地图投影

习题集

龚剑文　胡毓钜　编

测绘出版社

地图投影习题集

龚剑文　胡毓钜　编

专业名称________________

班　　号________________

姓　　名________________

学　　号________________

测 绘 出 版 社

(京)新登字 065 号

内 容 简 介

本习题集是高等学校教材《地图投影》(第二版)的配套书籍。它分为四个部分:第一部分为地图投影习题;第二部分为几种常用的地图投影源程序及示例;第三部分为《地图投影》复习题与思考题;第四部分为地图投影试题示例。

本习题集可作为测绘院校不同专业、不同层次的地图投影课程的教学用书,也可作为综合性大学、师范院校地图学课程的教学参考书,以及测绘技术人员的参考书。

地图投影习题集

龚剑文　胡毓钜　编

*

测绘出版社出版・发行

测绘出版社印刷厂印刷

新华书店总店科技发行所经销

*

开本 787×1092　1/16・印张 6.75・字数 145 千字

1992 年 8 月第一版・1992 年 8 月第一次印刷

印数 0 001—3 000 册・定价 7.50 元

ISBN　7-5030-0530-0/P・202

前　言

这本习题集原来是武汉测绘科技大学地图制图专业地图投影课程的配套讲义。地图投影课程除了讲授基本理论和建立各种投影的具体过程外，必须通过实践作业才能加深对它的理解以及更好地应用于地图生产。

原来的讲义在十几年的使用过程中作了多次修改和补充。鉴于现今除地图制图专业本科生外，其它测绘专业的学生以及地图制图专业的函授生在学习地图投影这门课程时都要做一定的练习题，为此予以公开出版。如果学生能认真完成这些内容，将有助于掌握地图投影的知识。对于其它大学地理专业的学生来说，如果对地图学中最富有数学原则的部分感兴趣的话，本书对他们深化理解地图投影理论也是有益的。

本书第二部分常用地图投影程序是由马俊海同志提供的，时晓燕同志参加了本书稿的校阅工作，高淑宁同志参加了一部分插图的绘制，特此深表谢意。

编　者

1991 年 3 月

目　　录

第一部分　地图投影习题

习题 1　利用制图用表（或《地图投影》* 附录 6、附录 7 和附录 9）以纬度为引数查出地球椭球表面一些要素的数值并计算

地图投影的主要任务，就是根据一定的数学法则，在平面上（地图上）建立与地球（椭球）表面上的地理坐标（经纬线网）相应的直角坐标系。为此，我们必须掌握地球椭球表面上的一些要素，诸如某段经线弧长、纬线弧长、某经纬差范围的梯形面积等。

本习题除了要求能够查表并计算出地球椭球表面上的一些要素的数值外，还需要了解这些要素随纬度变化的规律。

1. 查出子午圈曲率半径 M、卯酉圈曲率半径 N 和由赤道到纬线（φ）间的子午线弧长 S_M：

表 1-1

纬度 φ	子午圈曲率半径 M (m)	卯酉圈曲率半径 N (m)	由赤道至纬度 φ 的子午线弧长 S_M (m)
0°			
20°			
40°			
60°			
25°40′			

2. 计算下列经线弧长：

表 1-2

纬　差 $\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1$	由赤道到纬度 φ_2 的子午线弧长 (m)	由赤道到纬度 φ_1 的子午线弧长 (m)	纬线间（$\varphi_2-\varphi_1$）的经线弧长 S_M (m)
25°40′～20°00′			
60°00′～40°00′			

* 胡毓钜、龚剑文：地图投影（第二版），测绘出版社，1991 年。

3. 查表并计算下列纬线弧长：

表 1-3

纬度 φ	经差间隔 $(\Delta\lambda=\lambda_2-\lambda_1)$	经差 30′的纬线弧长 S_P (m)	所求纬线弧长 S_P (m)
0°	1°		
30°	2°		
60°	3°		
45°	4°30′		

