的原始论文中,给出了一个沃尔什函数的递推公式,此式是按照函数的序数是由正交区间内过零平均数来确定的。此后不久这种规定函数序数的方法在波兰数学家卡兹马兹(S. Kaczmarz)的重要的级数研究工作中也被采用了^[5],所以现在通常将这种规定函数序数的方法称为沃尔什-卡兹马兹定序法。最近,哈马斯(H. F. Harmuth)^[6]建议用“序数”这个名词来表示沃尔什-卡兹马兹定序的方法,已被公认。

1931年,一位美国数学家佩利(R. E. A. C. Paley)^[7]又给沃尔什函数提出一个很不相同的定义。他指出:沃尔什函数可以用有限个拉德梅克函数的乘积来表示,这样得到的序数与沃尔什所得的序数完全不同。这种定序的方法是利用二进制数来定序的,所以称为二进制序数或“自然”序数。皮切尔(F. Pichler)^[8]找出了上述两种序数之间的关系。

利用一些只包含有+1和-1做为阵元的正交矩阵还可以将沃尔什函数表示为矩阵形式是一种很早就有的方法。早在1867年^[9],英国数学家西尔威斯特(J. J. Sylvester)已经研究过这类矩阵。后来法国数学家哈德玛(M. J. Hadamard)在1893年将这种矩阵加以普遍化,建立起所谓哈德玛矩阵^[10]。利用克罗内克乘积算子不难将沃尔什函数表示为哈德玛矩阵

形式。利用这样的形式所定义的沃尔什函数的序数称之为克罗内克序数，也就是沃尔什函数的第三种定序方法。将自然序数进行二进制码的反演即可得到克罗内克序数。

上面所列举的文献奠定了沃尔什函数及其有关函数的数学基础，这个工作实际上在 30 年代已经完成了。但是，这些函数在工程和其它方面的应用却直到三十年后，当半导体器件和数字计算机获得广泛的应用，才促使沃尔什函数得到发展。在应用上首先发展的是与通信有关的一些方面，开始是由哈马斯利用沃尔什函数解决一些通信工程问题^[11,12]。在过去十年内，在欧洲、美国和加拿大等国家中，已经实验出许多通信系统，包括序率多路复用设备在内。

沃尔什函数的许多应用将在本书后半部中讨论。这里应特别指出，在数据的计算机处理方面，二维数据或实时数据的加工处理已经获得进展，可参考普拉特 (Pratt)^[13]、安德鲁斯 (Andrews)^[14] 以及其他人的工作。这也关系到电视传输方面的应用，可参考伊诺莫托 (Enomoto)^[15]、塔克 (Taki)^[16]、温兹 (Wintz)^[17] 等人的工作。在这方面的工作中，沃尔什和哈尔变换与等效的傅里叶变换相比，它的主要优点就在于减小储存空间与计算速度的乘积。特别是当大量数据需要进行实时加工处理时，沃尔什函数更显示出它的优越性。

由于沃尔什函数的广泛应用，进一步推动了有关数学理论的研究，特别是数字计算方法的发展。这里值得注意的是吉布斯 (Gibbs) 的逻辑微分学的发展^[18,19]。我们知道，正弦-余弦函数经常是线性微分方程的特征解，而沃尔什函数已经用来表示所谓逻辑微分方程的解。在数理逻辑^[20]、近似理论^[21]、统计学^[22] 和线性系统理论^[23] 等方面业已采用了吉布斯导数。

沃尔什函数理论与应用的不断发展又提出了许多尚不完全清楚而需要进一步研究的问题。对于已采用傅里叶变换进

行分析的信号,例如地震信号,若改用沃尔什变换来进行分析和解释到底会有多大好处还存在有不少疑问。就电磁辐射和雷达方面的新应用来说,还需要进行大量的工作以后才能恰当地显示出沃尔什函数的潜力。最后还应指出:在根据新方法来更换一种旧设备以前,例如,更新已建立起的多路通信系统时,不仅要考虑新系统的技术性能,还应考虑到建立新设备的成本问题。

