JIE GOU SHU XUE CONGSHU

结构数学丛书

笛卡尔张量

郑百哲　牛一铮　编著

中国建筑工业出版社

结构数学丛书

笛卡尔张量

郑百哲
牛一锋 编著

中国建筑工业出版社

张量是一种数学运算中使用的简便记号和敏锐的思维工具。它能使复杂的数学公式变得简明、清晰，物理概念明确，并能使表达的问题标准化、程序化和使用电子计算机运算。

本书只介绍基本的张量代数运算、张量分析的基本内容和基本概念。为便于一般大学生阅读，书中只采用笛卡尔坐标和笛卡尔张量。全书共五章：矢量，笛卡尔张量，应力张量和应变张量，弹性力学基本方程及其张量表示，平面问题和板。

本书可供工程技术专业人员及工科大学生学习参考。

结构数学丛书
笛卡尔张量
郑百哲
牛一铮 编著
*
中国建筑工业出版社出版、发行（北京西郊百万庄）
新华书店经销
中国建筑工业出版社印刷厂印刷（北京阜外南礼士路）
*
开本：850×1168毫米 1/32 印张：$5^{3}/_{8}$ 字数：143 千字
1991年8月第一版 1991年8月第一次印刷
印数：1— 2,070 册 定价：4.50元
ISBN7—112—00897—2/TU·637
（5965）

出 版 说 明

工程理论的发展与数学理论有着密切的关系，为使结构工程技术人员掌握有关的数学理论，便于采用新的结构设计计算方法和进行结构理论研究，我社组织出版这套结构数学丛书。丛书的对象是已学过大学工程专业中数学、结构力学以及工程结构设计等课程的高年级大学生和在职工程技术人员。

本丛书介绍一系列有关土建结构设计计算新方法的数学理论和方法。每一种书中集中介绍一门数学的学科或一个专题；着重于使读者能充分掌握和学会运用各种数学的基本方法，而不过分强调数学理论推导的阐述。书中以数学基本理论和概念为主线，以结构设计的应用为横线，尽量多举土建结构计算中有代表性的实例进行阐述。内容除包括基本方法的介绍外，也旁及国内外该门数学在工程结构中的应用情况，使读者对其有一概括的了解。叙述力求简明扼要，重点突出，有介绍，有分析，有评价，易为读者接受。

本丛书已拟订的选题计有：变分学、模糊数学、数学规划方法，可靠性数学、数值计算方法、福氏变换与谱分析、统计数学、笛卡尔张量等。今后有条件时将陆续拟订新选题组织出版。

本丛书在组织过程中得到胡海昌教授、钟万勰教授、李继华教授、王光远教授的大力支持，王光远教授还直接参加拟订选题和组稿工作，我们在此表示感谢。

前　　言

本书是作者近年来为清华大学固体力学专业、北京轻工业学院振动噪声专业、北京建筑工程学院的研究生，以及中国地质科学院地质、物探和矿床研究所的工程师等，讲授张量及其在力学中的应用的讲稿基础上写成的。目的是向我国土木建筑界具有高等数学基础的广大科学工作者和技术人员简要地介绍目前广泛采用的张量这一数学工具，并以弹性力学和板为例，介绍它的一些应用。

在张量中，就弹性力学而论，主要是使用笛卡尔张量。张量工具的应用，使繁琐冗长的数学公式变得简明、清晰，物理概念明确，从而便于认识复杂问题的力学实质，特别是便于导致力学问题的标准化、程序化和进行电子计算机的运算。

尽管更高深的数学能更简练而精确地阐明一些理论，但作者考虑到国内建筑工程界的现状，仍试图使所需数学基础仅限于大学数学专业二年级或重视数学的工科本科毕业者通常熟悉的内容，通篇采用笛卡尔坐标和笛卡尔张量。

本书只介绍基本的张量代数运算、张量分析的基本内容和基本概念。在弹性力学的应用方面，主要介绍基本关系和重要定理的张量表示法，以此作为进一步研究张量分析及其应用的基础。

