数 学 物 理

（理论、方法和题解）

［印］ B. D. GUPTA 著

刘 志 旺 译

林 为 干
林 炎 武 审校

成都电讯工程学院出版社

·1988·

内容提要

本书可作为理、工科大学高年级学生和研究生的教学参考书，对广大教师和科技人员也有很好的阅读价值。

本书选译三部分内容：复变函数，（常、偏）微分方程和特殊函数等在物理学和工程技术中的数学理论和方法，各部分均安排大量的例题，问题及其详细解法。

数学物理

·理论、方法和题解·

MATHEMATICAL PHYSICS

原著〔印〕 B.D.GUPTA

刘志旺 译

林为干 林炎武 审校

成都电讯工程学院出版社出版

成都电讯工程学院出版社印刷厂印刷

四川新华书店经销

开本 787×1092 1/32 印张 12.68 字数270千字

印次 1988年9月第一版 印次 1988年9月第一次印刷

印数 1-3700册

中国标准书号 ISBN 7-81016-106-7/O·4

(13452·5) 定价：3.80元

译 者 序

本书根据 B.D.Gupta 所著《数学物理》一书的部分内容翻译。

原书是一本内容十分丰富，新颖，分析方法独特，实用性很强的书。它既重视理论的论证，也注意从应用的观点以简捷的方法陈述某些深奥的内容。特别是每部分内容都列举了大量的例题、问题，并给出详细的解法和提示。它包括了在物理学和工程技术中所用到的数学问题。本书先选译了其中三部分内容：复变函数，（常、偏）微分方程和特殊函数。这些内容曾在原成都电讯工程学院作过研究生教材（原文打印）和工科高年级学生的参考书，收到了良好的效果。本书对广大的教师、工程技术人员和科学工作者也是一本很有价值的工具书。

原书中出现大量的排印错误，某些地方符号也不大统一，因此在编译过程中都作了订正。由于订正处很多，也就不便一一注出，若有不妥，概由译者负责。鉴于译者水平有限，缺点、错误在所难免，请读者批评指正。

译　者

1988年6月

目　录

第二章 微分方程

第三章 特殊函数

第一章　复变函数

§1.1　引　言

康托(Cantor)、戴德金(Dedekind)和外尔斯特拉斯(Weierstrass)等将有理数概念扩展到更大的所谓实数范围，使之既能适合于有理数，也适合于无理数。显然，实数系并不满足数学上的需要。例如，没有任何实数(有理数或无理数)满足方程 $x^2+1=0$。因此，经过欧拉，高斯，哈密顿(Hamilton)，柯西，黎曼和外尔斯特拉斯等的探索，将实数域扩展到更大的复数域。欧拉首先引入具有性质 $i^2=-1$ 的符号 i，而后，高斯引入形如 $\alpha+i\beta$ 的数，此数满足复系数的代数方程，这样的数称为复数，其中 $i=\sqrt{-1}$，而 α，β 是实数。

§1.2　定　义

复数　有序实数对，如 (x, y)，叫做复数，如果我们记 $z=(x, y)$ 或 $x+iy$，此处 $i=\sqrt{-1}$，那么，称 x 为复数 z 的实部，而 y 称为它的虚部，并用下面符号表示：

$$x=\mathrm{Re}(z) \qquad y=\mathrm{Im}(z)$$

复数相等　两个复数 (x, y) 和 (x', y') 当且仅当 $x=x'$，$y=y'$ 时才相等。

复数的模　如果 $z=x+iy$ 是复数，而它的模用 $|z|$ 表示，则

$$|z|=|x+iy|=+\sqrt{x^2+y^2}$$

同样，$|z|=0$ 是当且仅当 $x=0$，$y=0$ 时才成立。

§1.3 复数的代数运算法则

给出三个复数 $z_1=(x_1, y_1)$, $z_2=(x_2, y_2)$, $z_3=(x_3, y_3)$，我们来定义下面的运算。

【1】加法 两个复数 $z_1=(x_1, y_1)$ 和 $z_2=(x_2, y_2)$ 的和，定义为复数

$$z=(z_1+z_2)=(x_1+x_2, \ y_1+y_2)$$

即，复数的实部等于已知两复数的实部之和，而其虚部为已知复数的虚部之和。

(i) **加法交换律** $z_1+z_2=z_2+z_1$ (1)

证 因为 $z_1+z_2=(x_1+iy_1)+(x_2+iy_2)=(x_1+x_2)$

$$+i(y_1+y_2)=(x_1+x_2, \ y_1+y_2)$$
$$=(x_2+x_1, \ y_2+y_1)=(x_2+iy_2)$$
$$+(x_1+iy_1)=z_2+z_1$$