虽然如此,在最近二十年中,对沃尔什及其有关函数的研究和应用所取得的全面进展已有足够的根据来充分肯定它们可以同早已成熟的正弦-余弦函数相媲美。

本书的意图是对沃尔什及其有关函数的理论和应用做一广泛的评述,同时也对一般的应用做一必要的综述。前四章作为自学性质的内容将各新函数之间的基本关系作一概括性的总结,并与用在傅里叶分析的正弦-余弦函数进行比较。讨论序域变换以及它们的特性。从这样的数学基础出发,导出快速变换算法,并对运用数字计算机的程序问题进行讨论。

第五和第六两章讨论了序域分析和滤波的一般原则,这是沃尔什函数应用的基础。提出了与功率谱密度相应的概念并应用在特定的随机过程的分析中。同样与傅里叶分析作了比较。由于缺少与傅里叶理论中相似的移位定理,所以在沃尔什理论中采用“相关”和“卷积”是比较困难的。如果赋予时间变量某些不同的含义就可得到与“卷积”和“相关”等效的运算。这将影响到滤除离散抽样数据的步骤和方法,并与威纳所描述的经典过滤理论^[24]进行比较和讨论。

最后第七和第八两章讨论了各种应用。在这样相当短的时间之内,沃尔什函数发展之快以及应用如此广泛是很不寻常的。在此期间,沃尔什函数及其有关函数的应用已从初期仅作为熟知变换方法的一种补充方法发展到现在已成为若干

特殊问题的唯一方法了,在许多情况下还是比较经济的方法。许多工作业已在近年的国际专题讨论会上报告过,这些会议是在美国华盛顿和英国哈特菲尔德召开的。这些工作在本书中要反复提到。

这类旨在对某一课题进行广泛评述的工作,很少反映作者本人的经验,本书也不例外。

最后,我愿借此机会对许多给予过我帮助的个人和单位表示感谢。

参 考 文 献

- [1] Haar, A. (1910). Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme, *Math. Annal.* 69, 331—371.
- [2] Schmidt, F. (1905). Zur Theorie des linearen und nichtlinearen Integralgleichungen. *Math. Annal.* 63, 433—476.
- [3] Walsh, J. L. (1923). A closed set of orthogonal functions. *Amer. J. Math.* 45, 5—24.
- [4] Rademacher, H. (1922). Einige Sätze von allgemeinen Orthogonalfunktionen. *Math. Annal.* 87, 112—138.
- [5] Kacmarz, S. (1929). Über ein Orthogonalsystem. *Comptes-Rendus du I. Congrès des mathématiciens des pays Slaves.* Warsaw, 189—192.
- [6] Harmuth, H. F. (1964). Die Orthogonalteilung als Verallgemeinerung der Zeit und Frequenzteilung. *Archiv. Elektr. Übertragung*, 18, 43—50.
- [7] Paley, R. E. A. C. (1932). A remarkable series of orthogonal functions. *Proc. Lond. Math. Soc.* 34, 241—279.
- [8] Pichler, F. (1967). Das System der *sal* und *cal* Funktionen als Erweiterung des Systems der Walsh-Funktionen und die Theorie der *sal* und *cal* Fourier Transformation. Ph. D. Thesis, University of Innsbruck, Austria.
- [9] Sylvester, J. J. (1867). Thoughts on inverse orthogonal matrices, simultaneous sign-successions and tessellated pavements in two or more colours, with applications to Newton's rule, ornamental tile-work, and the theory of numbers. *Phil. Mag.* 34, 4, 461—475.
- [10] Hadamard, M. J. (1893). Résolution d'une question relative

• • •

aux déterminants. *Bull. Sci. Math.* A17, 240—246.

