

建筑结构中的应用数学

卢存恕 编著

中国建筑工业出版社

前 言

结构工程师在设计房屋或其它工程结构时，都会遇到对结构进行静力分析、动力分析和稳定分析的问题。解决这些问题，将用到诸如微分方程、矩阵代数、向量分析、复变函数、变分法、差分法等数学知识。由于传统的教育思想和教学方法的弊端，很多工科院校学生在学习数学时，往往忽视其实际应用，学习结构理论时又不能把重点放在数学分析上，致使他们的知识结构不尽合理，表现之一就是数学方法与结构分析之间常有一道“鸿沟”。要越过这道鸿沟，需要用相当长的时间去翻阅大量数学专著，这在工程师的时间运筹上是不经济的。为了帮助结构工程师寻求一条捷径，本书力图从建筑结构计算的实际出发，参照数学的自身体系，采用数学方法与结构分析相结合，甚至直接将相关内容对应编排的方式，对上面所提到的一些数学分支的基本内容加以简单介绍。笔者的主观意图是想为读者在越过这条“鸿沟”的道路上，架起一座简易“桥梁”，以便通向某些结构分析的专门领域。这种横向学科之间的“塔桥”工作，在科学技术向高度综合化发展的今天显得日益重要，它的发展对于工程技术人员、以及大专院校师生，都会是有益的。

笔者曾为吉林省暨长春市建筑学会举办的工程师数学进修班授课，本书系由当时所编讲稿几经整理而成。全书初稿曾由清华大学龙驭球教授和湖南大学熊祝华教授审阅，对他们们的热情关怀与支持谨致衷心的感谢。胡玉珠同志参与了本书的绘图工作。

由于笔者水平所限，书中错误和不足之处定会有之，敬请广大读者批评指正。

本书专门叙述工程结构的一些常见数学原理。书中以数学体系为纵线，把各类工程结构力学问题按数学归类，建立起共同的数学模型作为横线展开阐述。在各种问题的阐述中，均把其力学的基本概念，数学模型的建立和求解，以及有关数学基础知识结合起来，并行阐述，互为联系和补充。目的是使读者能较简捷地掌握一些工程数学的基本原理及公式推证。

全书包括：常微分方程、富里埃级数、偏微分方程、变分法、差分法、复变函数、向量分析、矩阵代数共八章。各章按不同数学门类，分别涉及杆件体系、框架—剪力墙、弹性地基梁、板壳等结构的静力分析、动力计算，有限元分析等多种工程力学问题。大部分问题均附有计算例题。各章后还附有习题和答案。对于一些工程中不常遇到的力学问题均注出了详细的力学分析的出处。

本书可供土建工程结构设计工程技术人员以及土建专业大专以上学生参考。

建筑结构中的应用数学

卢存恕 编著

*

中国建筑工业出版社出版(北京西郊百万庄)

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

中国建筑工业出版社印刷厂印刷(北京阜外南礼士路)

*

开本：787×1092毫米 1/16 印张：23 $\frac{1}{2}$ 字数：569千字

1987年4月第一版 1987年4月第一次印刷

印数：1—10,190册 定价：3.60元

统一书号：15040·5147

目 录

第一章 常微分方程..... 1	一、富里埃系数的确定 间断荷载的展开.....71
§ 1-1 常微分方程的一般概念 建筑力学	二、狄里赫莱定理简介.....73
中常微分方程举例..... 1	§ 2-4 偶函数与奇函数的富氏展开 荷载
一、建筑力学中常微分方程举例..... 1	的分解 集中荷载的富氏展开.....74
二、微分方程的定义..... 3	§ 2-5 以 $2l$ 为周期的函数展开.....79
§ 1-2 一阶微分方程..... 4	§ 2-6 在区间 $(-l, l)$ 内函数的开拓.....82
一、变量可分离的方程 等强度杆截面的变	§ 2-7 富里埃级数在梁挠曲中的应用.....85
化规律..... 5	§ 2-8 富里埃积分及其在弹性地基梁中的
二、一阶线性微分方程 厚壁筒的受力分析... 7	应用 地震富里埃谱.....89
三、全微分方程.....13	§ 2-9 富里埃级数与富里埃积分的复数形
§ 1-3 二阶微分方程.....14	式 富氏变换定义简介.....94
一、二阶常系数线性齐次微分方程 单质点	§ 2-10 二重富里埃级数 均布荷载的展开...98
自由振动.....15	第三章 偏微分方程.....102
二、二阶常系数线性非齐次微分方程 单质	§ 3-1 偏微分方程的建立和定解问题的
点强迫振动 地震方程及杜哈默积分.....24	提法.....102
三、非线性二阶微分方程特例 压杆稳定的	一、拉紧弦的横向振动.....102
精确解.....35	二、薄膜振动.....104
§ 1-4 高阶微分方程.....39	三、杆的纵向振动 纵向地震波.....106
一、 n 阶常系数线性微分方程 弹性地基梁	四、梁的剪切振动 横向地震波.....107
的挠度 框架—剪力墙协同工作分析.....39	五、梁的横向振动.....108
二、欧拉方程 圆孔应力集中.....42	六、一维热传导方程.....109
三、可降阶的微分方程 悬链线.....44	七、弹性力学平面问题的基本方程.....110
§ 1-5 算子法解微分方程 简支工字形梁	八、三维弹性体的基本方程.....113
弯扭屈曲问题的计算.....45	九、弹性薄板弯曲方程.....115
§ 1-6 常系数线性微分方程组.....49	十、闭合圆柱形壳体弯曲的一般方程.....118
一、齐次方程组 多质点自由振动.....51	§ 3-2 分离变量法解偏微分方程.....119
二、非齐次方程组 多质点强迫振动.....57	一、分离变量法的提出.....119
§ 1-7 拉普拉斯变换简介 有阻尼强迫振	二、分离变量法解一维波动方程.....120
动的又一解法.....60	三、分离变量法解薄膜平衡方程.....124
第二章 富里埃级数.....67	四、分离变量法解梁的剪切振动方程.....126
§ 2-1 引言—弹性地基梁的三角级数解.....67	五、分离变量法解梁的弯曲振动方程.....127
§ 2-2 三角函数的正交性.....68	六、分离变量法解弹性力学平面问题.....129
一、两个矢量的正交.....68	七、分离变量法解弦的强迫振动方程.....131
二、两个函数的正交.....69	八、分离变量法解简支矩形板的挠曲方程...133
三、函数组的正交性.....69	九、分离变量法解极坐标形式的拉普拉斯
§ 2-3 富里埃级数与富里埃系数.....70	方程.....134