(ii) **加法结合律** $z_1+(z_2+z_3)=(z_1+z_2)+z_3$ (2)

证 因为 $z_1+(z_2+z_3)=x_1+iy_1+(x_2+iy_2+x_3+iy_3)$

$$=(x_1+iy_1+x_2+iy_2)$$
$$+(x_3+iy_3)=(z_1+z_2)+z_3$$

(iii) **加法恒等式** $z+0=z$ (3)

证 因为 $z+0=(x, \ y)+(0, \ 0)=(x+0, \ y+0)$

$$=(x, \ y)=z$$

(iv) **加法的可逆性** 即 $z+(-z)=0$ (4)

证 因为 $z+(-z)=(x, \ y)+(-x, \ -y)$

$$=(x-x, \ y-y)=(0, \ 0)=0$$

注：如果 $z=(x,\ y)$，则 $-z=(-x,\ -y)$ 称为 z 的逆元素。

【2】减法 如果 $z_1=(x_1,\ y_1)$，则 $-z_1=(-x_1,\ -y_1)$ 等等，那么 $z_1-z_2=(x_1,\ y_1)+(-x_2,\ -y_2)$

$$=(x_1+iy_1,\ -x_2-iy_2)=(x_1-x_2, y_1-y_2)$$

【3】乘法 我们有

$$z_1z_2=(x_1+iy_1)(x_2+iy_2)=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+x_2y_1)$$

即 $$(x_1,\ y_1)(x_2,\ y_2)=(x_1x_2-y_1y_2,\ x_1y_2+x_2y_1) \tag{6}$$

(i) **乘法交换律** $z_1z_2=z_2z_1$ (7)

证 由式(6)
$$\begin{aligned} z_1z_2&=(x_1x_2-y_1y_2,\ x_1y_2+x_2y_1)\\ &=(x_2x_1-y_2y_1,\ y_2x_1+y_1x_2)\\ &=(x_2+iy_2)(x_1+iy_1)=z_2z_1\end{aligned}$$

(ii) **乘法结合律** $z_1(z_2z_3)=(z_1z_2)z_3=z_1z_2z_3$ (8)

证 由式(6)

$$\begin{aligned} z_1(z_2z_3)&=(x_1, y_1)[x_2x_3-y_2y_3, x_2y_3+x_3y_2]\\ &=[x_1(x_2x_3-y_2y_3)-y_1(x_2y_3+x_3y_2),\\ &\quad x_1(x_2y_3+x_3y_2)+y_1(x_2x_3-y_2y_3)]\\ &=[(x_1x_2-y_1y_2)x_3-(x_1y_2+x_2y_1)y_3,\\ &\quad (x_1y_2+x_2y_1)x_3+(x_1x_2-y_1y_2)y_3]\\ &=[(x_1,\ y_1)(x_2,\ y_2)](x_3,\ y_3)\\ &=(z_1z_2)z_3\end{aligned}$$

(iii) **乘法分配律** $(z_1+z_2)z_3=z_1z_3+z_2z_3$ (9)

证 由式(6)

$$(z_1+z_2)z_3=[x_1+x_2,\ y_1+y_2](x_3,\ y_3)$$

$$
\begin{aligned}
&=[(x_1+x_2)x_3-(y_1+y_2)y_3,\\
&\quad (x_1+x_2)y_3+(y_1+y_2)x_3]\\
&=[(x_1x_3-y_1y_3)+(x_2x_3-y_2y_3),\\
&\quad (x_1y_3+x_3y_1)+(x_2y_3+x_3y_2)]\\
&=(x_1,y_1)(x_3,y_3)+(x_2,y_2)(x_3,y_3)\\
&=z_1z_3+z_2z_3
\end{aligned}
$$

(iv) **乘法恒等性** $z\cdot 1=z$ (10)

此处 $1=(1,\ 0)$ 是乘法的单位元，称为复数系的单位。

证 我们有 $z\circ 1=(x,y)(1,0)=(x,y)=z$

(v) **乘法的可逆性** 即 $zz^{-1}=1$ (11)

