P. 亨利西

差分方法的误差传播

科学出版社

PETER HENRICI

ERROR PROPAGATION FOR DIFFERENCE METHODS

Wiley 1963

内 容 提 要

本书是计算数学方面的一本参考书，书中提供了用线性多步方法于微分方程组，是微分方程数值解方面工作的很好的推广.

本书从基本概念叙述起，然后依次介绍了线性多步方法族以及如何把它应用于所讨论的族中的问题；微分方程在弱假设下，多步方法的收敛性的充要条件；对小步长离散化误差的渐近行为进行细致的分析；最后是讨论舍入误差的影响.

差分方法的误差传播

P. 亨利西 著

吳 文 达 译

*

科学出版社出版

北京朝阳門内大街 137 号

北京市书刊出版业营业許可証出字第061号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1966年6月第一版	开本：850×1168 1/32
1966年6月第一次印刷	印张：2 3/8
印数：0001—3,400	字数：60,000

统一书号：13031·2310

本社书号：3498·13—1

定价：[科七] 0.44 元

序

这本书是我的前一本标题为“常微分方程的离散变数方法 (Discrete Variable Methods in Ordinary Differential Equations)[1]” (Wiley, 1962)的书的续篇和姊妹篇．微分方程的数值积分中的误差传播，在前一本书中也已进行了广泛的研究．然而，就微分方程组而论，那本书里的处理只限于一步方法．现在，对于方程组的积分，用多步方法呈示了相似的结果，我希望这样会使误差传播的理论终于表现为一个圆满的整体．

在目前的场合对于目前的作者说来，由一维到多维的这一步骤并非只是一个容易作的推广的练习．有许多新的困难需要克服，但是也由此获得了新的意料之外的特点和结果，特别在应用部分中就是这样．这里所作的处理在本质上与一维情形的处理无关．另一方面，把结果推广到 Banach 空间中的微分方程倒可能会是比较容易的．为了避免无目的的推广，我宁可把结果以一种最宜于应用的形式提出来．

这里所包含的结果中有一部分曾在 1961 年计算机协会 (Association of Computing Machinery) 的年会上发表过，并被邀请在 1961 年美国数学协会年会上和在 1962 年斯德哥尔摩国际数学会议上报告过．

（下略）

Peter Henrici

1963 年 4 月

瑞士，苏黎世

1) 此书的中译本将由上海科学技术出版社出版．

目　　录

第一章 引 言

在计算机时代以前，数值分析——有时也称为实用分析——作为数学的一个分支，与纯粹数学家们所研究的数学分析，只有不多的几个交叉点. 证明一个数学对象(例如某个泛函方程的解)的存在性，与给出这个对象(例如构造解的数值表)，是完全不同的两件事情. 即使存在性是用构造性的方法证明的，但是由这种构造性存在证明所造成的计算上的要求，通常是太繁重以致不能实际应用. 从而，只要涉及到数值解，重点就放到那些许可有这种或那种形式的显式解的问题上. 如果不可能提供这样一个解，那就只好极勉強地求助于纯粹的数值技术，并且对于这些方法的严格的数学研究的推动力也很小.

数字电子计算机问世之后，这种情况有了根本的改变. 古典分析中许多构造性技术，根据原先的设想主要是作为证明定理的工具，现在可以运用自如并给出数值答案. 因此对于这种普遍的构造性算法的兴趣再度升起了，并且还可以不很过分地说，数值分析现今是——或者无论如何不久将发展成——分析中构造性算法的细致的研究；同时，计算的执行者，对于一给定算法的构造性的程度，逐渐拥有一种敏锐的感觉，这种感觉在某些方面比体会到的还要敏锐些. 某个数学对象之存在究竟是只建立在选择公理的基础上，还是借助于 Arzela 定理，或者作为一个其元素能有理地构造出来的 Cauchy 序列的极限，诸如此类，对他们来说都是有差别的.

上述某些点可用常微分方程作很好的说明. 除了电子计算机所起的推动外，现代技术的需要也促进了数值地构造常微分方程解的理论和实践，外层空间的探索只不过是一个最显著的例子. 空间技术如果沒有解常微分方程的有效方法，就如同一座现代城

市沒有汽车那样不可想象.