十、分离变量法解极坐标形式的二维波动方程	137	有频率	191
§ 3-3 特殊函数 分离变量法的继续	137	二、迦辽金法 四边简支球形扁壳计算	198
一、贝塞尔函数	137	三、最小二乘法 四边固定矩形板的弯曲	202
二、圆膜振动的完整解 变截面杆件剪切振动的固有圆频率	145	四、定点法 四边固定矩形板的自振频率	204
三、勒让德微分方程及勒让德多项式	149	第五章 差分法	208
四、球体振动	153	§ 5-1 差分法的基本原理	208
§ 3-4 一维波动方程的行波法与富氏变换法简介	155	§ 5-2 差分法解一维问题 应用举例	210
一、行波法解一维波动方程 地震波	155	§ 5-3 差分法解弹性力学平面问题	215
二、富氏变换法解一维波动方程 弹性力学平面问题的富氏变换	157	一、应力分量及双调和方程的差分表达式	216
三、拉普拉斯方程解的泊松公式	160	二、边界条件的处理	217
第四章 变分法	162	三、例题	219
§ 4-1 从实例分析看力学中的两套方法	162	§ 5-4 差分法计算球形扁壳	222
一、求简支梁反力	162	§ 5-5 采德尔迭代法	225
二、求静定桁架变位	163	第六章 复变函数	229
三、求梁的挠度	163	§ 6-1 复数的基本性质 复阻尼振动概念	229
四、解简单超静定桁架	165	一、复数的几种表示方法	229
五、单自由度自由振动频率的确定	167	二、复数运算与共轭复数	231
六、压杆稳定求临界荷载	167	三、复阻尼振动概念	234
七、方板的极限平衡	169	§ 6-2 解析函数	235
§ 4-2 变分法的基本概念	170	一、复变函数	235
一、泛函及其简单的力学模型	170	二、解析函数	237
二、泛函的极值	171	§ 6-3 解析函数在线弹性断裂力学中的应用	239
§ 4-3 最简单泛函的欧拉方程与变分记号	173	一、Ⅲ型裂纹扩展方式的研究	240
一、泛函极值的必要条件	173	二、Ⅰ型裂纹扩展方式的研究	241
二、欧拉方程的初步应用	175	§ 6-4 初等函数的解析性	246
三、变分记号	177	一、指数函数的解析性	246
§ 4-4 不同型式泛函极值的必要条件	180	二、三角函数的解析性	247
一、依赖于多个函数的泛函	180	三、对数函数的解析性	247
二、依赖于高阶导数的泛函	180	四、幂函数的解析性	248
三、依赖于多个自变量的泛函	181	§ 6-5 保角变换及其在断裂力学中的应用	248
四、依赖于多个自变量,且含有高阶偏导数的泛函	181	一、复变函数的几何表示	248
§ 4-5 变分原理在力学中的应用	181	二、导数的几何意义	249
一、哈密顿原理	181	三、保角变换的基本问题及其在线弹性断裂力学中的应用举例	251
二、利用哈密顿原理推导振动方程	183	四、分式线性变换	253
三、利用最小位能原理推导平衡方程	184	五、初等函数的变换	254
四、力学中几个原理的简要说明	189	§ 6-6 复变函数的积分 柯西定理和柯西积分公式	256
§ 4-6 变分法中的直接法	190	一、复变函数积分的定义与计算	256
一、里兹法 矩形截面杆的扭转 振动的固		二、柯西定理	258
		三、柯西积分公式及其在椭圆孔应力集中问题中的应用	260