近代在许多连续介质力学书和科技文献中使用张量的程度，只不过是在写方程时把笛卡尔张量指标符号用作一种简便的记号，这样使用自然无害。实际上，如建筑工业中广泛采用的薄壳等，仅用笛卡尔张量是不行的。一般的正交曲线坐标张量和非笛

卡尔张量，是一种锐敏得多的思想工具。为此，作为一个附录，本书将作者译自W.Flügge的《张量分析与连续介质力学》（1980年由中国建筑工业出版社出版）中部分习题的题解附在书末，供有兴趣的读者参考。

参加本书编写的有白坚、郑百哲和牛一铮。由于作者水平所限，错谬之处难免，望批评指教。

郑百哲

目　　录

第一章　矢　　量

§ 1-1　矢量的表示法

物理中的位移、速度、力都是矢量。矢量最直观的表示法就是利用三维空间中的有向线段 $\boldsymbol{v}$(图1-1)叫做矢量的图示法。有向线段的长 v 代表矢量的大小。这种方法不依赖于坐标系的选择。

〔习惯上往往将不同的物理矢量表示在一张图上，但是有些不同的矢量，事实上是属于不同的矢量空间（如 $\boldsymbol{v}$与$\boldsymbol{f}$）。〕

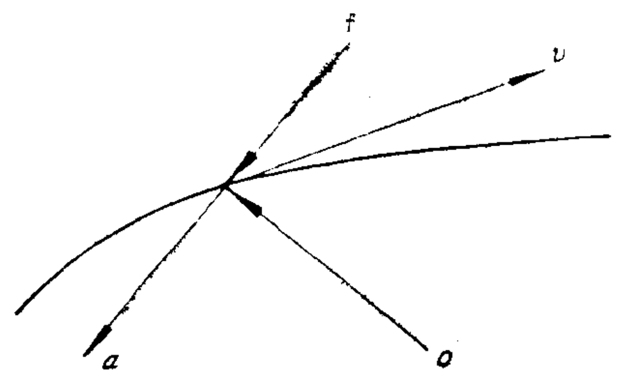

图 1-1　矢量$\boldsymbol{r}$、$\boldsymbol{v}$、$\boldsymbol{f}$、$\boldsymbol{a}$的图示

矢量的分量表示法是另一种表示方法，是先选定一个坐标系，比如通常的正交直线坐标系，即卡氏坐标系，然后确定矢量对于这个坐标系的分量：

$$\boldsymbol{v} \sim (v_x,\ v_y,\ v_z) \tag{1-1a}$$

这一有序数也可视作一个单行矩阵。

矢量也可以用基矢与其对应分量写成

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{i}v_x + \boldsymbol{j}v_y + \boldsymbol{k}v_z \tag{1-1b}$$

其中$\boldsymbol{i}v_x$、$\boldsymbol{j}v_y$、$\boldsymbol{k}v_z$称为分矢量。而

$$\boldsymbol{i}(1,0,0),\boldsymbol{j}(0,1,0),\boldsymbol{k}(0,0,1), \tag{1-1c}$$

是单位矢量，它们组成卡氏系中的一组基矢（称为标架）。

§ 1-2 指 标 符 号

上面所述用分量（v_x, v_y, v_z）或用基矢量$\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$来表示矢量的方法，在推广到比三维更高的空间时就有困难了。因此，发展了另一种记法。把x记为x_1，同时y记为x_2，y记为x_3。这样，一个N维空间的矢量（图示当然画不出来了）用分量表示时为：

$$\boldsymbol{v}=(v_1,\ v_2,\ v_3\cdots\cdots v_n) \tag{1-2a}$$

它可视为一个N维的单行矩阵，且可写为

$$\boldsymbol{v}=\{v_i\} \qquad (i=1,\ 2,\ \cdots\cdots n)$$

同理，基矢$\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$可分别写为$\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{e}_3$。N维空间的基矢，可写为$\boldsymbol{e}_i$（$i=1,\ 2,\ \cdots\cdots n$）。而与（1-1b）式对应的写法为

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{e}_1v_1+\boldsymbol{e}_2v_2+\cdots\cdots+\boldsymbol{e}_nv_n \tag{1-2b}$$