- [11] Harmuth, H. F. (1960). On the transmission of information by orthogonal time functions. *Trans. A. I. E. E. Comm. and Electronics* 79, 248—255.
- [12] Harmuth, H. F. (1963). Trägersystem für die Nachrichtentechnik. W. German Patent 1-191-416, H 50289 (U.S. Patent 3,470,324).
- [13] Pratt, W. K. (1969). Hadamard transform image Coding. *Proc. I. E. E. E.* 57, 58—68.
- [14] Andrews, H. C. (1970). "Computer Techniques in Image Processing". Academic press, New York and London.
- [15] Enomoto, H. and Shibata, K. (1970). Orthogonal transform coding system for Television. *J. Inst. TV, Eng. Japan* 24, 2, 98—108.
- [16] Taki, Y. and Hatori, M. (1966). P. C. M. Communication system using Hadamard transformation. *Electron. Comm. Japan* 49, 11, 247—267.
- [17] Wintz, P. A. (1972). Transform picture coding. *Proc. I. E. E. E.* 60, 7, 809.
- [18] Gibbs, J. E. (1969). Walsh functions as solutions of a logical differential equation. National Physical Laboratory, Teddington, England, DES Report, No. 1.
- [19] Gibbs, J. E. (1970). Sine waves and walsh waves in physics. 1970 Proceedings: Application of Walsh functions, Washington D. C. AD 707431.
- [20] Liedl, P. (1970). Harmonische Analysis bei Aussagenkalkuelen. *Math. Logik* 13, 158—167.
- [21] Butzer, P. L. and Wagner, H. J. (1972), Walsh-Fourier series and the concept of a derivative. "Applicable Analysis", Vol. I, pp. 29—46. Gordon and Breach, London.
- [22] Pearl, J. (1971). Applications of the walsh transform to statistical analysis Proceedings: 4th Hawaii Int. Conf. on System Science, 406—407.
- [23] Pichler, F. (1970). Some aspects of a theory of correlation with respect to Walsh harmonic analysis, Maryland University. U.S. A. Report No. AD 714, 596.
- [24] Wiener, N. (1949). The Extrapolation, Interpolation and Smoothing of Stationary Data. M. I. T. Press, Cambridge and New York.

K. G. 比彻姆

1975 年 2 月

目 录

前言.....	i
第一章 正交函数.....	1
1-1 导言	1
1-2 正弦-余弦函数	3
1-3 不完备函数	5
1-4 沃尔什函数	7
1-5 哈尔函数	9
1-6 其它正交函数	11
参考文献	12
第二章 沃尔什级数.....	13
2-1 沃尔什级数的定义	13
2-2 函数的定序方法	19
2-3 沃尔什函数的导出	22
2-4 函数发生器的硬件	30
2-5 WAL 级数与 PAL 级数的关系	35
2-6 利用沃尔什级数和傅里叶级数的波形综合	38
2-7 数字抽样	42
2-8 模二和运算	44
参考文献	44
第三章 沃尔什变换.....	47
3-1 沃尔什变换的定义	47
3-2 离散沃尔什变换与离散傅里叶变换的比较	48
3-3 圆时间位移的效果	49
3-4 变换乘积的特性	53
3-5 正弦波的沃尔什变换	54

3-6 离散沃尔什变换与离散傅里叶变换之间的转换	55
3-7 沃尔什变换特性总结	60
3-8 快速沃尔什变换	61
3-9 R 变换	66
3-10 广义变换	69
3-11 变换程序	72
3-12 二维变换	73
3-13 硬件变换	74
参考文献	81
第四章 哈尔函数	84
4-1 引言	84
4-2 哈尔函数的定义	84
4-3 沃尔什函数与哈尔函数的关系	89
4-4 离散哈尔变换	90
4-5 快速哈尔变换	91
4-6 二维哈尔变换	94
4-7 哈尔功率谱	96
参考文献	97
第五章 波谱分析	99
5-1 沃尔什波谱分析	99
5-2 相关与卷积	107
5-3 威纳-欣钦理论的应用	110
5-4 从自相关函数导出序谱	111
5-5 周期谱分析	113
5-6 沃尔什谱与傅里叶谱的比较	114
5-7 奇次谐波的序谱	119
5-8 短期序谱分析	125
参考文献	129
第六章 序率滤波	132
6-1 序率滤波	132

