解析不等式

D. S. 密特利诺维奇 著

科 学 出 版 社

解析不等式

D. S. 密特利诺维奇 著

张小萍 王 龙 译

科学出版社

1987

内 容 简 介

本书系统地论述了不等式的理论，内容包括三个部分：第一部分叙述凸函数的性质和推广；第二部分介绍一般不等式，包括 Cauchy 不等式、Hölder 不等式、Minkowski 不等式、Чебышев 不等式等经典材料；第三部分是本书的重点，它收集了 450 个重要的特殊不等式，这些不等式在数学的各种研究中被广泛应用.

本书可供数学工作者、高等学校有关专业师生以及工程技术人员参考.

D. S. Mitrinović

ANALYTIC INEQUALITIES

Springer-Verlag, 1970

解 析 不 等 式

D. S. 密特利诺维奇 著

张小萍 王 龙 译

责任编辑 刘嘉善 林 鹏

科 学 出 版 社 出 版

北京朝阳门内大街 137 号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1987 年 2 月第 一 版 开本：787×1092 1/32

1987 年 2 月第一次印刷 印张：17 1/4

印数：0001—3,850 字数：392,000

统一书号：13031 · 3394

本社书号：4924 · 13—1

定价： 4.00 元

序　　言

不等式理论是从 C. F. Gauss, A. L. Cauchy 和 П. Л. Чебышев（只举几位最重要的）奠定近似方法的理论基础时开始发展起来的．大约在十九世纪末和二十世纪初，许多不等式被证明了，其中一些成为经典不等式，而大多数则仍然是孤立的、无联系的结果．

1934 年出版的 G. H. Hardy, J. E. Littlewood 和 G. Pólya 的经典著作《不等式》(Inequalities)[1]，把不等式领域从孤立公式的汇集改造成为系统的学科，这几乎是世所公认的．不等式的现代理论以及对这一领域的正在不断增长着的兴趣，无疑都起源于这部著作．该书 1952 年的第二版，除了在书末增加三个附录（共 10 页）以外，未作改动．

今天，不等式在数学的所有领域里都起着重要的作用，并且提供了一个非常活跃而又有吸引力的研究领域．

J. Dieudonné 在他的《无穷小分析》(Calcul Infinitésimal, Paris, 1968)一书中赋予不等式以特别的重要性，它采用了以"较大的，较小的，接近的"等术语为特色的叙述方法．

1934 年以来发表了许多论述不等式的论文，在其中一些论文中，揭示了新的不等式，在另一些论文中，对经典不等式作了改进或推广，各种各样的不等式由于找到了它们的共同来源被联系起来了，而其他一些论文则给出不等式大量的、多方面的应用．

---

1) 1952 年第二版中译本：G. H. 哈代、J. E. 李特伍德、G. 波利亚，不等式，科学出版社，1965．——译者注

1961 年出版，1965 年经过修订第二次印刷的 E. F. Beckenbach 和 R. Bellman 著《不等式》(Inequalities) 一书，包含了 1934—1960 年期间得到的关于不等式的某些结果.

本书——《解析不等式》(Analytic Inequalities)——所论述的大部分课题都不包含在上述两本书内，甚至在陈述经典不等式时也补充了新的事实.

我们努力做到尽可能的准确，并给出了可能提供的一切有关参考文献. 对大量的不等式系统地作了文献方面的考查，我们相信本书所包含的结果是最新颖的.

在撰写本书时，我们查阅了非常广泛的文献，只要提一下本书列举了 750 个以上的人名(其中有的还不止一次地列举)就足以说明这一点. 通常，我们研究了原始文章，只有个别例外是根据发表在"Jahrbuch über die Forts chritte der Mathematik(数学进展年鉴)"(1868—1944)，"Zentralblatt für Mathematik (数学通报)" (从 1931 年起)，"Mathematical Reviews (数学评论)"(从 1940 年起)和"Referativnyĭ Žurnal Mathematika"(从 1953 年起)上的评论. 尽管如此，还是不可能仔细研究每一个有关的原始材料，并且由于各种原因，某些遗漏是不可避免的. 由于疏忽，可能对某些学者的著作没有给予应有的评价，对此，我们要事先向他们表示歉意. 此外，从我们对大量资料的选择中，可看出我们对那些简单而有吸引力的结果的偏爱.