4. 查表并计算下列球面梯形的面积：

表 1-4

纬　差 $\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1$	经　差 $\Delta\lambda=\lambda_2-\lambda_1$	经纬差范围 $\Delta\varphi\times\Delta\lambda$	梯形面积 (km²)
0°～4°	6°＝116°－110°	4°×6°	
40°～44°	6°＝116°－110°	4°×6°	
56°～60°	6°＝116°－110°	4°×6°	

习题 2　在地图上量算长度比、面积比

参照本习题集中附图 1 中华人民共和国地图，量算其长度比、面积比。

本作业的目的，就是了解地图上除了某些点和某些线以外的其它地方，可能存在各种变形（长度变形、面积变形等）。变形的大小和分布是衡量投影性质的重要标志。不同的地图投影有着不同的经纬网形状，因此利用地图上的经纬网形状经简单量测来估算各种变形对今后学习地图投影具有重要意义。

在地图上直接量得的长度比一般是沿经纬线的长度比 m、n。理论上长度比是微分线段投影长 $\Delta S'$ 与相应固有长 ΔS 的比值，即 $\mu=\frac{\Delta S'}{\Delta S}$。实际上可以通过量取某点沿经纬线上的单位长度，例如经差 1°、纬差 1°的经纬线长度，然后与该线段的实地长度（查表并除以地图主比例尺分母）相比可得。

在地图上量算的面积比就是藉简单的工具量取几块不同位置的经纬网格面积 $\Delta F'$ 与相应实地面积 ΔF 的比值，即 $P=\frac{\Delta F'}{\Delta F}$。

量算长度比

1. 准备一张地图（或地图集中的某页），找到指定的经纬线交点；

2. 用钢尺（或直尺）及分规，自指定的交点沿经、纬线量取单位长度，读数精确到0.1 mm，在有关的制图用表（或《地图投影》附录）中检取线段相应的实地长度，并依地图比例尺化成以毫米为单位的长度；

3. 填写表格；

表 1-5

长度比计算表

点位号	中心点		终点			图上量测长度 $\Delta S'$（mm）		$\Delta S'$ 平均值（mm）	相应地面实际长度 ΔS（m）	局部比例尺		主比例尺 1 : M	长度比 $\mu=\frac{\Delta S'}{\Delta S}\cdot M$	长度变形 $v_\mu=(\mu-1)\%$
						第一次	第二次			计算的	凑整的			
1	经度	105°	经度	左	100°									
				右	110°									
	纬度	30°	纬度	上	35°									
				下	25°									
2	经度	125°	经度	左	120°									
				右	130°									
	纬度	50°	纬度	上	55°									
				下	45°									
3	经度	90°	经度	左	85°									
				右	95°									
	纬度	10°	纬度	上	15°									
				下	5°									
4	经度	120°	经度	左	115°									
				右	125°									
	纬度	10°	纬度	上	15°									
				下	5°									
略图			1				2			3			4	

注意事项

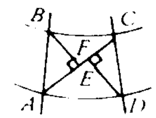
(1)若经纬线为曲线时，则应在曲线上量测，例如利用两脚规以 2mm 脚距进行；

(2)为了避免量测工具因温度及刻划等因素引起误差，应使用具有 0.5mm 刻划的钢尺进行量测；

(3)线条连线时铅笔头宜细。

面积比计算表

表 1-6

编号	量测范围	图上量(km)测数据				图上面积 $\Delta F'$ (km^2)	实地面积 ΔF (km^2)	面积比 $P=\Delta F'/\Delta F$	略图
		线段	第一次	第二次	平均值				
1	φ:自 30°到 35° λ:自 100°到 105°	AC							
		BE							
		DF							
2	φ:自 10°到 15° λ:自 110°到 115°	AC							
		BE							
		DF							
3	φ:自 40°到 45° λ:自 85°到 90°	AC							
		BE							
		DF							
4	φ:自 10°到 15° λ:自 90°到 95°	AC							
		BE							
		DF							
5	φ:自 50°到 55° λ:自 70°到 75°	AC							
		BE							
		DF							