6-2 模拟序率滤波器	133
6-3 广义威纳滤波	135
6-4 以序率为基础的矢量滤波	137
6-5 以频率为基础的纯量滤波	142
6-6 非平稳信号的滤波	144
6-7 二维滤波	152
参考文献	155
第七章 通信中的应用	158
7-1 概述	158
7-2 通信方面的应用	158
7-3 多路复用	159
7-4 编码系统	166
7-5 图象传输	167
7-6 电磁辐射	175
7-7 雷达系统	178
参考文献	183
第八章 信号处理中的应用	187
8-1 信号处理方面的应用	187
8-2 波谱学	188
8-3 模式识别与图象处理	192
8-4 声波成象滤波	199
8-5 语言处理	202
8-6 医疗信号处理	204
8-7 非线性的应用	208
参考文献	212
附录 I	216
1. 信号处理的计算机程序	216
2. 程序概述	216
3. 快速沃尔什变换程序 FWT 和 FFWT	216
4. 快速沃尔什变换程序 FHT 和 FRT	219

5.快速哈尔变换程序 HAAR, HAARIN 和 HNORM	221
6.沃尔什功率密度谱计算程序 PSDW.....	223
参考文献	230
附录 II 模二和 $R \oplus S$ 表 ($R_{\max} = S_{\max} = 125$)	231
译后记.....	262

第一章 正交函数

1-1 导 言

将一系列容易产生并已确定的简单函数相叠加来表示一时间函数是一很有用的方法,且已有许多用途.例如,在通信中,经常用这种方法来表示各种波形,又如,从一组函数值便可估计出所设计的设备性能,做出一般性的评断.

只有利用正交函数才容易将一个时间函数完全综合到所要求的准确程度.此外,正交函数具有这样的特性;对一个给定时间函数作很简单的数学运算就能够判定在这时间函数之中所包含的这正交函数的某一特定分量.

设有一信号,其时间函数为 $f(t)$, 只在时间区间 $(0, T)$ 内存在. 利用正交级数 $S_n(t)$ 可将这个函数表示如下:

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n S_n(t) \quad (1.1)$$

式中 C_n 表示各分量的数值.

如果 $S_n(t)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) 在区间 $0 \leq t \leq T$ 内满足

$$\int_0^T K \cdot S_n(t) S_m(t) dt = \begin{cases} K, & \text{当 } n = m \\ 0, & \text{当 } n \neq m \end{cases} \quad (1.2)$$

则 $S_n(t)$ 就称为“正交”,加权重为 K . n 和 m 是任意整数, K 是非负常数(或已知函数),且与 m 和 n 无关. 如果 K 等于 1, 则集合是归一化的就称之为归一化正交函数集. 任一组未归一化的正交函数总可变换为归一化的正交函数.

因为在实际中根据式(1.1)作级数展开时,仅取有限个项

而不是无限个项，所以系数 C_n 的选择必须满足最小均方逼近误差：

$$\text{M. S. E.} = \int_0^T \left[f(t) - \sum_{n=0}^{N-1} C_n S_n(t) \right]^2 dt \quad (1.3)$$

这样就得到

$$C_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) S_n(t) dt \quad (1.4)$$

当 N 变得很大时，希望误差能单调地减少到零。象正弦-余弦级数或沃尔什级数这样的完备正交函数都能满足上述条件。

一组完备的归一化正交函数也必然是一组闭合的函数。所谓闭合函数就是指：不再存在有任何满足如下条件的平方可积函数 $f(t)$ ：

$$0 < \int_b^a f^2(t) dt < \infty \quad (1.5)$$

同时满足下面等式

$$\int_b^a f(t) S_n(t) dt = 0 \quad (1.6)$$

式中 n 可取任意数值。这个关系称为里斯-艾希尔 (Riesz-Fischer) 定理 (1907)。

一般来讲，一组函数不管它是否正交和归一化，只要不存在与该组函数中任一分量成正交的任何其它函数，那么该组函数就称为完备函数或闭合函数。但满足平方积分等于零的函数应该除外^[1]。完备性的必要和充分条件是：在正交区间，各分量函数的平方之和是存在的，并且应该完全满足帕塞瓦尔 (Parseval) 方程。