常微分方程的数值解的研究，不同于数值分析的其它分支，它得益于受到线性的和非线性的常微分方程理论方面充分发展了的知识之支持. 所以，对于解常微分方程初值问题的一大族算法——所谓线性多步方法——有可能发展成比较完整的理论，这一点是不奇怪的. 在前一本书中(“常微分方程的离散方法”，Wiley, 1962)，作者对于这些方法的某些方面，根据 Dahlquist [1956, 1959]的先驱工作，已经广泛地加以论述. 然而这种论述仍然是不完全的，因为它只考虑了单个的常微分方程，而沒有考虑常微分方程组. 然而，在实践中碰到的，主要就是这些常微分方程组. 这本书就是想弥补这个缺陷. 在把线性多步方法理论向方程组的推广中，我们相信能够澄清这些问题，并在某些地方可以改进早先的处理.

现将本书內容的简短大纲，结合某些历史说明叙述如下.

在第二章中我们从规定以后要考虑的一族常微分方程组开始(§ 2.1). 粗略地说来，它就是满足一致的 Lipschitz 条件的微分方程族. 对于这一族，唯一解的存在性问题，一般地说是无关紧要的. 在讲述差分方程的一短节之后(§ 2.2)，我们规定线性多步方法的族 (§ 2.3)，并表明总可把它应用于所讨论的族中的问题(§2.4). 然后规定我们所谓的初始程序(§ 2.5)意指什么，并且引进离散化误差和舍入误差概念(§ 2.6).

第三章的重点是在微分方程的弱假设下的多步方法的收斂性的充分和必要条件. 我们从规定方法的稳定性，相容性和收斂性等基本概念，以及陈述基本结果(定理 3.1)——即稳定性和相容性合在一起是收斂性的充分和必要条件——来开始(§ 3.1). 这个结果可以看成为 Lax 和 Richtmyer [1956] 对于线性 (但除线性条件外是一般的) 初值问题所证明的结果的非线性模拟. 在稳定性和收斂性的定义略有不同的情况下，并且对于特定的一族问题来说，Dahlquist [1956] 及 Hull 和 Luxemburg [1960] 曾经给出与定理 3.1 类似的结果. 为了证明定理 3.1，首先我们需要一个比

较复杂然而有用的引理(§ 3.2)(在以后几章中也要用到)，而且还需要稳定性(§ 3.3)和相容性(§ 3.4)条件的纯粹代数表述式. 有了这些工具，证明定理 3.1 就成为一件简单的事情了(§ 3.5). 最后我们考虑：如果相容性条件只是部分地满足，将会发生些什么情况(§ 3.6). 下一章需要这个结果.

在第四章我们对小步长的离散化误差的渐近行为进行细致的分析(如果微分方程的准确解充分光滑). 第一个结果是离散化误差的大小的阶(§ 4.1). 在 § 4.2 定理 4.2 里,对于误差给出精确的渐近公式. 有关特殊的积分方法方面，先前 Brodskii [1953], Lotkin [1954] 及 Gray [1955] 已经给出过这种公式. 渐近公式的证明占了两长节(§ 4.3, § 4.4). 然后对于线性常微分方程组推广了定理 4.2 (§ 4.5)，并用它说明积分这种线性方程组的某些方法的一个有趣的自稳定性质(§ 4.6).

第五章讨论舍入误差的影响. 在给出了局部舍入误差对于积累误差的影响的大小的阶的粗糙的估计之后(§ 5.1)我们区分了原初误差和次级误差(§ 5.2)，并且对于比较重要的原初误差给出了线性化公式(§ 5.3). 这个公式对于舍入误差的统计理论(它是建立在局部舍入误差是独立的随机向量，其期望值和相关矩阵都是已知的这一假定之上的)，是主要工具(§ 5.4). 在这些假设下，我们可以计算积累原初误差的期望值和相关矩阵(§ 5.5). 不需说明，这一章的结果也可应用于不是由于舍入所引起的其他小的随机摄动.

在与 J. Riley 和 Harley Stafford 合写的一个附录中,将第四章和第五章的结果应用于积分两个简单的模型问题，每一个都涉及积分四个联立方程. 这些问题之一涉及一个线性方程组；另一个是二体问题的特殊情形，涉及一个非线性方程组. 这里的主要特点是：虽然两个问题的解是同样的,但在这两种情形,误差传播的式样却十分不同；而且在非线性问题中,对于不同的积分方法，误差传播的式样也不同. 这些意外的结果为总结在附录末的试验性计算所证实.