本书所含的大部分结果都已被验证过，当然不可能对本书中出现的全部结果都这样做. 然而我们希望不至于有很多错误，但是本书的性质本身使我们不能指望完全避免差错. 也许没有必要指出在使用一个不等式之前先去验证一下的好处. 但是，只要有可能的话，查阅原始文章总是值得的，因为读者往往可以从中找到最早引起探索有关不等式的那个问

题.

虽然我们只在不多的几处强调存在尚未解决的问题，但从正文本身也可以看出，有很多结果能够在各方面加以改进或推广.

事实上，这部书是作者 1965 年用塞尔维亚语出版的《不等式》(Nejednakosti) 一书的有重大扩展和改进的译本. 虽然《解析不等式》一书是根据前一著作的思想和轮廓，但它是在更高的水平之上，并且很少包含相同的材料. 由于许多数学家把他们未发表的结果慷慨地提供给我们，因此本书还包含了很多第一次发表的不等式.

本书的材料分为三部分. 第一部分——“引论”——给出处理不等式的方法，而主要的注意力则放在凸函数一节.

第二部分也许是主要部分——“一般不等式”——由 27 节组成，其中每一节着重叙述一类分析上重要的不等式. 有些节，例如 §2.11，§2.14，§2.16，§2.23，§2.25，是特别用心思的，我们相信它们对于进一步研究将是有益的.

最后，第三部分——“特殊不等式”——目的在于给出各式各样不等式的汇集，这些不等式程度不同地有着密切的内在联系，其中一些有相当大的理论价值. 它们按照一定的方式分类，虽然我们必须承认这样分类不一定是很好的. 事实上，第三部分是 450 多个特殊不等式的汇集，除有几个例外，我们对每个不等式都附上参考文献目录. 因篇幅有限，只对少数不等式给出完整的证明.

从《解析不等式》这个书名可以推断，本书不包括诸如几何不等式、等周不等式以及概率论中出现的不等式等各种课题. 我们还略去了关于单叶函数和多叶函数的不等式，数论中的不等式，属于型理论的不等式，象 Bessel 不等式那样的不等式(它们属于正交级数理论)以及特殊函数论中出现的不

等式.

本书可以作为研究生参考书来使用，但大学生也可以有效地使用本书的个别节. 当然，本书对研究不等式理论是有用的，但我们相信，它对数学家、工程师、统计学家、物理学家和所有在他们工作中遇到不等式的人们也都是有用的.

如果确实是“所有分析学家要花费一半的时间通过文献查找他们想要用而又不能证明的不等式”，那么我们可以期望本书对他们将有所帮助.

许多不等式在比这里给出的条件还弱的条件下也成立. 对于含有积分或正整数的不等式尤其如此.

本书的缺点是，严格的不等式成立的条件没有处处都详细给出. 第二部分中说明的形式是不一致的，其中大多数结果叙述成带有证明的定理，而其他结果没有明显地作为定理而只是描述性地给出.（以下感谢语略.）

最后，我们引出各方面有关不等式的主要书籍和来源.

1. Hardy, G. H., J. E. Littlewood and G. Pólya: Inequalities. Cambridge 1934, 314pp.

由 V. I. Levin 译成俄文本，并由 V. I. Levin 和 S. B. Stečkin 补充，莫斯科，1948，456pp.(补充部分: pp. 361—441.)

上述补充由 R. P. Boas 选编并以下面名义发表: Levin, V. I. 和 S. B. Stečkin: Inequalities. Amer. Math. Soc. Transl. (2) 14, 1—29(1960).

英文第二版，1952，324 pp.

英文第二版的中译本，北京，1965，X + 352 pp.