§ 6-7 台劳级数与罗朗级数.....263	三、行列式的性质.....309
一、台劳级数.....264	§ 8-2 矩阵代数的基本知识 单元刚度方
二、罗朗级数.....266	程的矩阵表达式.....312
§ 6-8 留数及其在唇形裂纹问题中的应用.....268	一、矩阵表达式的引入.....312
一、孤立奇点.....268	二、有关矩阵的基本概念.....313
二、留数.....269	三、矩阵的运算.....317
三、留数在唇形裂纹问题中的应用.....271	四、单元刚度方程的矩阵表达式.....320
§ 6-9 复变函数在线弹性断裂力学中的	§ 8-3 线性变换 有限元法中线性变换的
应用.....272	应用.....322
一、复应力函数的一般表达式.....272	一、结构分析中的线性变换.....322
二、无限大板单向均匀受拉裂纹附近应力场的	二、线性变换的矩阵表示.....322
求解.....274	三、线性变换在有限元法中的应用举例.....323
第七章 向量分析.....280	§ 8-4 用逆矩阵(矩阵除法)解线性方程
§ 7-1 向量代数 点积与叉积的力学模型.....280	组 逆矩阵在荷载组合中的作用.....325
一、基本定义.....280	一、逆矩阵的概念.....325
二、向量合成与力系合成的关系.....281	二、利用行列式求逆矩阵.....326
三、向量乘积及其力学模型.....281	三、用逆矩阵解线性方程组.....328
§ 7-2 向量微分 平面曲线运动的研究.....284	四、逆矩阵在荷载组合中的作用.....331
一、向量的导数.....284	§ 8-5 矩阵的分块及其运算.....331
二、向量的偏导数.....285	一、分块乘法.....332
三、向量的微分.....286	二、分块法求逆矩阵.....333
四、例题.....286	§ 8-6 线性方程组的其它解法.....335
五、平面曲线运动的研究.....288	一、最易求解的方程组.....335
§ 7-3 正交曲线坐标 三维弹性力学平衡	二、高斯消去法.....336
方程的正交曲线坐标表达式.....290	三、主元素消去法.....337
一、曲线坐标的概念.....290	四、高斯—焦丹消去法求逆矩阵.....339
二、正交曲线坐标系中微分六面体的几何	§ 8-7 矩阵代数在杆系结构力学中的应用
元素.....292	举例 用直接刚度法解平面桁架.....340
三、三维弹性力学平衡方程的正交曲线坐	一、刚度法与直接刚度法的力学说明.....340
标表达式.....294	二、单元分析与单元刚度矩阵.....341
§ 7-4 曲面曲线坐标系 壳体无矩理论的	三、结构分析与整体刚度矩阵.....345
平衡方程.....297	四、求结构的反力与内力.....348
一、混合型曲线坐标.....297	§ 8-8 线性方程组解的性质研究及其在力
二、壳体无矩理论平衡方程的一般表达式.....299	学问题中的反映.....349
三、旋转面壳体的平衡方程 锥壳在静水	一、非齐次线性方程组解的性质研究 结构力
压力作用下内力的解答.....300	学中解答唯一性问题的讨论.....349
四、任意柱面壳体的平衡方程 圆筒壳在	二、齐次线性方程组解的性质研究 特征值
液体内压力作用下内力的解答.....302	与特征向量.....353
第八章 矩阵代数.....305	附录一 哑马函数表.....359
§ 8-1 行列式与线性方程组简介.....305	附录二 贝塞尔函数表.....359
一、三元线性方程组.....305	习题答案.....363
二、 n 元线性方程组.....307	

第一章 常微分方程

§ 1-1 常微分方程的一般概念 建筑力学中常微分方程举例

一、建筑力学中常微分方程举例

介绍常微分方程的一般概念前，首先考察几个微分方程建立的例子。

1. 自由落体的运动微分方程

图1-1表示一质点 M 自初始位置 A 沿 y 轴自由下落，其初始位移为 y_0 。为了确定质点下落过程中位移与时间的具体函数关系，一般须先建立相应的微分方程。由于质点 M 只受重力 $\vec{G}$ 的作用（不计空气阻力）；根据牛顿第二定律，必然在 y 方向产生相应的加速度 $\vec{a}$ ，其数值与重力 $\vec{G}$ 的关系为

$$G = ma \tag{1-1}$$

式中 m 为质点 M 的质量。由运动学得知，加速度的大小 a 与位移 y 的关系为

$$a = \frac{d^2 y}{dt^2}$$

代入式(1-1)，得

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{G}{m} = g. \tag{1-2}$$

式中 g 为重力加速度。

式(1-2)反映了自由落体运动中位移与时间的关系，但它是以导数的形式出现的，称为自由落体运动的微分方程。求解此方程后，方可得到位移与时间的具体函数关系。

2. 单质点自由振动微分方程

如图1-2所示，位于弹簧片顶端的一质点 M ，受到某种干扰后，发生了横向微小振动。

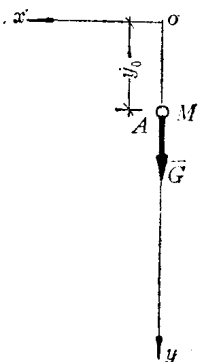


图 1-1

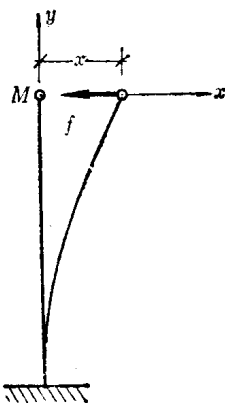


图 1-2

为了确定其运动的具体规律，首先建立相应的微分方程。质点 M 在振动过程中，如果不考虑阻尼力，则在 x 方向只受到弹性恢复力 $\vec{f}$ 的作用，根据牛顿第二定律，有