4. 计算该交点位置的沿经、纬线长度比（有条件可与该地图采用的投影变形值进行比较）；

5. 附略图：说明所量测经纬线交点的位置和变形值的大小。

量算面积比

1. 在指定的地图或地图集中找到指定的范围；

2. 将图上经纬线所包含的面积近似地划分为若干块有规则的几何图形（如三角形、长方形等），用简单的工具进行量测，并计算得出图上的面积；

3. 利用制图用表（或《地图投影》中附录），检取椭球上相应的面积；

4. 计算面积比（有条件时可与该地图所采用投影值的大小进行比较）。

习题 3　根据投影方程分析投影特征

地图投影的一般方程为

$$x = f_1(\varphi, \lambda)$$

$$y = f_2(\varphi, \lambda)$$

从投影的方程来研究该投影的特征是研究投影的一般方法。熟悉用分析的方法来理解投影，这对今后的学习会有较大的帮助。

由已知投影方程求定：
· 投影性质
· 投影后经纬线夹角及其所在象限
· 沿经、纬线长度比
· 面积比
· 经纬线的形状

分析步骤提示

1. 先求一阶基本量 E、F、G、H；

2. 验算是否符合等角条件或等面积条件，如果两者均不符合，则为任意性质投影（还可以进一步验算是否满足等距离条件）；

3. 求 θ'、m、n、P 的方程；

4. 由投影公式分别消去 φ 和 λ 来求得经、纬线方程，从而确定经、纬线形状。

例 已知投影方程式

$$x = R\varphi$$
$$y = R\lambda \cos \varphi$$

分析该投影的特征。

1. 先求 E、F、G、H，确定投影的表象性质。

$$x = R\varphi \qquad y = R\lambda \cos\varphi$$

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi} = R \qquad \frac{\partial y}{\partial \varphi} = -R\lambda \sin\varphi$$

$$\frac{\partial x}{\partial \lambda} = 0 \qquad \frac{\partial y}{\partial \lambda} = R\cos\varphi$$

$$E = (\frac{\partial x}{\partial \varphi})^2 + (\frac{\partial y}{\partial \varphi})^2 = R^2(1 + \lambda^2 \sin^2\varphi)$$

$$F = \frac{\partial x}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial x}{\partial \lambda} + \frac{\partial y}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial y}{\partial \lambda} = -R^2\lambda \sin\varphi \cos\varphi$$

$$G = (\frac{\partial x}{\partial \lambda})^2 + (\frac{\partial y}{\partial \lambda})^2 = R^2 \cos^2\varphi$$

$$H = \frac{\partial x}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial y}{\partial \lambda} - \frac{\partial y}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial x}{\partial \lambda} = R^2 \cos\varphi$$

(1)等角性质的验算：

等角条件为

$$F = 0, \qquad \frac{\sqrt{E}}{R} = \frac{\sqrt{G}}{R\cos\varphi}$$

该投影中

$$F = -R^2\lambda \sin\varphi \cos\varphi \neq 0$$

$$\frac{\sqrt{E}}{R} = \sqrt{1 + \lambda^2 \sin^2\varphi}; \qquad \frac{\sqrt{G}}{R\cos\varphi} = 1$$

即

$$\frac{\sqrt{E}}{R} \neq \frac{\sqrt{G}}{R\cos\varphi}$$

未满足等角条件，因此，该投影不是等角投影。

(2)等面积性质的验算：

等面积条件为

$$H = R^2 \cos\varphi$$

该投影中，$H = R^2\cos\varphi$，符合等面积条件，因此，该投影属于等面积投影。

2. 确定经纬线投影后的夹角及其象限。

$$\mathrm{tg}\,\theta' = \frac{H}{F} = \frac{R^2\cos\varphi}{-R^2\lambda\sin\varphi\cos\varphi} = -\frac{1}{\lambda\sin\varphi}$$