2. Petrović, M.: Računanje sa brojnim razmacima. Beograd 1932 193pp.; 2nd ed. 1969, 169 pp.

3. Pólya, G., and G. Szegö: Isoperimetric Inequalities in Mathematical Physics. Princeton 1951, XVI + 279 pp.

4. Natanson, I. P.: Konstruktive Funktionentheorie. Berlin 1955, XIV + 515 pp.

5. Ahiezer, N. I.: Theory of Approximation. New York 1956, X + 307pp.

6. Timan, A. F.: Theory of Approximation of Functions of a Real Variable (Russian). Moscow 1960, 624pp.

7. Beckenbach, E. F., and R. Bellman: Inequalities. Berlin-Heidelberg-New York 1961; 2nd ed. 1965, 198pp.

8. Studies in Mathematical Analysis and Related Topics. Stanford 1962, 447pp.

9. Marcus, M., and H. Minc: A Survey of Matrix Theory and Matrix Inequalities. Boston 1964, 180pp.

10. Mitrinović, D. S.: Elementary Inequalities. Groningen 1964, 159 pp.

11. Walter, W.: Differential-und Integral-Ungleichungen. Berlin-Göttingen-Heidelberg-New York 1964, XIII + 269pp.

12. Mitrinović, D. S.: Nejednakosti. Beograd 1965, 240pp.

13. Hardy, G. H.: Collected Papers, vol. 2. Oxford 1967, pp. 379—682.

14. Inequalities (Proceedings of a Symposium held at Wright-Patterson Air Force Base, Ohio 1965), edited by O. Shisha. New York-London 1967, 360pp.

15. Szarski, J.: Differential Inequalities. Warszawa 1967, 256pp.

16. Mitrinović, D. S., and P. M. Vasić: Sredine. Beograd 1969, 122 pp.

17. Bottema, O., R. Ž. Djordjević, R. R. Janić, D. S. Mitrinović and P. M. Vasić: Geometric Inequalities. Groningen 1969, 151pp.

D. S. 密特利诺维奇

1970年5月

于贝尔格莱德

本 书 结 构

本书除了前言、符号和定义、索引之外，包括三个部分，其中每一部分分为很多节，有一些节又分成若干小节. 定理、定义、注和公式的编号是在小节内连续编排的，对于不包含小节的节，则按节编排. 如果提到的定理属于同一小节，则只给出定理号，而如果属于另一小节，则部分号、节号、小节号和定理号都给出. 当节内不分小节时，表示法类似.

本书有很多互相参照之处. 例如，2.1.4 意指第二部分，第一节，第四小节.

参考文献一般放在每小节之后，如果没有小节，则放在节后. §1.1，§1.4，§2.15 和 §2.25 是例外.

被引用的杂志的缩写根据 Mathematical Reviews 的用法.

符 号 和 定 义

全书所用的符号和概念基本上是规定好的. 我们假定读者已经熟悉数学分析原理、普通代数和拓扑的基本概念，因为一些标准符号已在那里用过，因此我们认为没有必要再对它们全部下定义. 这里只列出一小部分.

$[x]$ 表示实数 x 的整数部分.

$a^{p/q}$：若 $a>0$，p/q 是任何有理数，p，q 均为整数，且 $q>0$，则 $a^{p/q}$ 表示 a^p 的唯一的正 q 次方根.

$f(x)^r, f^{(k)}(x)^r$：若 r 是实数，则 $(f(x))^r$ 常用 $f(x)^r$ 表示，$(f^{(k)}(x))^r$ 用 $f^{(k)}(x)^r$ 表示。

$A \times B$：若 A, B 是两个任意集合，则集合 $A \times B$ 定义为

$$A \times B = \{(a, b) | a \in A, b \in B\}.$$

R^n：表示具有坐标 $x_1, \cdots, x_n$ 的点 x 的 n 维向量空间，根据其坐标是实的还是复的，R^n 称为实或复的 n 维空间.

一个向量或序列称为是正(或负)的，如果其所有坐标都是正的(或负的).

两个向量 $a = (a_1, \cdots, a_n)$ 和 $b = (b_1, \cdots, b_n)$ 的标量积或内积是数 $(a, b) = a \cdot b = a_1\bar{b}_1 + \cdots + a_n\bar{b}_n$，其中 $\bar{b}_1, \cdots, \bar{b}_n$ 是 $b_1, \cdots, b_n$ 的复共轭.

对于两个序列 $a = (a_1, \cdots, a_n)$ 和 $b = (b_1, \cdots, b_n)$，我们定义它们的和与积如下:

$$a + b = (a_1 + b_1, \cdots, a_n + b_n),$$
$$a \cdot b = (a_1b_1, \cdots, a_nb_n).$$

它们的差与商也可类似地定义，只是在定义商的时候要求 $b_i \neq 0, i = 1, \cdots, n$.