$$ma = m \frac{d^2 x}{dt^2} = f \tag{1-3}$$

由虎克定律得知，弹性恢复力 $\vec{f}$ 的数值与位移 x 成正比，其方向始终与 x 方向相反，可表示成

$$f = -kx$$

式中 k 为弹簧常数。将此式代入式(1-3)，得

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx$$

或 $\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0 \tag{1-4}$

令 $\frac{k}{m} = \omega^2$ ，则式(1-4)变为

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \tag{1-5}$$

此式即为单质点自由振动的微分方程。若要得到具体振动规律，尚须求解此微分方程。

3. 弹性曲线的微分方程

材料力学中研究梁的弯曲问题时，为了求得图1-3所示梁在给定荷载 P, q 作用下的弹性曲线（亦称挠曲线）的具体表达式 $y = f(x)$ ，必须首先建立它的微分方程。根据材料力学的分析，在不计剪力 Q 对位移的影响下，弹性曲线的曲率与弯矩的关系为

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M(x)}{EJ}$$

式中 ρ 为曲线的曲率半径； $M(x)$ 为梁的弯矩方程； EJ 为抗弯刚度。此外，由高等数学得知，平面曲线的曲率微分表达式为

$$\frac{1}{\rho} = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}}$$

联立上述两个方程可得

$$\frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}} = \frac{M(x)}{EJ}$$

考虑小变形因素， y'^2 与1的比较很小，可忽略不计，得梁弹性曲线的近似微分方程为

$$y'' = \frac{M(x)}{EJ} \tag{1-6}$$

4. 压杆稳定的微分方程

图 1-4表示两端铰接的细长杆在轴向压力作用下失去直线型式的稳定平衡，发生了侧向弯曲。为了确定其失稳的临界荷载 P_k 值，可利用上例中的结论 $y'' = \frac{M(x)}{EJ}$ ，并考虑到弯矩方程为 $M(x) = -P_k \cdot y$ 。因此，有

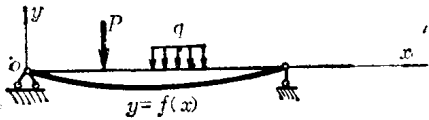


图 1-3

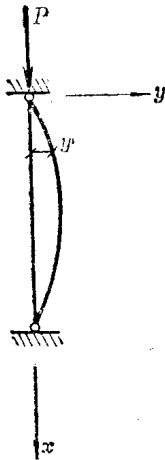


图 1-4

$$EJy'' = -P_k \cdot y \quad (1-7)$$

式中负号系因 y 值的正负号与 y'' 的正负号始终是相反的, 无论曲线凸向右侧或凸向左侧, 式中负号都必须存在。由式 (1-7) 得压杆稳定微分方程为

$$y'' + \frac{P_k}{EJ}y = 0$$

令 $\frac{P_k}{EJ} = k^2$, 上式写成

$$y'' + k^2y = 0 \quad (1-8)$$

根据力学原理, 用类似方法还可建立如下一些方程 (推证省略, 有关参考书将在求解中分别介绍)。

5. 弹性地基梁的微分方程

$$EJ \frac{d^4w}{dx^4} + kw = p(x) \quad (1-9)$$

式中 w 为地基梁的挠度; $p(x)$ 为分布荷载; k 为地基的弹性系数。

6. 框架——剪力墙协同工作的基本微分方程

$$\frac{d^4y}{dx^4} - \frac{\lambda^2}{H^2} \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{E_q J_q} q(x) \quad (1-10)$$

式中 y 为水平线位移; $q(x)$ 为地震荷载或其它水平荷载; λ 、 H 和 $E_q J_q$ 为常数。

7. 简支工字型梁弯扭屈曲微分方程

$$EI_\omega \varphi^{(4)} - GI_k \varphi'' - \frac{M^2}{EI_y} \varphi = 0 \quad (1-11)$$

式中 φ 为梁的扭转角; E 、 G 、 I_ω 、 I_k 及 I_y 均为常数; M 为临界弯矩。

从建筑力学中可以提出一系列微分方程, 但微分方程决不只是来源于建筑力学。作为有效的数学工具, 微分方程是与各种自然科学相联系的。这一点务必请读者注意。就数学自身而论, 同样可以提出各种各样的微分方程。例如, 根据解析几何可以知道方程

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = 4$$

是一条特定的二次曲线 (式中 a 、 b 为常数)。对此方程求导并消去 $(x-a)$ 与 $(y-b)$, 可得如下微分方程

$$\frac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''} = 2$$

这个微分方程揭示出原有二次曲线的本质属性, 说明它是一个曲率半径为 2 的圆周曲线。

此外, 还可给出各种含有微分形式的方程, 如

$$xdy - y^2dx = 0$$

等等。

二、微分方程的定义

对上述各方程, 如抛开其力学含义, 仅从数学角度来研究, 其共同特点是: 方程中均含有未知函数的导数或微分。因此, 凡含有未知函数的导数或微分的方程称为微分方程。上述各微分方程中未知函数都只依赖于一个自变量, 这样的微分方程称为常微分方程。依

关于两个或两个以上自变量的微分方程称为偏微分方程，有关偏微分方程的建立与求解，将留到第三章讨论。

常微分方程的一般形式可表为

$$\Phi(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (1-12)$$

表达式中未知函数最高阶导数的阶数称为微分方程的阶。前面(1-2)、(1-5)、(1-6)、(1-8)式为二阶常微分方程；(1-9)、(1-10)、(1-11)式为四阶常微分方程。