证 如果 $z=(x,y)$，那么 $z^{-1}=(x,y)^{-1}$，因此我们需要证明 $(x,y)(x,y)^{-1}=(1,0)$

设 $(x,y)^{-1}=(x',y')$，则上式变为

$$(x,y)(x',y')=(1,0)$$

即
$$(xx'-yy',xy'+yx')=(1,0)$$

在实部，虚部相等时，得到 $\begin{cases}xx'-yy'=1\\ xy'+yx'=0\end{cases}$

求解这个方程组，并假定 $x^2+y^2\neq 0$，有

$$x'=\frac{x}{x^2+y^2}\qquad y'=\frac{-y}{x^2+y^2}$$

因此，复数 (x,y) 有唯一的乘法逆元$\left(\frac{x}{x^2+y^2},\ \frac{-y}{x^2+y^2}\right)$，它是满足 $(x,\ y)\left(\frac{x}{x^2+y^2},\ \frac{-y}{x^2+y^2}\right)=(1,\ 0)$ 的复数。

【4】除法 考虑等式 $z_1z_2=z'$

其中 $z_1=(x_1,y_1)$ $z_2=(x_2,y_2)$ 及 $z'=(x',y')$

现在

$$z_1z_2=(x_1x_2-y_1y_2,\ x_1y_2+x_2y_1)=z'=(x',y')$$

由此得 $\begin{cases} x_1x_2-y_1y_2=x' \\ x_1y_2+x_2y_1=y' \end{cases}$

解得 $$x_2=\frac{y_1y'-x_1x'}{x_1^2+y_1^2}, \qquad y_2=\frac{x_1y'-x'y_1}{x_1^2+y_1^2} \tag{12}$$

并规定 $x_1^2+y_1^2\neq 0$，即$|z_1|\neq 0$，于是，我们有唯一的解，且$z_2=\dfrac{z'}{z_1}$为z'除以z_1之商。

【5】共轭复数 如果$z=x+iy$，则称$x-iy$为复数z的共轭复数，并记为$\bar{z}$。

显然 $$\overline{z_1+z_2}=\bar{z}_1+\bar{z}_2 \tag{13}$$

$$\overline{z_1z_2}=\bar{z}_1\bar{z}_2 \tag{14}$$

$$z\bar{z}=(x+iy)(x-iy)=x^2+y^2=|z|^2 \tag{15}$$

$$z+\bar{z}=2x=2\mathrm{Re}(z) \tag{16}$$

$$z-\bar{z}=i2y=i2\mathrm{Im}(z) \tag{17}$$

§1.4 图 解 法

考虑xy-平面内的一点，设一有序对x和y对应于点P的坐标，则可使复数z与点P对应，这里，$z=x+iy$，并称z为点P的复坐标。

在图1.1中，x轴称为实轴，y轴称为虚轴。此处，$|z|=|x+iy|=\sqrt{x^2+y^2}$是$OP$的长度。

如果 $(r,\ \theta)$ 是点 P 的极坐标，则复数 z 在极坐标系下的式子为

$$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)=re^{i\theta}$$

这里的数 r（取正）称为复数 z 的模或绝对值，而 θ 称为 z 的幅角，通常记为$\arg z$，即 $|z|=r$ 和 $\arg z=\theta$，如图 1.2 所示。

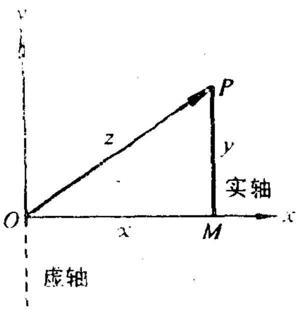

图 1.1

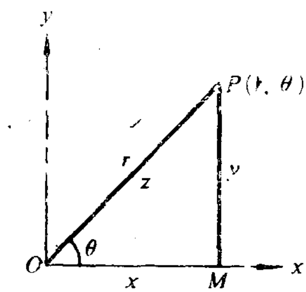

图 1.2

现在，与 z 共轭的点 P' 的坐标是 $\bar{z}=(x,-y)$，或极坐标形式 $(r,-\theta)$，如图1.3所示

因为 $\bar{z}=r\{\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)\}$，所以，在几何上，点 P 和 P' 分别表示 z 和 $\bar{z}$，并且，它们的位置关于实轴（即 x 轴）对称，而 z 的共轭称为 z 对于实轴的反射或象。