或

$$\mathrm{tg}\,\varepsilon = -\frac{F}{H} = \lambda\sin\varphi$$

该投影中，$F = -R^2\lambda\sin\varphi\cos\varphi$，即 F 为负值，故 θ' 位于第二象限。

3. 求沿经、纬线长度比。

$$E = R^2(1 + \lambda^2\sin^2\varphi) \quad , \quad G = R^2\cos^2\varphi$$

而

$$\mathrm{tg}\,\varepsilon = \lambda\sin\varphi$$

则

$$E = R^2(1 + \mathrm{tg}^2\varepsilon) = R^2\sec^2\varepsilon$$

故

$$m = \frac{\sqrt{E}}{R} = \frac{R\sec\varepsilon}{R} = \sec\varepsilon$$

$$n = \frac{\sqrt{G}}{R\cos\varphi} = \frac{R\cos\varphi}{R\cos\varphi} = 1$$

4. 求面积比。

$$P = \frac{H}{R^2\cos\varphi} = \frac{R^2\cos\varphi}{R^2\cos\varphi} = 1$$

或

$$P = m \cdot n \cdot \cos\varepsilon = 1$$

5. 求经纬线形状。

由投影第一方程式知：

$$x = R\varphi$$

此式为纬线方程式。由此式可以看出，纬线为直线。

为了求得经线方程式，我们可先从 x 坐标式中求 φ：

$$\varphi = \frac{x}{R}$$

将上式代入 y 的坐标方程式，则

$$y = R\lambda\cos\frac{x}{R} = R\lambda\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{R}\right)$$

得到经线方程式为正弦曲线方程式，因而，经线是正弦曲线。

该投影就是著名的桑逊投影(图 1-1)。

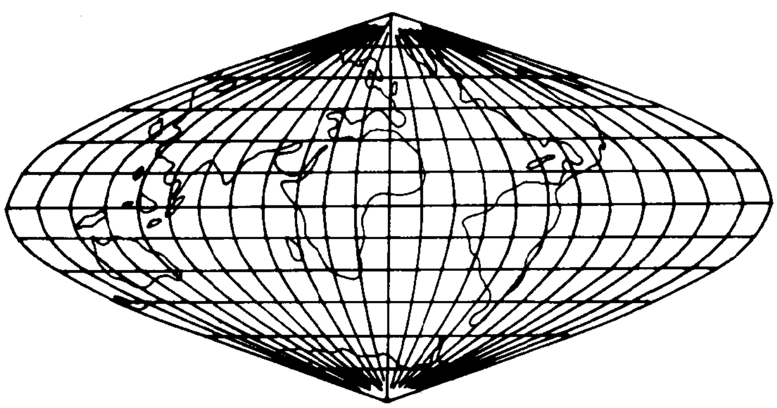


图 1-1 该投影的经纬线形状

根据下列已知方程分析它们的投影特征

1. $x = R\lambda\cos\varphi$; $y = R\lambda$
2. $x = -\rho\cos\delta$; $y = \rho\sin\delta$[式中 $\delta = \lambda, \rho = R(90° - \varphi)$]
3. $x = R\,\mathrm{lntg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)$; $y = R\lambda$
4. $x = R\,\mathrm{tg}\,\varphi$; $y = R\lambda$
5. $x = -\frac{2R\cos\varphi \cdot \cos\lambda}{1 + \sin\varphi}$; $y = \frac{2R\cos\varphi \cdot \sin\lambda}{1 + \sin\varphi}$
6. $x = R\sin\varphi$; $y = R\lambda$

习题 4　利用诺谟图求变形值

利用诺谟图求极值长度比 a、b

在量测和计算某点上沿经、纬线的长度比 m、n 和经纬线投影后的夹角 θ' 后，用公式计算该点极值长度比 a、b 显得很麻烦，而使用《地图投影》附录 3 决定极值长度比 a、b 的诺谟图就比较方便了。