用不完备的正交函数将一时间函数展为级数是不收敛的，因而不能用它准确地表示出一给定时间函数。但它还是有一些其它同等重要的特性。例如，低通滤波器的输出就可以表示为 $\sin x/x$ 的不完备的正交级数。另一个不完备级数

的例子就是拉德梅克 (Rademacher) 级数。这是一组简单的方波函数, 后面我们将见到, 在产生其它函数级数时, 它将起重要的作用。

利用正交时间级数表示法, 一个信号可以用一组有限个系数或者说一组谱值来表示。在不影响准确程度的情况下, 为表示一个时间函数所需要的系数数目可以大大地减少。如后所述, 利用一组数据的正交特性也可以判别出一些特别有用的分量。

总括起来, 任何可积的且是平方可积的函数均可利用它们的线性组合形成一组正规的正交函数。并应指出, 这里所说的线性组合是可以用有限个函数分量组成的。圆函数 (也就是三角函数) 正是这种函数的一个所熟知的例子。在下节里我们来讨论它们的正交性。

1-2 正弦-余弦函数

现来讨论正弦-余弦函数, 它的前八个分量如图 1.1 所示。这组函数的正交性不难从如下的推论得到证明。在有限的时间区间 $0 \leq t \leq T$ 内, 取这组函数中任何一对函数的乘积。设

$$\left. \begin{aligned} S_n(t) &= \sqrt{2} \cos 2\pi n t \text{ 或 } \sqrt{2} \sin 2\pi n t \\ S_m(t) &= \sqrt{2} \cos 2\pi m t \text{ 或 } \sqrt{2} \sin 2\pi m t \end{aligned} \right\} \quad (1.7)$$

从式 (1.2),

$$\begin{aligned} & \int 2 \cos 2\pi m t \cos 2\pi n t \, dt \\ &= \int [\cos(m+n)2\pi t + \cos(m-n)2\pi t] \, dt \\ &= 0, \quad \text{当 } m \neq n \end{aligned} \quad (1.8)$$

式中 m 和 n 是两个整数。因为一余弦波在其周期整倍数的区间内的平均值等于零, 所以当 $m \neq n$ 时, 式(1.8)等于零。

同样,

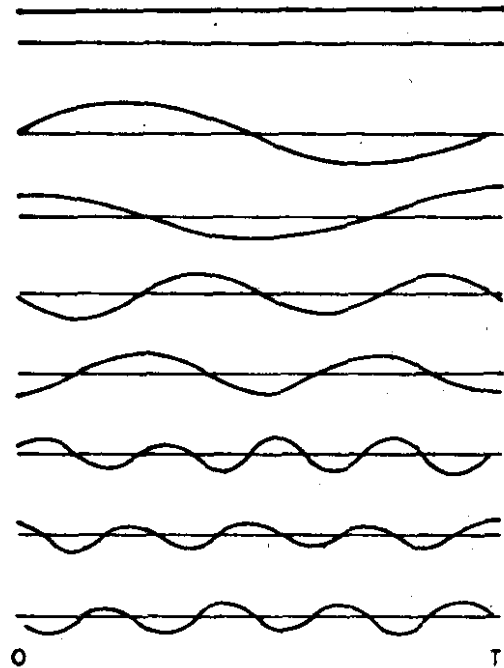


图 1-1 一组正弦-余弦函数

$$\left. \begin{aligned} &\int 2 \sin 2\pi m t \sin 2\pi n t \, dt \\ &\int 2 \sin 2\pi m t \cos 2\pi n t \, dt \\ &\int 2 \cos 2\pi m t \sin 2\pi n t \, dt \end{aligned} \right\} = 0, \quad m \neq n \quad (1.9)$$

但是, 当 $m = n$ 时, 在区间 $(0, T)$ 内,

$$\int 2 \sin^2 2\pi n t \, dt = \int 2 \cos^2 2\pi n t \, dt = 1$$

因为任一时间级数都可表示为正弦分量之和 (傅里叶级数), 即

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \{a_k \cos(k\omega_0 t) + b_k \sin(k\omega_0 t)\} \quad (1.10)$$