注1：用复数表示点的平面称为复平面，或高斯平面。

注2：表示点 (x,y) 的复数，有时称为点 (x,y) 的附标。

注3：复数的和、差、积以及商在复平面上的几何意

义表示如下。

【1】和 在复平面上取两个复数 z_1 和 z_2，用 P、Q 两点表示，并作平行四边形 $OPRQ$，我们看到，它的对角线 OR 和 PQ 的中点重合，因为它们互相平分，即若

$$z_1=(x_1,y_1),z_2=(x_2,y_2)$$

则 PQ 的中点是 $\left(\dfrac{x_1+x_2}{2},\dfrac{y_1+y_2}{2}\right)$，此点也是 OR 的中点，由此证明，点 R 的坐标是 $(x_1+x_2,\ y_1+y_2)$；因为 $z_1+z_2=(x_1+x_2,y_1+y_2)$，所以，和 z_1+z_2 对应于分量为 x_1+x_2 及 y_1+y_2 的矢量，于是，若 $\overrightarrow{OP}=z_1$，$\overrightarrow{OQ}=z_2$，则 $\overrightarrow{OR}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PR}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}=z_1+z_2$。因此，在复平面上的点 R 对应于两个复数之和，如图 1.4 所示。

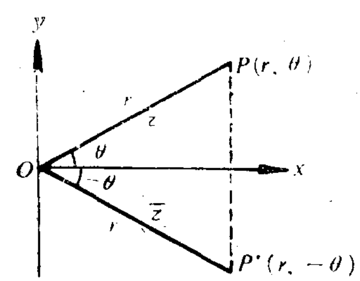

图 1.3

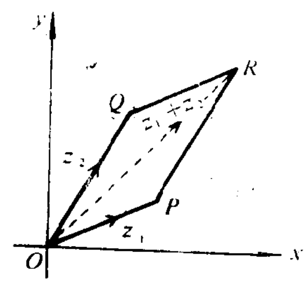

图 1.4

【2】差 在复平面上取点 P 和 Q 表示两个复数 z_1 和 z_2，并作平行四边形 $OQPR$，我们看到，点 R 表示复数 z_1-z_2，因为 $z_1-z_2=(x_1-x_2,\ y_1-y_2)$ 是对应于分量为 x_1-x_2 及 y_1-y_2 的复数，且若 $\overrightarrow{OP}=z_1$，$\overrightarrow{OQ}=z_2$，则 $\overrightarrow{QO}=-z_2$，

如图 1.5 所示，因此

$$z_1-z_2=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{QO}=\overrightarrow{QO}+\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{QP}=\overrightarrow{OR}$$

即两复数之差可以用矢量表示。

【3】积 如果$z_1=(x_1,y_1)$，$z_2=(x_2,y_2)$是两个复数，则

$$z_1z_2=(x_1x_2-y_1y_2,\ x_1y_2+x_2y_1)=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+x_2y_1)$$

为了换为极坐标，设 $x_1=r_1\cos\theta_1$，$y_1=r_1\sin\theta_1$，$x_2=r_2\cos\theta_2$，$y_2=r_2\sin\theta_2$，其中 r_1，r_2 和 θ_1，θ_2 分别是 z_1 及 z_2 的模和幅角，我们有

$$z_1z_2=r_1r_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2)+i(\cos\theta_1\sin\theta_2+\cos\theta_2\sin\theta_1)]$$
$$=r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)]$$

所以 $$|z_1z_2|=r_1r_2=|z_1||z_2| \tag{1}$$

和 $$\arg(z_1z_2)=\theta_1+\theta_2=\arg z_1+\arg z_2 \tag{2}$$

即，两个复数之积的模等于它们的模之积，而两个复数积的幅角等于它们的幅角之和。

一般地，如果有 n 个复数z_1，z_2，$\cdots$，z_n，其模和幅角分别为 r_1，r_2，$\cdots$，r_n 和 θ_1，θ_2，$\cdots$，θ_n，则重复应用上述结果，得

$$z_1z_2\cdots z_n=r_1r_2\cdots r_n[\cos(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n)+i\sin(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n)]$$

所以 $$|z_1z_2\cdots z_n|=r_1r_2\cdots r_n=|z_1||z_2|\cdots|z_n| \tag{3}$$

和 $$\arg(z_1z_2\cdots z_n)=\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n=\arg z_1+\arg z_2+\cdots+\arg z_n \tag{4}$$