$C[a, b]$ 表示一切在区间 $[a, b]$ 上连续的实函数或复函数.

$L^p[a, b]$表示一切使 f^p 在$[a, b]$上可积的实或复函数 f.

$\|f\|$ 表示 f 关于某个空间的范数.

若 $A = (a_{ij})$ 是 $n \times n$ 方阵，则 $\operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.

目　　录

I. 引　论

II. 一般不等式

III. 特殊不等式

I 引　　论

1.1 实 数 系

1.1.1 实数集的公理

关于实数系系统而详细的构造可参考 E. Landau 的书[1]或 L. W. Cohen 和 G. Ehrlich 的书[2]等。

我们将按照类似于 J. Dieudonné[3]那样的方式，给出实数集的定义和公理系统，并给出一些直接由这些公理推出的定理．这些定理的证明大都比较简单，故略去．

实数的集合是一个非空的集合 R，它具有两个从 $R\times R$ 到 R 的分别称为加法和乘法的映射

$$(x,y)\longmapsto x+y \text{ 和 } (x,y)\longmapsto xy,$$

以及 R 的元素之间的一个序的关系 $x\leqslant y$（也可写作 $y\geqslant x$），它们满足

1° R 是一个域；

2° R 是一个有序域；

3° R 是一个 Archimedes 有序域；

4° R 是完备的，即 R 满足区间套公理．

因为本书是讨论不等式的，因此我们只对序的性质进行稍为详细的讨论．

1.1.2 实数的序的性质

在下面所有的关系式中，x,y,z 是 R 的任意元素．

所谓"R 是有序域"，指的是下列公理成立：

2.1° $x \leqslant y$, $y \leqslant z$ 蕴涵 $x \leqslant z$;

2.2° $x \leqslant y$, $y \leqslant x$ 等价于 $x = y$;

2.3° 对于任意 x 和 y,或 $x \leqslant y$,或 $y \leqslant x$;

2.4° $x \leqslant y$ 蕴涵 $x + z \leqslant y + z$;

2.5° $0 \leqslant x$ 和 $0 \leqslant y$ 蕴涵 $0 \leqslant xy$.

关系"$x \leqslant y$ 且 $x \neq y$"写作 $x < y$ 或 $y > x$. 关系 $x \leqslant y$ 等价于"$x < y$ 或 $x = y$".

设 $a < b$. 集合 $\{x | a < x < b\}$ 称为以 a, b 为端点的开区间,记作 (a, b). 集合 $\{x | a \leqslant x \leqslant b\}$ 称为以 a, b 为端点的闭区间或线段,记作 $[a, b]$. 对于 $a = b$,记号 $[a, a]$ 表示单点集合 $\{a\}$. 我们分别用 $[a, b)$ 和 $(a, b]$ 表示集合 $\{x | a \leqslant x < b\}$ 和 $\{x | a < x \leqslant b\}$, 并称它们为半开区间.

应用 1.1.1 中的公理 1°—4°, 特别用 2.1°—2.5° 给出的公理,我们能证明下列各重要定理.

定理 1 对于任何 $x, y \in R$, 三个关系 $x < y$, $x = y$, $x > y$ 中有一个且只有一个关系成立.

定理 2 若"$x \leqslant y$ 且 $y < z$"或"$x < y$ 且 $y \leqslant z$", 则 $x < z$.

定理 3 R 的任何有限子集 A 有最大元 b 和最小元 a, 因此, 对每个 $x \in A$, $a \leqslant x \leqslant b$.

定理 4 若 $x = (x_1, \cdots, x_n)$, $y = (y_1, \cdots, y_n)$ 是两个 n 个实数的有限序列, 满足 $x_k \leqslant y_k$, $k = 1, \cdots, n$, 则

$$x_1 + \cdots + x_n \leqslant y_1 + \cdots + y_n.$$

此外, 如果至少对于一个指标 k, $x_k < y_k$, 则

$$x_1 + \cdots + x_n < y_1 + \cdots + y_n.$$

若实数 $x > 0$, 则称 x 为正的. 若 $x < 0$, 则称 x 为负的. 若实数 $x \geqslant 0$,则称 x 为非负的. 若 $x > 0$, $y > 0$, 或 $x < 0, y < 0$, 则称 x 和 y 同号. 若 $x > 0, y < 0$, 或 $x <$

$0, y > 0$，则称 x 和 y 异号.