相应的分矢量为$\boldsymbol{e}_1v_1$，$\cdots\cdots\boldsymbol{e}_iv_i$，$\cdots\cdots$其中

$$\boldsymbol{e}_i=(0,\ 0,\ \cdots,\ \underset{\substack{\uparrow\\ \text{顺序第 } i \text{ 个}}}{1},\ 0,\ \cdots) \tag{1-2c}$$

这里i，叫做v的下标。在别的书上，也有记作v^i的，这时i叫做上标。

有些量比矢量更复杂，只用一个下（或上）指标还不够，还要采用更多的指标，比如A_{ij}，B_{ij}，C_{ijkl}，$\cdots\cdots$等等。后面讨论的张量，就是这种形式的一种量。

§ 1-3 矢 量 代 数

矢量代数，包括矢量与实数的乘法运算以及矢量的加，减，乘法运算。

1 矢量的加法

矢量的加（减）法运算在图形表示法中，可以采用三角形法

（图1-2a）或平行四边形法（图1-2b）。

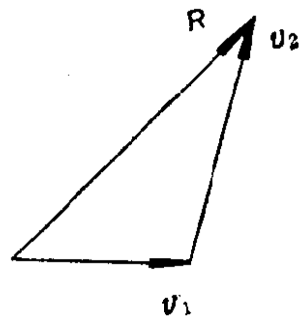

图 1-2a　三角形求和法

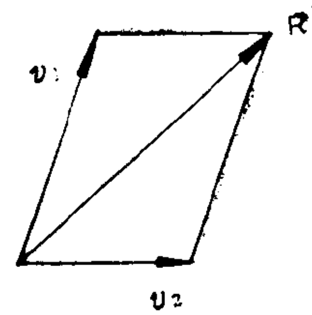

图 1-2b　平行四边形求和法

在分量表示法中，则有

$$\boldsymbol{v}\pm\boldsymbol{w}=(v_x\pm w_x,\ v_y\pm w_y,\ v_z\pm w_z) \tag{1-3}$$

或者用指标记法，有

$$\boldsymbol{v}\pm\boldsymbol{w}=(v_1\pm w_1,\ v_2\pm w_2,\ v_3\pm w_3) \tag{1-4}$$

用基矢表示为

$$\boldsymbol{v}\pm\boldsymbol{w}=\boldsymbol{e}_1(v_1\pm w_1)+\boldsymbol{e}_2(v_2\pm w_2)+\boldsymbol{e}_3(v_3\pm w_3) \tag{1-5}$$

根据以上所述几种表示方法容易看见，矢量的加法满足交换律，即

$$\boldsymbol{v}\pm\boldsymbol{w}=\boldsymbol{w}\pm\boldsymbol{v} \tag{1-6}$$

因为实数是满足加法交换律的，这一规律也成为判断一个有方向的量是否矢量的一个必要条件。譬如，有限转动（而不是无限小转动）虽是有方向的，但它就不遵从交换律，因此，它不是矢量。

2　矢量的标积和叉积，δ_{ij}和ε_{ijk}符号、并矢

矢量代数中的积可以有几种定义。总之，是从两已知矢量去定义第三个量。下定义时当然最好同已知的物理规律相联系。

（1）标积和Kronecker符号δ_{ij}

首先是标积，从物理学知道，一个力矢量$\boldsymbol{f}$与一个位移矢量$\mathbf{s}$，可以确定一个标量，即功W：

$$W=|\boldsymbol{f}|\ |\mathbf{s}|\cos\theta \tag{1-7}$$

记作$\boldsymbol{f}\cdot\mathbf{s}$，所以又称点积。用指标符号，则

$$W=f_1s_1+f_2s_2+f_3s_3=\sum_{i=1}^{3}f_is_i \tag{1-8}$$

最后一个等式在$\sum$符号下f_is_i有两个同样的指标i。由于这种形式的求和运算经常遇到，所以大家约定符号$\sum\limits_{i=1}^{3}$可以不写出，今后，凡在一项中有一对相同的指标，就认为是对这一指标按全变程求和❶。求和所得的结果，当然不再含有这一指标。如这里（1-8）求和得出的功W就是一个标量，它不再含有表示分量的指标i。另外，又因为求和结果既然不包括所求和的指标，那么这一指标在运算中间写成什么别的指标也不会影响结果。即