建立微分方程后，为了求得未知函数的具体表达式，必须对给定的微分方程进行求解。如果存在某函数 $y = f(x)$ 代入式(1-12)中，能使左部恒等于零，则此函数 $f(x)$ 称为微分方程(1-12)的解或积分。

采用直接代入法容易验证

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + C_1t + C_2 \quad (1-13)$$

即为微分方程(1-2)的解(式中 C_1 、 C_2 为任意常量)，而函数

$$x = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t \quad (1-14)$$

是方程(1-5)的解。

方程的解或积分表达式中一般都含有任意常量。若解中独立的任意常量的个数等于方程的阶数，此解称为通解。按此定义，式(1-13)及(1-14)显然是通解。如果给定某些初始条件或边界条件，使得任意常量变为确定的值，则这种解称为原微分方程的特解。在

例1中当给定 $t=0$ 时 $y=y_0$ 以及 $t=0$ 时 $v = \frac{dy}{dt} = 0$ (自由落体)两个条件后，将它代入式(1-13)解得

$$C_2 = y_0 \quad C_1 = 0$$

从而得特解

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + y_0$$

§ 1-2 一阶微分方程

若 $f(x)$ 是 x 的已知函数，方程 $\frac{dy}{dx} = f(x)$ 属于最简单的一阶微分方程。此方程的微分形式为 $dy = f(x)dx$ ，将此式两边积分得

$$y = \int f(x)dx + C_1$$

因解中含有一个任意常量，故此表达式即为方程 $\frac{dy}{dx} = f(x)$ 或 $dy = f(x)dx$ 的通解。

研究方程

$$\frac{dy}{dx} = y \quad (1-15)$$

由于 y 为未知函数，因此不能采用上例的简单积分方法求解。但若将式(1-15)化成

$$\frac{dy}{y} = dx$$

的形式, 尽管 y 为 x 的未知函数, 由于左右变量已分离, 两侧可以分别积分, 积分后得到

$$\ln y = x + C_1$$

因为 C_1 是任意常量, 可取 $C_1 = \ln C$, 表达式成为

$$\ln y = x + \ln C$$

或

$$\ln \frac{y}{C} = x$$

从而得

$$y = Ce^x$$

此函数即为方程 (1-15) 的通解。

这个例题的求解虽然简单, 但却提供了一个非常有价值的微分方程的解法, 称为分离变量法。

一、变量可分离的方程 等强度杆截面的变化规律

一阶微分方程的一般形式为

$$\Phi(x, y, y') = 0 \quad (1-16)$$

如果已将 y' 解出, 可写成

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(x, y)$$

或

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{P(x, y)}{Q(x, y)} \quad (1-17)$$

即

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 \quad (1-18)$$

若 $P(x, y)$ 与 $Q(x, y)$ 均可分解为两因子之积, 即 $P(x, y) = X_1(x) \cdot Y_1(y)$ 而 $Q(x, y) = X_2(x) \cdot Y_2(y)$, 则式 (1-18) 成为

$$X_1(x) \cdot Y_1(y)dx + X_2(x) \cdot Y_2(y)dy = 0 \quad (1-19)$$

此方程称为变量可分离的方程。

以 $X_2(x) \cdot Y_1(y)$ 除方程两端, 变量即可分离, 积分后得通解为

$$\int \frac{X_1(x)}{X_2(x)} dx + \int \frac{Y_2(y)}{Y_1(y)} dy = C$$

【例 1】 求 $dx + xydy + y^2dx = ydy$ 的通解。

【解】 将此式写成式 (1-18) 的形式

$$(1 + y^2)dx + (xy - y)dy = 0$$

对照式 (1-19), 可知此方程属于变量可分离的方程。用 $(1 + y^2)(x - 1)$ 除方程两端得

$$\frac{dx}{x - 1} + \frac{ydy}{1 + y^2} = 0$$

积分得

$$\ln(x - 1) + \frac{1}{2} \ln(1 + y^2) = \ln C$$

或

$$(x - 1)\sqrt{1 + y^2} = C$$

最后得通解

$$y^2 = \frac{C^2}{(x-1)^2} - 1$$

【例 2】 图1-5 (a) 表示一个在 P 力与自重共同作用下 处于等 强度的变 截面 受压杆件。杆的容许应力为 $[\sigma]$ 。上端截面面积为 (根据材料力学理论)

$$A_0 = \frac{P}{[\sigma]}$$

试确定此等强度杆截面面积的变化规律。

【解】 设 x 处截面面积为 $A(x)$ ，则 $x + dx$ 处截面面积为 $A(x) + dA(x)$ 。将此微段截出，其受力如图1-5 (b) 所示。根据等强度条件，上下两个截面均应受有压应力 $[\sigma]$ ，微元体还有自重

$$dQ = \gamma A(x) dx$$

式中 γ 为杆的单位体积重量。对单元体取平衡条件

$$\Sigma x = 0$$

得 $[A(x) + dA(x)][\sigma] = A(x)[\sigma] + \gamma A(x) dx$

或 $[\sigma] dA(x) = \gamma A(x) dx$ (1-20)