我们以这里所提出的理论的运用范围的两点说明，作为引言的结束.

在第四章和第五章中给出的渐近结果，可以在以下基础上加以评论，即它们主要讨论的是步长趋向于零时误差的渐近行为.当然，在实践中大部分积分都是只以确定的步长进行一次(虽然它可能作为位置的函数而有所变动). 然而，通常总是认为：如果步长小到足以给出一个准确的解，那么它也小到足以使得渐近公式给出误差大小的一个正确标志. 某些新近的出版物讨论用固定的、非零步长的积分，这似乎在相反方向上犯了错误. 他们只注意稳定性，而完全忽视了准确性这个基本要求.

然而有一种情况确实存在，在这种情况下，不仅这里所提出的理论，而且还有所讨论的方法本身，都是不适宜的. 在实践中提出的某些常微分方程组，特别是控制理论中所提出的，虽然它们在数学上是稳定的，但是有一个大得不正常的 Lipschitz 常数. 这里，如果要使渐近理论的结果能够应用，就不得不把步长选得如此之小，以致数值积分不能实行. 在这种情况下，对于数值积分就确实需要有一种根本不同的处理途径，这种处理途径要能够自动地消去那些高度振荡不定的、但另方面又是不重要的部分. 可以设想，Fourier 积分论是这种处理途径的一把钥匙.

第二章 基本概念

2.1. 定义：微分方程

设 $I=[a, b]$，其中 $-\infty<a<b<\infty$，为有限闭区间．设 K_N 为N维复 Euclid 空间．为了便于阅读，我们将用通常的小写斜体罗马字母，例如 $t, s, \cdots$，表示 I 的点，而用黑体罗马或希腊字母，例如 $\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}, \mathbf{f}, \mathbf{g}, \cdots$ 表示 K_N 的点(或者在 K_N 内取值的函数)．点 $\mathbf{x}\in K_N$ 的坐标记成 $x^1, x^2, \cdots, x^N$．令

$$\|\mathbf{x}\|=|x^1|+|x^2|+\cdots+|x^N|.$$

我们称为L函数的是有如下性质的从 $I\times K_N$ 到 K_N 的连续函数 $\mathbf{f}$：对于 $t\in I$ 和 $\mathbf{x}\in K_N$，$\mathbf{f}$ 在 $(t, \mathbf{x})$ 的值记成 $\mathbf{f}(t, \mathbf{x})$，我们要求 $\mathbf{f}$ 对于第二个变元是均匀 Lipschitz 的，即有一个常数 L 存在(称为 $\mathbf{f}$ 的 Lipschitz 常数)，使得对于一切 $t\in I$, $\mathbf{x}\in K_N$, $\mathbf{z}\in K_N$，都有

$$\|\mathbf{f}(t, \mathbf{x})-\mathbf{f}(t, \mathbf{z})\|\leqslant L\|\mathbf{x}-\mathbf{z}\|.$$

如果 $\mathbf{f}$ 是一个L函数，初值问题

$$\mathbf{x}'=\mathbf{f}(t, \mathbf{x})\qquad\left({}'=\frac{d}{dt}\right)\tag{2-1a}$$

$$\mathbf{x}(a)=\mathbf{s}\tag{2-1b}$$

在 I 上对于一切 $\mathbf{s}\in K_N$ 都有唯一解．这个解我们常常记成 $\mathbf{x}$．严格说来，函数 $\mathbf{x}$ 是从 $I\times K_N$ 到 K_N 的，然而并无必要明显地表示出它依赖于 $\mathbf{s}$．因此，对于 $t\in I$，记号 $\mathbf{x}(t)$，表示对于某个默认的初值 $\mathbf{s}$, $\mathbf{x}$ 在 t 的值．

2.2. 定义：差分方程

本书讨论的主要问题是用某些差分方程的解来逼近(2-1a)的

解 $\mathbf{x}$. 由于差分方程的基本定义及惯用符号不如微分方程的定义与符号那么为人周知,所以,这里提供一个简短的说明. k 阶差分方程应理解为下述问题:给定的是一个函数 $\mathbf{F}$, 它从相邻整数的一个集合 J 及从 K_N 的子集合 S 本身的 $k+1$ 重 Cartesian 乘积,到K_N[$\mathbf{F}$ 在点 $(n, \mathbf{z}_0, \mathbf{z}_1, \cdots, \mathbf{z}_k)$ 的值记成 $\mathbf{F}_n(\mathbf{z}_0, \mathbf{z}_1, \cdots, \mathbf{z}_k)$]. 问题是要寻求一个向量序列 $\mathbf{X}$, 其元素记成 $\mathbf{X}_n$, 使得