由于在制作诺谟图时引进 ε 对使用较为方便，因此有

$$a \pm b = \sqrt{m^2 \pm 2mn\sin\theta' + n^2} = \sqrt{m^2 \pm 2mn\cos\varepsilon + n^2}$$
$$= n\sqrt{\sigma^2 \pm 2\sigma\cos\varepsilon + 1} = n(a_1 + b_1)$$

式中：$\varepsilon = \theta' - 90°$，$\sigma = \dfrac{m}{n}$（规定 $\sigma>1$。若 $n>m$，则 $\sigma = \dfrac{n}{m}$）。

例　设 $m=2.02$，$n=1.47$，$\theta'=103°12'$，求极值长度比。

(1)由于 $m > n$，故 $\sigma = \dfrac{m}{n} = 1.375$，$\varepsilon = \theta' - 90° = 13.2°$。

(2)以 $\varepsilon=13.2°$为引数，在 A 尺上读出 ε；以 σ 为引数分别在 $\sigma(a_1+b_1)$ 和 $\sigma(a_1-b_1)$ 尺上读出 σ 值，标出两点。按 $\sigma(a_1+b_1)$和 ε 读数以直尺连线，在$\frac{1}{2}(a_1+b_1)$尺上得 1.18，再按 $\sigma(a_1+b_1)$和 ε 读数以直尺连线，在 $\frac{1}{2}(a_1+b_1)$ 尺上得 0.23(图 1-2)。

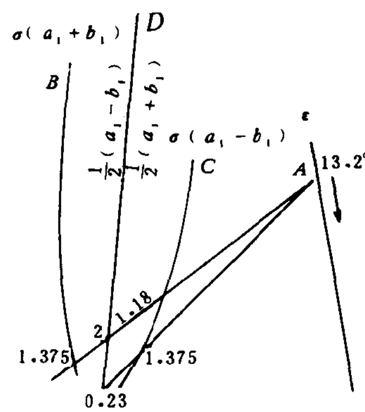


图 1-2

由于

$$\frac{1}{2}(a_1 + b_1) = 1.18$$

$$\frac{1}{2}(a_1 - b_1) = 0.23$$

解得 $a_1=1.41$，$b_1=0.95$。

于是得

$$a = n \cdot a_1 = 2.07$$
$$b = n \cdot b_1 = 1.37$$

利用诺谟图决定面积比 P

例　设 $m=2.02$，$n=1.47$，$\theta'=103°12'$，利用《地图投影》附录 4 求其面积比。

(1)以 $m=2.02$，$n=1.47$ 为引数，分别在 m、n 尺上找到两定点，并用直线相连，在无分划尺上相交于 f 点(图 1-3)。

(2)在 ε 尺上找出 13.2°点，并与 f 点以直线相连交 P 分划尺之点即为所求面积比值，得 $P=2.89$。

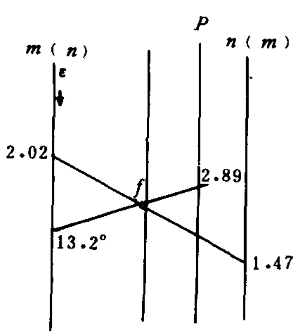


图 1-3

利用诺谟图决定最大角度变形

将公式 $\operatorname{tg}\dfrac{\omega}{2} = \dfrac{a-b}{2\sqrt{ab}}$ 改写为

$\operatorname{tg}^2\dfrac{\omega}{2} = \dfrac{\sigma^2 - 2\sigma + 1}{4\sigma\cos\varepsilon}$ 式中的 $\sigma = \dfrac{m}{n}$，故 $m=\sigma n$。

例　设 $m=2.02$，$n=1.47$，$\theta'=103°12'$，利用《地图投影》附录 5 求该点的最大角度变形。