此方程显然属于变量可分离的方程，以 $[\sigma] A(x)$ 除两侧得

$$\frac{dA(x)}{A(x)} = \frac{\gamma}{[\sigma]} dx$$

积分得

$$\ln A(x) = \frac{\gamma}{[\sigma]} x + \ln C$$

或 $A(x) = C e^{\frac{\gamma}{[\sigma]} x}$

代入边界条件 $A(x)|_{x=0} = A_0$ ，得 $C = A_0$ ，于是

$$A(x) = A_0 e^{\frac{\gamma}{[\sigma]} x} \quad (1-21)$$

即为等强度杆截面面积的变化规律。

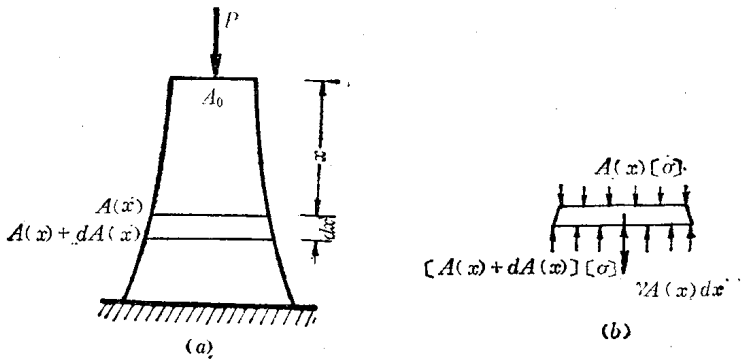


图 1-5

【例 3】皮带轮摩擦力的确定

图1-6 (a) 表示一皮带轮在皮带拉力 T_1 与 T_2 及转矩 M 作用下，处于极限平衡状态。取皮带上微小单元体，其受力如图1-6 (b) 所示；单元体受有：拉力 T 及 $T + dT$ 、正压力 dN 和摩擦力 $F = f dN$ (f 为摩擦系数)。

取

$$\Sigma x = 0$$

$$(T + dT) \cos \frac{d\theta}{2} - f dN - T \cos \frac{d\theta}{2} = 0$$

或

$$dT \cos \frac{d\theta}{2} = f dN$$

由于 $\cos \frac{d\theta}{2} \approx 1$, 得

$$dN = \frac{dT}{f}$$

取

$$\Sigma y = 0$$

$$dN - (T + dT) \sin \frac{d\theta}{2} - T \sin \frac{d\theta}{2} = 0$$

取 $\sin \frac{d\theta}{2} \approx \frac{d\theta}{2}$ 并略去高阶无穷小量得

$$dN = T d\theta$$

将 $dN = \frac{dT}{f}$ 代入得

$$dT = f T d\theta \quad (1-22)$$

此方程为变量可分离的方程。用 T 除两侧有

$$\frac{dT}{T} = f d\theta$$

两边积分, 并整理, 得通解

$$T = C e^{f\theta}$$

代入边界条件 $T|_{\theta=0} = T_1$, 得 $C = T_1$ 因此, 方程 (1-22) 的特解为

$$T = T_1 e^{f\theta} \quad (1-23)$$

欲求 T_2 之值, 可将 $\theta = \beta$ 、 $T = T_2$ 代入得

$$T_2 = T_1 e^{f\beta}$$

例如, f 取 0.3, β 取 2π , 可得到绕轮一圈后二拉力之间的关系为

$$T_2 = e^{0.3 \times 2\pi} T_1 = 6.58 T_1$$

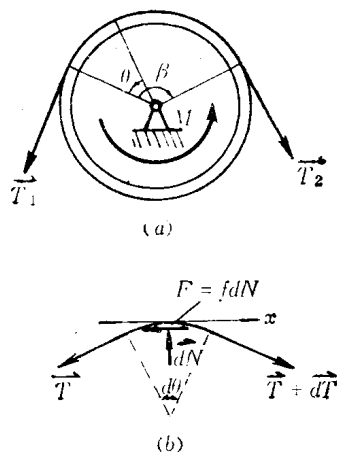


图 1-6

二、一阶线性微分方程 厚壁筒的受力分析

研究如下方程

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x) \quad (1-24)$$

由于此方程中所含未知函数及其导数均为线性的, 故称一阶线性微分方程。一般说来, 此方程不属于变量可分离的方程。但若 $q(x)$ 为零, 则方程

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0 \quad (1-25)$$

显然属于变量可分离的方程。在数学上这种方程称为一阶线性齐次微分方程, 而相应的方程 (1-24) 称为一阶线性非齐次微分方程。利用分离变量法不难求得齐次方程 (1-25) 的通解为

$$y = C \cdot e^{-\int p(x) dx} \quad (1-26)$$

齐次方程的通解既然得出, 以此为基础, 进一步可求解非齐次方程。为了求得非齐次方程的通解, 可采取“常数变易法”。式(1-26)中的 C 本来是任意常量, 现将其取做自变量 x 的未知函数, 并设

$$y = C(x)e^{-\int p(x) dx}$$

为非齐次方程的通解, 代入(1-24)式, 得

$$C'(x)e^{-\int p(x) dx} + C(x)e^{-\int p(x) dx} [-p(x)] + p(x)C(x)e^{-\int p(x) dx} = q(x)$$

化简为

$$C'(x) = q(x)e^{\int p(x) dx}$$

两侧积分, 有

$$C(x) = \int q(x)e^{\int p(x) dx} dx + C_1$$

$C(x)$ 既然求得, 可将其代入 $y = C(x)e^{-\int p(x) dx}$ 式中, 得非齐次微分方程(1-24)的通解表达式为

$$y = \left[\int q(x)e^{\int p(x) dx} dx + C_1 \right] e^{-\int p(x) dx} \quad (1-27)$$