(i) 对于 $n\in J$, 向量 $\mathbf{X}_n, \mathbf{X}_{n+1}, \cdots, \mathbf{X}_{n+k}$ 是有定义的并属于 S;

(ii) 对于一切 $n\in J$,

$$\mathbf{F}_n(\mathbf{X}_n, \mathbf{X}_{n+1}, \cdots, \mathbf{X}_{n+k})=\mathbf{0}. \tag{2-2}$$

满足条件(i)和(ii)的序列 $\mathbf{X}$, 就叫做差分方程(2-2)的解.

2.3. 定义:多步方法

本书专门讨论求初值问题(2-1)的数值解的一族特殊算法,即所谓线性多步方法. 线性多步方法 (ρ, σ) 完全由两个满足下述条件的复系数多项式 ρ 和 σ 所决定:

(i) ρ 不是零多项式;

(ii) ρ 的次数至少等于 σ 的次数.

ρ 的次数叫做方法的步数,今后将常常记成 k. 为了描述方法 (ρ, σ)对于特定的初值问题(2-1)的应用, 对于 $h>0$ 和 $n=0, 1, 2, \cdots$, 令 $t_n=a+nh$, 并令 J_h 表示一切非负整数 n 的集合, 使得对于 $i=0, 1, \cdots, k$, $t_{n+i}\in[a, b]$. 如果多项式 ρ 和 σ 为

$$\rho(z)=\alpha_k z^k+\alpha_{k-1}z^{k-1}+\cdots+\alpha_0 \qquad (\alpha_k\neq 0),$$
$$\sigma(z)=\beta_k z^k+\beta_{k-1}z^{k-1}+\cdots+\beta_0,$$

那么方法 (ρ, σ) 就是求差分方程(2-2)的依赖于正参数 h 的解,其中 $J=J_h$ 且

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_n(\mathbf{z}_0, \mathbf{z}_1, \cdots, \mathbf{z}_k; h)&=\alpha_k\mathbf{z}_k+\alpha_{k-1}\mathbf{z}_{k-1}+\cdots+\alpha_0\mathbf{z}_0\\&\quad-h\{\beta_k\mathbf{f}(t_{n+k}, \mathbf{z}_k)+\cdots+\beta_0\mathbf{f}(t_n, \mathbf{z}_0)\}.\end{aligned} \tag{2-3}$$

根据 § 2.2 的定义,这个差分方程的解是对于 $n\in J_h$ 有定义的向量 $\mathbf{X}_n$ 的序列 $\mathbf{X}$, 并满足方程[叫做(2-1a)的逼近差分方程]

$$
\begin{aligned}
&\alpha_k \mathbf{X}_{n+k} + \cdots + \alpha_0 \mathbf{X}_n - h\{\beta_k \mathbf{f}(t_{n+k}, \mathbf{X}_{n+k}) \\
&\qquad + \cdots + \beta_0 \mathbf{f}(t_n, \mathbf{X}_n)\} = \mathbf{0} \qquad (n \in J_h).
\end{aligned} \tag{2-4}
$$

显然,这个差分方程的任何解一般说来都依赖于参数 h(叫做多步方法的**步长**). 事实上, 在这个讨论中将着重于(2-4)的解 $\mathbf{X}$(或其近似解,见第五章)的元素 $\mathbf{X}_n$ 的渐近行为,当同时 $h \to 0$ 和 $n \to \infty$ 并服从如下方式的时候, 即 $t_n = a + nh$ 在区间 I 上保持不动时. 如有必要,按步长 h 得到的 $\mathbf{X}_n$ 的值将记成 $\mathbf{X}_n(h)$.