$$W=f_is_i=f_js_j=f_ks_k \tag{1-9}$$

这一记法可以推广到N维空间，即a_ib_i代表$\sum\limits_{i=1}^{N}a_ib_i$，也可以推广到用指标符号表示的其它物理量，如

$$T_{ij}=\beta_{il}\beta_{jm}T_{lm}=\beta_{i\alpha}\beta_{j\beta}T_{\alpha\beta} \tag{1-10}$$

只要注意将一对求和指标同时替换，如（1.9）式将一对i换成j，（1-10）式中将一对l换成α，一对m换成β，它们的含意都是相同的，即

$$\begin{aligned}T_{ij}&=\beta_{i1}\beta_{j1}T_{11}+\beta_{i1}\beta_{j2}T_{12}+\beta_{i1}\beta_{j3}T_{13}+\cdots\\&=\sum_{l=1}^{N}\sum_{m=1}^{N}\beta_{il}\beta_{jm}T_{lm}\end{aligned}$$

如上所述，一对相同指标要求和，求和结果与这对指标无关，这样的指标叫哑指标，如（1-9）式中的i或j，k，又如（1-10）式中的l，m或α，β。（1-10）式中还有两个指标i，j不求和，叫做自由指标。

与（1-9）式对应，当分别用基矢表示$\boldsymbol{f}$、$\boldsymbol{s}$时，它们的点积可写为

$$\begin{aligned}W&=(f_1\boldsymbol{e}_1+f_2\boldsymbol{e}_2+f_3\boldsymbol{e}_3)\cdot(s_1\boldsymbol{e}_1+s_2\boldsymbol{e}_2+s_3\boldsymbol{e}_3)\\&=f_1s_1\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_1+f_1s_2\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2+f_1s_3\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_3+\cdots\cdots\end{aligned}$$

---

❶ 这一约定叫做爱因斯坦求和约定。但这一约定，只针对成对的一对指标。如果在一个符号中某一指标出现了两次以上，如a_ib_{iii}，即不再对i求和。

$$= \sum_{i,j} f_i s_j \boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j$$

$$= f_i s_j \boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j \tag{1-11}$$

令 $$\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j = \delta_{ij}$$

则由于$\boldsymbol{e}_1$、$\boldsymbol{e}_2$、$\boldsymbol{e}_3$是相互垂直的单位矢量，由点积的定义，知

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & （当 i \neq j 时） \\ 1 & （当 i = j 时） \end{cases} \tag{1-12}$$

而有

$$W = f_i s_j \delta_{ij} = f_i s_i = f_1 s_1 + f_2 s_2 + f_3 s_3$$

δ_{ij}称为Kronecker符号。对于N维向量可将$i\,j$的变程扩大为i，$j = 1$，$2\cdots\cdots n$，于是N维空间的点积为：

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = u_i v_j \delta_{ij} = u_i v_i \tag{1-13}$$

符号δ_{ij}今后用得较多，例如（1-2）式单位矢量$\boldsymbol{i}$为（1，0，0），$\boldsymbol{j}$为（0，1，0），……就可以将其分量分别写成δ_{1j}，δ_{2j}……推广到N维，而写成

$$\boldsymbol{e}_i = (\delta_{ij}), \quad (j = 1, 2, \cdots\cdots n) \tag{1-14}$$

显然

$$\delta_{ij} = \delta_{ji}$$

（2）叉积和置换符号ε_{ijk}

矢量第二种积也与实际有联系。用两个矢量作为邻边，可以构成一个平行四边形，这个平行四边形有面积，而且还可规定一个法线正方向。可以定义矢量的积就等于这样规定的平行四边形。记为$\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}$，并定义为

$$|\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}| = |\boldsymbol{v}||\boldsymbol{w}| \sin\theta \tag{1-15a}$$