【例 1】 求 $x^2 dy + (2xy - x + 1)dx = 0$, 并满足条件 $y|_{x=1} = 0$ 的特解。

将方程化为

$$\frac{dy}{dx} + \frac{2}{x}y = \frac{x-1}{x^2}$$

此方程显然属于一阶线性非齐次微分方程。为了利用公式(1-27), 只要令 $p(x) = \frac{2}{x}$,

$q(x) = \frac{x-1}{x^2}$ 代入即可得本方程的通解

$$\begin{aligned} y &= \left[\int \frac{x-1}{x^2} e^{\int \frac{2}{x} dx} dx + C_1 \right] e^{-\int \frac{2}{x} dx} = \left[\int \frac{x-1}{x^2} x^2 dx + C_1 \right] \frac{1}{x^2} \\ &= \left(\frac{x^2}{2} - x + C_1 \right) \cdot \frac{1}{x^2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{x} + \frac{C_1}{x^2} \end{aligned}$$

通解求得后, 将条件 $y|_{x=1} = 0$ 代入, 得 $C_1 = -\frac{1}{2}$, 最后得特解为

$$y = \frac{1}{2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2}$$

【例 2】 求 $\frac{dy}{dx} - y \operatorname{ctg} x = 2x \sin x$ 的通解。

因为

$$\begin{aligned} \int p(x) dx &= - \int \operatorname{ctg} x dx = - \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = - \ln \sin x \\ e^{-\int p(x) dx} &= e^{\ln \sin x} = \sin x \\ e^{\int p(x) dx} &= \frac{1}{\sin x} \end{aligned}$$

所以通解为

$$y = \left[\int 2x \sin x \frac{1}{\sin x} dx + C_1 \right] \sin x = [x^2 + C_1] \sin x$$

【例 3】 厚壁筒在均匀内压力作用下应力的分布

图1-7 (a) 表示一厚壁筒受均匀内压力 p 作用。由于结构的轴对称性，且荷载也是轴对称，同时又没有特殊的位移约束。因此，可断定内力与位移也必然为轴对称。取极坐标，则切向应力 σ_t 与径向应力 σ_r 都将是 r 的未知函数，而与 θ 无关。

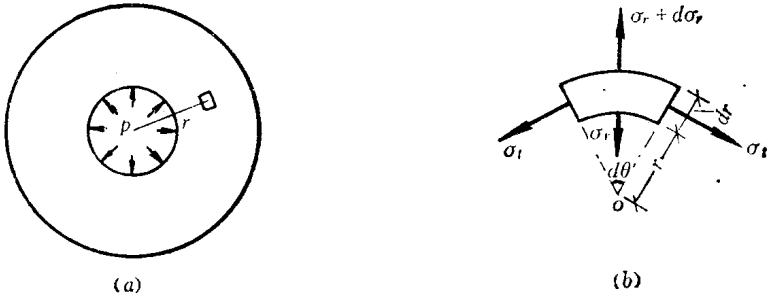


图 1-7

1) 单元体的平衡方程

自厚壁筒中取出厚度为 1 的单元体 (图1-7b) 列出沿 r 方向的平衡方程

$$\Sigma r = 0$$

$$(\sigma_r + d\sigma_r)(r + dr)d\theta - \sigma_r d\theta \cdot r - 2\sigma_t dr \sin \frac{d\theta}{2} = 0$$

化简后略去高阶无穷小量，得

$$\frac{d\sigma_r}{dr} \cdot r + \sigma_r - \sigma_t = 0$$

或

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_t}{r} = 0 \quad (1-28)$$

此方程中含有两个未知函数，不能求解。这在力学中属于静不定问题，尚须寻找 σ_r 与 σ_t 的另外关系式

2) 单元体的变形协调关系

在弹性力学问题中，由于把物体看做完全弹性体，而且服从虎克定律，因此可以根据虎克定律建立起 σ_r 及 σ_t 的关系方程 (或称广义虎克定律)

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_r &= \frac{1}{E} (\sigma_r - \mu \sigma_t) \\ \epsilon_t &= \frac{1}{E} (\sigma_t - \mu \sigma_r) \end{aligned} \right\} \quad (1-29)$$

式中 ϵ_r 为沿 r 方向的应变； ϵ_t 为沿 t 方向的应变； E 为弹性模量； μ 为泊桑比。

式 (1-29) 虽然提供了 σ_r 与 σ_t 的关系，但这两个表达式是用 ϵ_r 与 ϵ_t 相连系的，为了得到 σ_r 与 σ_t 的直接关系，必须在式 (1-29) 中消去 ϵ_r 与 ϵ_t 。为此还须找出 ϵ_r 与 ϵ_t 的相互关系，即在弹性力学中称为变形协调的关系。

弹性力学表明，应变 ϵ_r 与 ϵ_t 是与位移有关的。由于轴对称，因此筒壁上各点只发生沿

r 方向的位移 u (见图1-8)。根据 ε_r 与 ε_t 的定义有:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_t &= \frac{(r+u)d\theta - rd\theta}{rd\theta} = \frac{u}{r} \\ \varepsilon_r &= \frac{u+du+dr-u-dr}{dr} = \frac{du}{dr} \end{aligned} \right\} \quad (1-30)$$