有些(2-4)型的差分方程, 是明确地构造初值问题(2-1)的解的近似的高度有效工具, 并且在实践中被广泛地采用. 在最著名的(ρ, σ)方法中有如下几种:

(i) Adams-Bashforth **方法**. 这里

$$
\rho(z) = z^k - z^{k-1},
$$

$$
\sigma(z) = z^{k-1} \sum_{m=0}^{k-1} \gamma_m (1 - z^{-1})^m
$$

$(k = 1, 2, \cdots)$, 其中

$$
\sum_{m=0}^{\infty} \gamma_m t^m = -\frac{t}{(1-t)\log(1-t)}.
$$

特殊情形 $k = 1$, 其中

$$
\rho(z) = z - 1, \qquad \sigma(z) = 1,
$$

就称为 Euler **方法**.

(ii) Adams-Moulton **方法**为

$$
\rho(z) = z^k - z^{k-1},
$$

$$
\sigma(z) = z^k \sum_{m=0}^{k} \gamma_m^* (1 - z^{-1})^m
$$

$(k = 1, 2, \cdots)$,其中

$$
\sum_{m=0}^{\infty} \gamma_m^* t^m = -\frac{t}{\log(1-t)}.
$$

特殊情形 $k = 1$,

$$
\rho(z) = z - 1, \qquad \sigma(z) = \frac{1}{2}(z + 1),
$$

就称为梯形法则.

(iii) Nyström 方法为

$$\rho(z)=z^k-z^{k-2},$$

$$\sigma(z)=z^{k-1}\sum_{m=0}^{k-1}\kappa_m(1-z^{-1})^m$$

$(k=2,3,\cdots)$, 其中

$$\sum_{m=0}^{\infty}\kappa_m t^m=-\frac{t}{\log(1-t)}\frac{2-t}{1-t}.$$

$k=2$ 的情形,

$$\rho(z)=z^2-1,\qquad \sigma(z)=2z,$$

就称为中点法则.

(iv) 另一族线性多步方法为

$$\rho(z)=z^k-z^{k-2},$$

$$\sigma(z)=z^k\sum_{m=0}^{k}\kappa_m^*(1-z^{-1})^m$$

$(k=2,3,\cdots)$, 其中

$$\sum_{m=0}^{\infty}\kappa_m^* t^m=-\frac{t(2-t)}{\log(1-t)}.$$

特殊情形 $k=2$ 为

$$\rho(z)=z^2-1,\qquad \sigma(z)=\frac{1}{3}(z^2+4z+1),$$

就称为 Milne 方法.

导出上述公式的原因,计算性的注释以及另一些方法,读者可查阅 Henrici [1962] 第五章.

2.4. 逼近差分方程初值问题的唯一解的存在性

我们将证明, 如果 h 充分小, 差分方程(2-4)的初值问题总有唯一解.

定理 2.1. 设 $0\leqslant h<|\alpha_k\beta_k^{-1}L^{-1}|=h_0$, 其中 L 表示 $\mathbf{f}$ 的 Lipschitz 常数; 设 $\mathbf{S}_0,\mathbf{S}_1,\cdots,\mathbf{S}_{k-1}$ 为 K_N 中 k 个任意的点,则差

分方程(2-4)在 J_h 上有唯一解 $\mathbf{X}$，且

$$\mathbf{X}_i = \mathbf{S}_i \qquad (i = 0, 1, \cdots, k-1). \tag{2-5}$$

证. 假定在集合 $(0, 1, \cdots, n+k-1)$ 上已求出(2-4)的适合(2-5)的部分解 $\mathbf{X}$，则如 $n+k \in J_h$，(2-4)就表示关于 $\mathbf{X}_{n+k}$ 的一个方程，而这个方程可以写成如下形状：

$$\mathbf{X}_{n+k} = \boldsymbol{\phi}(\mathbf{X}_{n+k}), \tag{2-6}$$

其中

$$\boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}) = \frac{h\beta_k}{\alpha_k}\mathbf{f}(t_{n+k}, \mathbf{x}) + \mathbf{c},$$

这里 $\mathbf{c}$ 为某一常向量. 由于 Lipschitz 条件，如 $\mathbf{x} \in K_N$，$\mathbf{z} \in K_N$，则

$$\|\boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}) - \boldsymbol{\phi}(\mathbf{z})\| \leqslant \left|\frac{h\beta_k}{\alpha_k}\right| \|\mathbf{f}(t_{n+k}, \mathbf{x}) - \mathbf{f}(t_{n+k}, \mathbf{z})\| \leqslant K\|\mathbf{x} - \mathbf{z}\|,$$