以及$\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}$矢量的方向为此平行四边形用右手螺旋定则所确定的正法线方向。这样定义的积是矢量，故叫矢积，也叫叉积。

与（1-11）式的定义点积的方式对比，当用基矢表示$\boldsymbol{v}$及$\boldsymbol{w}$时的叉积可写为

$$\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w} = (v_1 \boldsymbol{e}_1 + v_2 \boldsymbol{e}_2 + v_3 \boldsymbol{e}_3) \times (w_1 \boldsymbol{e}_1 + w_2 \boldsymbol{e}_2 + w_3 \boldsymbol{e}_3)$$

$$= v_1 w_1 \boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_1 + v w_2 \boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2 + v_1 w_3 \boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_3$$

$$+v_2w_1e_2\times e_1+v_2w_2e_2\times e_2+v_2w_3e_2\times e_3+\cdots\cdots \tag{1-15b}$$

由于e_1、e_2、e_3是互相垂直的单位矢量，由（1-15$a.b$）可知

$$\left.\begin{array}{lll} e_1\times e_1=0, & e_2\times e_2=0, & e_3\times e_3=0 \\ e_1\times e_2=e_3 & e_2\times e_3=e_1p & e_3\times e_1=e_2 \\ e_2\times e_1=-e_3 & e_3\times e_2=-e_1, & e_1\times e_3=-e_2 \end{array}\right\} \tag{1-15c}$$

引入符号ε_{ijk}，则上面九个式子（1.15c）可用一个式子概 括：

$$e_i\times e_j=\varepsilon_{ijk}e_k \qquad (i,\ j,\ k=1,\ 2,\ 3) \tag{1-16}$$

此式的理解是，等式右边有一对相同指标k，表示 要 对k求 和，ε_{ijk}的值规定为：

$$\varepsilon_{ijk}=\begin{cases} 1，当i，j，k按\ \begin{matrix} & 1 & \\ \nearrow & & \searrow \\ 3 & \nwarrow & 2 \end{matrix}\ 顺钟向轮换时。\\ -1，当i，j，k按\ \begin{matrix} & 1 & \\ \swarrow & & \nwarrow \\ 3 & \searrow & 2 \end{matrix}\ 逆钟向轮换时。\\ 0，当i，j，k有两个指标(甚至三个指标)\\ 相同时。\end{cases}$$

ε_{ijk}称为置换符号，利用符号ε_{ijk}，于是：

$$u\times v=u_iv_j\varepsilon_{ijk}e_k \tag{1-17}$$

（3）ε_{ijk}与δ_{ij}的关系

由于符号ε_{ijk}与符号δ_{ij}使用得较多，这里再顺便提一下它们的关系。由定义

$$e_i\times e_j=\varepsilon_{ijk}e_k \qquad (i,\ j,\ k=1,\ 2,\ 3)$$

左右两边点乘e_k，得

$$(e_i\times e_j)\cdot e_k=\varepsilon_{ijk} \tag{1-18}$$

左边就是矢量的混合积。它的物理意义是以e_i、e_j、e_k为三个棱而形成的正立方体的体积。

我们知道，以$a=(a_1、a_2、a_3)$、$b=(b_1、b_2、b_3)$，$c=(c_1、c_2、c_3)$为棱的平行六面体的体积V（注意矢量的次序）可以用行列式：

$$
V=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \tag{1-19}
$$

给出。因此，考虑到（1-14）式$e_i=(\delta_{i1},\ \delta_{i2},\ \delta_{i3})$……可得

$$
(e_i\times e_j)\cdot e_k=\begin{vmatrix} \delta_{i1} & \delta_{i2} & \delta_{i3} \\ \delta_{j1} & \delta_{j2} & \delta_{j3} \\ \delta_{k1} & \delta_{k2} & \delta_{k3} \end{vmatrix}=\varepsilon_{ijk} \tag{1-20}
$$

以上是两种定义矢量的方法（点积和叉积）。

（4）并矢

矢量积还可以有别的定义方法，比如v和w直接放在一起成vw以及wv。这可以叫作直接乘积或并矢，因为它们是将两个矢量并排放在一起的。但是这样定义的乘积有何意义？有何性质？就须另外探讨了（见第二章）。