微分第一式并将第二式代入得

$$\frac{d\varepsilon_t}{dr} - \frac{1}{r}(\varepsilon_r - \varepsilon_t) = 0 \quad (1-31)$$

此式称为变形协调方程。

3) 微分方程的建立与求解

将式(1-29)代入式(1-31), 化简后得

$$\frac{d\sigma_t}{dr} - \frac{\sigma_r - \sigma_t}{r} = \mu \left(\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_t}{r} \right)$$

利用式(1-28)有

$$\frac{d\sigma_t}{dr} - \frac{\sigma_r - \sigma_t}{r} = 0 \quad (1-32)$$

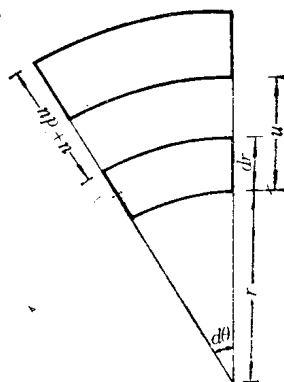


图 1-8

将式(1-32)与(1-28)联立得厚壁筒应力 σ_r 与 σ_t 的微分方程组

$$\begin{cases} \frac{d\sigma_t}{dr} - \frac{\sigma_r - \sigma_t}{r} = 0 \\ \frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_t}{r} = 0 \end{cases} \quad (1-33)$$

将此二式相加, 得

$$\frac{d(\sigma_t + \sigma_r)}{dr} = 0$$

此式表明 $(\sigma_t + \sigma_r)$ 是常量, 设此常量为 $2A$, 则有

$$\sigma_t = 2A - \sigma_r$$

代回式(1-33), 得到只含 σ_r 的微分方程

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{2}{r} \sigma_r = \frac{2A}{r} \quad (1-34) \textcircled{1}$$

此方程恰好是一阶线性非齐次微分方程。利用公式(1-27), 得通解

$$\sigma_r = \left[\int \frac{2A}{r} e^{\int \frac{2}{r} dr} dr + B \right] e^{-\int \frac{2}{r} dr}$$

积分后可求得

$$\begin{cases} \sigma_r = A + \frac{B}{r^2} \\ \sigma_t = A - \frac{B}{r^2} \end{cases} \quad (1-35)$$

为了阐明应力与外荷载的关系, 尚须求满足边界条件的特解。

将应力边界条件

① 此方程也属于变量可分离的方程。

$$\begin{cases} r = a & (a \text{ 为厚壁筒内半径}) \\ \sigma_r = -p \\ r = b & (b \text{ 为厚壁筒外半径}) \\ \sigma_r = 0 \end{cases}$$

代入方程 (1-35), 得

$$\begin{cases} A + \frac{B}{a^2} = -p \\ A + \frac{B}{b^2} = 0 \end{cases}$$

联立解出

$$\begin{cases} A = \frac{a^2}{b^2 - a^2} p \\ B = \frac{-a^2 b^2}{b^2 - a^2} p \end{cases}$$

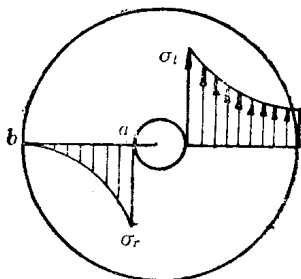


图 1-9

代回式 (1-35), 最终得

$$\begin{cases} \sigma_r = \frac{pa^2}{b^2 - a^2} \left(1 - \frac{b^2}{r^2} \right) \\ \sigma_t = \frac{pa^2}{b^2 - a^2} \left(1 + \frac{b^2}{r^2} \right) \end{cases} \quad (1-36)$$

其应力分布如图1-9所示, σ_t 最大应力在内边缘

$$\sigma_{t(r=a)} = p \frac{b^2 + a^2}{b^2 - a^2} \quad (1-37)$$

最小在外边缘

$$\sigma_{t(r=b)} = p \frac{2a^2}{b^2 - a^2}$$

σ_r 的分布, 内边缘 $\sigma_{r(r=a)} = -p$, 外边缘 $\sigma_{r(r=b)} = 0$ 。

至此, 厚壁筒在内压力作用下的应力分布问题已基本得到解决。在结束本例之前, 准备从数学角度对工程中厚壁筒与薄壁筒的分界作一些说明。

4) 薄壁筒与厚壁筒的划分

工程中规定, 外径与内径之比大于1.1的为厚壁筒, 小于1.1的为薄壁筒; 也就是说, 以

$$\frac{D}{d} = 1.1$$

为分界线。其中 D 为外径, d 为内径。属于厚壁筒的, 其应力计算采用式 (1-36); 属于薄壁筒的, 其应力公式本来也应采用式 (1-36), 但为了使计算简化一般经常采用材料力学所给出的公式, 即

$$\sigma_t = \frac{pd}{2t} \quad (1-38)$$

式中 p 仍为筒的内压力; d 为筒的内径; t 为筒壁厚度。(1-38)式不显含 r , 说明薄壁筒中 σ_t 沿厚度是均匀分布的, 同时一般不考虑 σ_r 的存在, 因其量值与 σ_t 相比可略去不计。

由于薄壁筒的公式比较粗略, 因此随着厚度的增长该公式的误差会越来越大, 这样就必须规定出薄壁筒公式的适用范围, 这个范围就是上面提到的 $D/d = 1.1$, 但是规定1.1的