其中 $|K| = |h\beta_k L/\alpha_k| < 1$. 于是 $\mathbf{x} \to \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x})$ 是一个压缩映射. 因为 $\boldsymbol{\phi}$ 定义在整个 K_N 上，所以根据一个古典定理(例如见 Collatz [1960]，38 页)，方程(2-6)有唯一解. 从而(2-4)的任何部分解 $\mathbf{X}$ 可延拓到整个 J_h 集合上. 此延拓是唯一的. 如设 $\mathbf{X}$ 和 $\mathbf{Z}$ 表示两个不恒等的解，m 为 $\mathbf{X}_m \neq \mathbf{Z}_m$ 的最小整数. 因为 $\mathbf{X}_m$ 和 $\mathbf{Z}_m$ 都必须适合方程(2-6)，所以这种 m 存在的假定立即导致矛盾.

2.5. 定义：初始处理

定理 2.1 表明，如果 h 充分小，对于初始向量 $\mathbf{X}_0, \mathbf{X}_1, \cdots, \mathbf{X}_{k-1}$ 的任意集合，方法 (ρ, σ) 将给出唯一确定的序列 $\mathbf{X}$. 然而，方法本身并未说明如何寻求这些初始向量. 它必须用一个初始处理 Σ 来补充. 所谓初始处理，我们意指对于充分小的 $h > 0$ 都确定的任何 k 个向量函数 $\mathbf{S}_0(h), \mathbf{S}_1(h), \cdots, \mathbf{S}_{k-1}(h)$ 的集合. 从而初始算法就是令

$$\mathbf{X}_m = \mathbf{S}_m(h) \qquad (m = 0, 1, \cdots, k-1).$$

在实践中，初始处理通常通过令 $\mathbf{X}_0 = \mathbf{s}$(连续问题的已知初值向

量)以及用某个一步方法（例如 Runge-Kutta 方法)计算 $\mathbf{X}_1, \cdots,$ $\mathbf{X}_{k-1}$ 来实现.

正如微分方程(2-1a)可看成为把每个初值向量 $\mathbf{s}$ 映射成连续问题的解 $\mathbf{x}$ 的算子那样，方法 (ρ, σ) 可看成把每个初始处理映射成差分方程(2-4)的一族解 $\mathbf{X}(h)$ 的(同样非线性的)算子.

为了今后引用，我们引入下述两个定义. 一个初始处理叫做是**有界的**,如果存在一个常数 M，使得对于 $m=0, 1, \cdots, k-1$ 和一切充分小的 h,

$$\|\mathbf{S}_m(h)\| \leqslant M.$$

初始处理叫做与给定的初值问题(2-1)是**配合的**,如果对 $m=0,1,\cdots, k-1$,

$$\lim_{h\to 0}\mathbf{S}_m(h) = \mathbf{s}.$$

2.6. 定 义: 误 差

我们主要讨论由方法 (ρ, σ) 和初始处理 Σ 确定的逼近的误差,特别是当步长 h 趋于零时误差的行为. 实际上,有两种类型的误差必须考虑. 第一种是由

$$\mathbf{E}_n = \mathbf{X}_n - \mathbf{x}(t_n) \qquad (t_n \in I)$$

定义的**离散化误差** $\mathbf{E}$. 这个误差为给定的初值问题、初始处理 Σ、方法 (ρ, σ) 和步长 h 唯一确定. 另一种误差也是一种离散化误差,不过不是从离散化区间引起的,而是由离散化数系引起的. 如果上述算法在(非理想的)计算机上实现，它将给出某些向量 $\tilde{\mathbf{X}}_n$，其分量为形状异常特殊的有理数，而不是给出向量 $\mathbf{X}_n$，其分量由 Dedekind 分割所定义. 差

$$\mathbf{r}_n = \tilde{\mathbf{X}}_n - \mathbf{X}_n$$

叫做**舍入误差**；显然,它不仅依赖于方法和微分方程,而且还依赖于所用的计算机,进行算术运算的次序以及程序设计的其它细节.

第三章　稳定性，相容性和收敛性

3.1. 定义；主要结果

我们从为了表述这一章的主要结果（定理 3.1）所必要的三个定义叙述起.