即，任意个复数积的模等于其模之积，而这些复数积之幅角

等于其幅角之和。

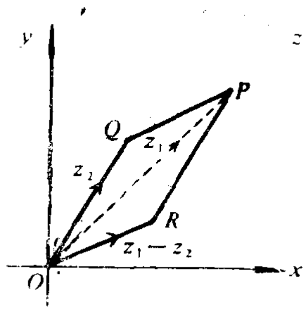

图 1.5

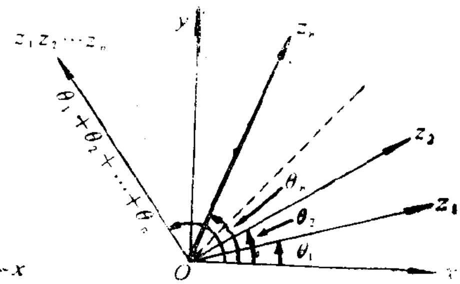

图 1.6

n 个复数 z_1, z_2, $\cdots$, z_n 的积在复平面上如图 1.6 所示。

由此可见，矢量 $(z_1z_2\cdots z_n)$ 的长度是矢量 z_1, z_2, $\cdots$, z_n 的长度之积，即 $|z_1z_2\cdots z_n|=|z_1||z_2|\cdots|z_n|$，而 $(z_1z_2\cdots z_n)$ 的幅角等于 z_1, z_2, $\cdots$, z_n 的幅角之和。

在 $z_1=z_2=\cdots=z_n$ 的特殊情况下，上述结果可以概括如下：在 $r_1=r_2=\cdots=r_n$, $\theta_1=\theta_2=\cdots=\theta_n$ 的假定下，

$$z^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$$

即
$$|z^n|=r^n=|z|^n \tag{5}$$

和
$$\arg z^n=n\theta=n(\arg z) \tag{6}$$

此外，如果 $r=1$，可得到正整数幂的德·莫弗（De Moivre）定理，即

$$z^n=(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta \tag{7}$$

【4】商 考虑两个复数 z_1 和 z_2，且

$$z_1 = x_1 + iy_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$$

$$z_2 = x_2 + iy_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$

两个复数的商定义如下

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)}$$

$$= \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)]$$

所以
$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{r_1}{r_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} \tag{8}$$

和
$$\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \theta_1 - \theta_2 = \arg z_1 - \arg z_2 \tag{9}$$

即，两个复数之商的模是它们的模之商，而这两个复数之商的幅角是其幅角之差。

作为特殊情形，我们把除法定义为乘法的逆运算，有

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r}[\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)] = \frac{1}{r}[\cos\theta - i\sin\theta]$$

因而
$$\frac{1}{z^n} = z^{-n} = \frac{1}{r^n}[\cos n\theta - i\sin n\theta] = \left(\frac{1}{z}\right)^n \tag{10}$$

由此说明，当幂是任意负整数时，德·莫弗定理成立。

$\frac{z_1}{z_2}$ 的几何表示（如图1.7）可以说明如下：设$\overrightarrow{OP}$和$\overrightarrow{OQ}$表示复平面上的矢量 z_1 和 z_2，使得，$|z_1| = OP$，$|z_2| = OQ$，且 $\arg z_1 = \theta_1$，$\arg z_2 = \theta_2$。

将直线OP沿顺时针方向旋转角度 $\theta_2(=\arg z_2)$，使其新位

置为 OP'，而 $\angle POP'=\theta_2$，在 OX 轴上取 $OA=1$（单位长），并作直线 AR 与 OP' 交于 R，使得

$$\angle OAR=\angle OQP$$

于是得到对应于商 $\frac{z_1}{z_2}$ 的点 R，且可证明如下：在相似三角形 OAR 和 OQR 中，有

$$\frac{OR}{OA}=\frac{OP}{OQ}$$

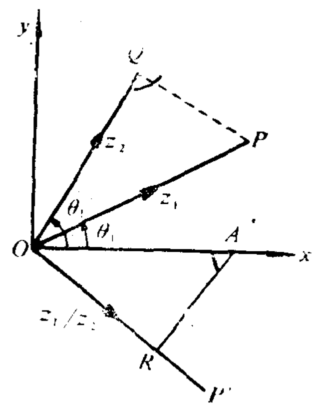

图 1.7

即

$$OR=\frac{OP}{OQ}=\frac{|z_1|}{|z_2|}=\left|\frac{z_1}{z_2}\right| \qquad (OA=1)$$

这说明点 R 的径向矢径是 $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|$。

又
$$\angle AOR=\angle POR-\angle POX$$
$$=\theta_2-\theta_1=-(\theta_1-\theta_2)$$

即，R的矢量角是 $-(\theta_1-\theta_2)$，而沿正方向度量时，则是 $\theta_1-\theta_2$。因此，点 R 表示商 $\frac{z_1}{z_2}$。

注4：复数与 i 相乘

设 z 是模为 r 和幅角为 θ 的复数，即

$$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$$