定理 5 若 $x_1, \cdots, x_n$ 是 n 个实数的序列，$y_1, \cdots, y_n$ 是 n 个非负实数的序列，且满足 $y_k \leqslant x_k, k = 1, \cdots, n$，则

$$y_1 \cdots y_n \leqslant x_1 \cdots x_n.$$

定理 6 若至少有一个 $z \in R$，使 $x + z \leqslant y + z (x + z < y + z)$ 成立，则 $x \leqslant y (x < y)$.

定理 7 关系 $x \leqslant y, 0 \leqslant y - x, x - y \leqslant 0, -y \leqslant -x$ 是等价的. 当$\leqslant$用$<$代替时，同样结果成立.

对于区间 (a, b)，其中 $a < b$，则正数 $b - a$ 称为区间的长度.

定理 8 设 $J_1, \cdots, J_n$ 是 n 个互不相交的区间，设 I 是包含 $\bigcup\limits_{k=1}^{n} J_k$ 的区间. 若 l_k 是 J_k 的长度 $(k = 1, \cdots, n)$，l 是 I 的长度，则

$$l_1 + \cdots + l_n \leqslant l.$$

对于任何实数 x，我们定义

$$|x| = x, \text{ 对于 } x \geqslant 0$$

和

$$|x| = -x, \text{ 对于 } x \leqslant 0.$$

因此 $|x| = \max(x, -x)$，并且 $|-x| = |x|$.

$|x|$称为 x 的绝对值.

$|x| = 0$ 等价于 $x = 0$.

对于 $x \neq 0$，我们记

$$x^+ = \frac{1}{2}(|x| + x) \quad (x \text{ 的正部分}),$$

$$x^- = \frac{1}{2}(|x| - x) \quad (x \text{ 的负部分}),$$

我们还记 $0^+ = 0^- = 0$.

用上面的记号，我们有

若 $x \geqslant 0$，则 $x^+ = x$， 若 $x \leqslant 0$，则 $x^+ = 0$；

若 $x \geqslant 0$，则 $x^- = 0$， 若 $x \leqslant 0$，则 $x^- = -x$；

$x = x^+ - x^-$， $|x| = x^+ + x^-$.

定理 9 若 $a > 0$，则 $|x| \leqslant a$ 等价于 $-a \leqslant x \leqslant a$，$|x| < a$ 等价于 $-a < x < a$.

定理 10 对任何一对实数 x, y，有

(1) $$|x + y| \leqslant |x| + |y|,$$

(2) $$||x| - |y|| \leqslant |x + y|,$$

并由归纳法，有

(3) $$|x_1 + \cdots + x_n| \leqslant |x_1| + \cdots + |x_n|.$$

(1)中等式成立，当且仅当 $x = 0$ 或 $y = 0$ 或 x, y 同号.

(2)中等式成立，当且仅当 $x = 0$ 或 $y = 0$ 或 x, y 异号.

(3)中等式成立，当且仅当 $x_1 \cdots, x_n$ 中所有非零实数同号.

定理 11 对于任何实数 x, y，有

$$(|x| - |y|)^2 \leqslant |x^2 - y^2|,$$

其中等式成立，当且仅当 $x = 0$ 或 $y = 0$ 或 x 和 y 的绝对值相等；又

$$\left|\sqrt{|x|} - \sqrt{|y|}\right| \leqslant \sqrt{|x - y|},$$

其中等式成立，当且仅当 $x = 0$ 或 $y = 0$ 或 $x = y$.

定理 12 若 $z \geqslant 0$，则由 $x \leqslant y$ 可推出 $xz \leqslant yz$.

定理 13 由关系 $x \leqslant 0$ 和 $y \geqslant 0$ 可推出 $xy \leqslant 0$. 由关系 $x \leqslant 0$ 和 $y \leqslant 0$ 可推出 $xy \geqslant 0$，当用$<$代替$\leqslant$时，有同样结果. 特别对任何实数有 $x^2 \geqslant 0$，并且除 $x = 0$ 外 x^2