第一个定义关于方法 (ρ, σ) 的稳定性. 粗略地说，方法叫做稳定的，如果当 $h \to 0$ 时任何有界初始处理(其定义见 § 2.5)总导致差分方程(2-4)的均匀有界解. 更明确地说，我们把一个方法叫做稳定的，如果对于一切 L 函数 $\mathbf{f}$，下述陈述成立：设 $\mathbf{S}_0, \mathbf{S}_1, \cdots, \mathbf{S}_{k-1}$ 为从区间 $(0, h_0)$ 到 K_N 的 k 个函数（其中 h_0 在定理 2.1 中给定），且对于某个常数 M，

$$\|\mathbf{S}_i(h)\| \leqslant M \qquad (0 < h < h_0, i = 0, 1, \cdots, k-1). \quad (3-1)$$

设对于每个 $h \in (0, h_0)$，$\mathbf{X}(h)$ 为差分方程(2-4)的解，其初值为

$$\mathbf{X}_i = \mathbf{S}_i(h) \qquad (i = 0, 1, \cdots, k-1) \qquad (3-2)$$

（根据定理 2.1，这些解确实存在）. 则这族解当 $h \to 0$ 时一致有界，即存在常数 M'（它可能依赖于 M），使得

$$\max_{n \in J_h} \|\mathbf{X}_n(h)\| \leqslant M' \qquad (0 < h < h_0). \qquad (3-3)$$

第二个定义关于方法的相容性. 方法叫做相容的，粗略地说，如果用(2-3)定义的函数 $\mathbf{F}$ 当 $\mathbf{z}_i$ 用(2-1a)的解的值代入时就小. 更精确地说，我们把一个方法叫做相容的，如果对于一切 L 函数 $\mathbf{f}$，下述陈述成立：设 $\mathbf{x}$ 为微分方程 $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ 的任一解，设 $\mathbf{F}$ 由(2-3)定义，则当 $h \to 0$ 时

$$\max_{n \in J_h} \|\mathbf{F}_n(\mathbf{x}(t_n), \mathbf{x}(t_{n+1}), \cdots, \mathbf{x}(t_{n+k}); h)\| = o(h). \quad (3-4)$$

第三个定义关于方法的收敛性. 粗略地说，方法叫做收敛的，如果逼近差分方程的解的值 $\mathbf{X}_n$，当 $h \to 0$ 且 $t_n = t$ 时，只要初始

处理是配合的(其定义见 § 2.5)，就收敛于准确解的值 $\mathbf{x}(t)$. 更明确地说，方法 (ρ,σ) 叫做收敛的，如果对于一切 L 函数 $\mathbf{f}$ 和一切 $\mathbf{s}\in K_N$，下述陈述成立：设 $\mathbf{S}_0,\mathbf{S}_1,\cdots,\mathbf{S}_{k-1}$ 为从 $(0,h_0)$ 到 K_N 的 k 个函数，且

$$\lim_{h\to 0}\mathbf{S}_i(h)=\mathbf{s}\qquad(i=0,1,\cdots,k-1);\tag{3-5}$$

设 $\mathbf{X}(h)$ 为差分方程(2-4)的解，其初值为

$$\mathbf{X}_i=\mathbf{S}_i(h)\qquad(i=0,1,\cdots,k-1);$$

设 $\mathbf{x}$ 为初值问题(2-1)的解，则

$$\max_{n\in J_h}\|\mathbf{X}_n-\mathbf{x}(t_n)\|\to 0,\qquad h\to 0.\tag{3-6}$$

用这些定义，这一章的主要结果可叙述如下：

定理 3.1. 方法 (ρ,σ) 是收敛的，当且只当它既是稳定的又是相容的.

定理 3.1 的证明要求关于某些弱非线性差分方程的解的增长的一个引理(§ 3.2). 为了应用这个引理，我们需要稳定性(§ 3.3)和相容性(§ 3.4)的条件的代数表述式. 然后将在 § 3.5 中给出定理 3.1 的证明.