总之，上面按不同的定义矢量的积得出三种不同的结果，有标量，矢量以及并矢。

§1-4 坐 标 变 换

1　三维空间坐标变换

考虑三维空间的两个正交直线坐标系（笛卡尔坐标系），并设原坐标系为$ox_1x_2x_3$，其基矢（标架）为e_1、e_2、e_3。又设变换后的新坐标系为$Ox_1'x_2'x_3'$，其基矢(标架)为e_1'、e_2'、e_3'。

设一矢量v，用旧坐标和新坐标系表示分别为

$$
v=e_iv_i=e_{j'}v_{j'} \tag{1-21}
$$

由此可得：将矢量分量由旧坐标变换为新坐标的变换式。为此，用$e_{j'}$点乘（1.21）式，得

$$
v_{j'}=e_{j'}\cdot e_iv_i
$$

记为

$$
v_{j'}=\beta_{j'i}v_i \tag{1-22}
$$

式中

$$
\beta_{j'i}=e_{j'}\cdot e_i=|e_{j'}|\ |e_i|\cos\theta=\cos(j',\ i) \tag{1-23}
$$

为新坐标轴j'对旧坐标轴i的方向余弦。利用β记号还可以写出

新旧坐标的关系。比如矢径$\boldsymbol{r}$，在新、旧坐标系上表为$x_{i'}\boldsymbol{e}_{i'}=x_j\boldsymbol{e}_j$，左右两边点乘$\boldsymbol{e}_{k'}$后，得

$$x_{i'}\delta_{i'k'}=\boldsymbol{e}_{k'}\cdot\boldsymbol{e}_j x_j$$

再利用$x_{i'}\delta_{i'k'}=x_{k'}$，$\boldsymbol{e}_{k'}\boldsymbol{e}_j=\beta_{k'j}$有

$$x_{k'}=\beta_{k'j}x_j \tag{1-24}$$

反之，欲求将矢量分量从新坐标变换为旧坐标的变换式，可用$\boldsymbol{e}_i$点乘（1-21)式，得

$$v_i=\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_{j'}v_{j'}=\beta_{ij'}v_{j'} \tag{1-25a}$$

式中

$$\beta_{ij'}=\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_{j'} \tag{1-25b}$$

而用新坐标表示旧坐标的关系式与（1-24）对应有：

$$x_i=\beta_{ij'}x_{j'} \tag{1-26}$$

不难看出对于基矢也有

$$\boldsymbol{e}_{j'}=\boldsymbol{e}_{j'}\cdot\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_i=\beta_{j'i}\boldsymbol{e}_i \tag{1-27a}$$

及

$$\boldsymbol{e}_i=\beta_{ij'}\boldsymbol{e}_{j'} \tag{1-27b}$$

应当注意的是，此两式虽然形式上与（1-22）、（1-25）相同，但这里（1-27）表示的是基矢$\boldsymbol{e}_i$变换成$\boldsymbol{e}_{j'}$，基矢旋转一个角度。而（1-22）、（1-25）两式所表示的，是矢量本身没动，只是由于坐标系变化而改变了分量的值。

由β符号定义，显然

$$\beta_{j'i}=\beta_{ij'} \tag{1-28}$$

综合(1-22)及（1-25a）两式，还有

$$v_{j'}=\beta_{j'i}\beta_{ik'}v_{k'}$$

由此易得

$$\beta_{j'i}\cdot\beta_{ik'}=\delta_{j'k'} \tag{1-29a}$$

同理，有

$$\beta_{ij'}\beta_{j'k}=\delta_{ik} \tag{1-29b}$$

概括式（1-22）与(1-25a)，可知矢量在坐标变换前与变换后(或其逆），只差一个β符号的因子，这是矢量的一个性质。反过来也可以说，如果一个具有单一指标的量a_i，在坐标系变换前与坐标系变换后的分量（a_i与$a_{j'}$）之间，由（1-22）或（1-25a）式