3.2. 一族差分方程的解的增长

设

$$\rho(z)=\alpha_k z^k+\alpha_{k-1}z^{k-1}+\cdots+\alpha_0$$

为复系数多项式，$\alpha_k\neq 0$. 设 $\mathbf{B}^{(i)}(i=0,1,\cdots,k)$ 为定义在$(0,1,2,\cdots,M)$ 上且从 K_N 到 K_N 的函数的 $k+1$ 个给定的序列，而且对于适当的常数 $B^{(i)}\geqslant 0$，对于一切向量 $\mathbf{Y}$，

$$\|\mathbf{B}_n^{(i)}(\mathbf{Y})\|\leqslant B^{(i)}\|\mathbf{Y}\|\quad(i=0,1,2,\cdots,k;\,n=0,1,\cdots,M).\tag{3-7}$$

其次，设 Λ 为定义在 $(0,1,\cdots,M)$ 上的向量序列. 我们求差分方程

$$\begin{aligned}\alpha_k\mathbf{Z}_{m+k}&+\alpha_{k-1}\mathbf{Z}_{m+k-1}+\cdots+\alpha_0\mathbf{Z}_m\\&=h\{\mathbf{B}_m^{(k)}(\mathbf{Z}_{m+k})+\cdots+\mathbf{B}_m^{(0)}(\mathbf{Z}_m)\}+\Lambda_m\end{aligned}\tag{3-8}$$

的解的上界，用初值向量 $\mathbf{Z}_0, \mathbf{Z}_1, \cdots, \mathbf{Z}_{k-1}$ 的诸上界表示之. 下述结果包含着一个这样的上界：

引理 3.2. 设 ω 表示多项式 ρ 的根的最大模. 如果所有模为 ω 的根都是单根，并且

$$|h| < |\alpha_k| B^{(k)^{-1}},$$

那么对于差分方程的每个解 $\mathbf{Z}$，只要对于某个常数 H 满足

$$\|\mathbf{Z}_n\| \leqslant \omega^n H \qquad (n = 0, 1, \cdots, k-1),$$

对于 $n = 0, 1, \cdots, M+k$，不等式

$$\|\mathbf{Z}_n\| \leqslant \omega^n \Gamma^*(AH + \Lambda_n) e^{nh\Gamma^* B} \tag{3-9}$$

就成立，其中

$$\begin{cases} A = k|\alpha_0| + (k-1)\omega|\alpha_1| + \cdots + \omega^{k-1}|\alpha_{k-1}|, \\ B = B^{(0)} + \omega B^{(1)} + \cdots + \omega^k B^{(k)}, \\ \Lambda_n = \begin{cases} 0 & (n = 0, 1, \cdots, k-1), \\ \|\boldsymbol{\Lambda}_0\| + \omega^{-1}\|\boldsymbol{\Lambda}_1\| + \cdots + \omega^{-n+k}\|\boldsymbol{\Lambda}_{n-k}\| & (n = k, k+1, \cdots), \end{cases} \end{cases} \tag{3-10}$$

这里 Γ^* 由下面的(3-15)定义.

如果模为 ω 的根中有重根，则对于任何 $\hat{\omega} > \omega$ 和

$$|h| < |\alpha_k| \hat{\omega}^{-k} B^{(k)^{-1}},$$

对于 $n = 0, 1, 2, \cdots, M+k$ 的不等式

$$\|\mathbf{Z}_n\| \leqslant \hat{\omega}^n \hat{\Gamma}^*(\hat{A}\hat{H} + \hat{\Lambda}_n) e^{nh\hat{\Gamma}^*\hat{B}} \tag{3-11}$$

成立，其中

$$\begin{cases} \hat{A} = (2k+1)\hat{\omega}|\alpha_0| + \\ \qquad + (2k-1)\hat{\omega}^2|\alpha_1| + \cdots + \hat{\omega}^{k+1}|\alpha_k|, \\ \hat{B} = 2\hat{\omega}(B^{(0)} + \hat{\omega}B^{(1)} + \cdots + \hat{\omega}^k B^{(k)}), \\ \hat{H} = \max(H, \hat{\omega}^{-k}\|\mathbf{Z}_k\|), \\ \hat{\Lambda}_n = 2\hat{\omega}(\|\boldsymbol{\Lambda}_0\| + \hat{\omega}^{-1}\|\boldsymbol{\Lambda}_1\| + \cdots + \hat{\omega}^{-n+k}\|\boldsymbol{\Lambda}_{n-k}\|), \end{cases} \tag{3-12}$$

这里 $\hat{\Gamma}^*$ 由下面的(3-19)定义.

証. 我们首先考虑 ρ 的模最大的根都是单根的情形. 设 $w \neq 0$ 为这样的一个根，即设 $\rho(w) = 0$, $\rho'(w) \neq 0$，以及 $\rho(z) =$