

张秋光 主编

场论

下册

地质出版社

场 论

下 册

张秋光 主编

地 质 出 版 社

场 论

下 册

张秋光 主编

责任编辑：张怀素 王文孝

地质出版社 出版发行

(北京西四)

地质出版社 印刷厂印刷

(北京海淀区学院路29号)

新华书店总店科技发行所经销

开本：850×1168¹/₃₂ 印张：19.1875 字数：506,000

1988年9月北京第一版·1988年9月北京第一次印刷

印数：1—2670册 国内定价：7.00 元

ISBN 7-116-00185-9/P·168

目 录

第八章 波动方程	1
----------	---

I. 波动方程的导出及其数学解法

§ 1 波动方程的导出	1
一、弦的微小横振动方程	1
二、电磁波方程	3
1. 电磁场矢量所满足的波动方程	7
2. 电磁位所满足的波动方程	8
§ 2 定解条件	16
§ 3 定解问题的适定性	18
§ 4 波动方程的达兰贝尔解法	21
一、无界弦的自由振动	21
二、半无界弦的自由振动	26
三、有界弦的自由振动	31
四、弦的强迫振动	33
五、三维齐次波动方程初值问题的解——泊松公式	40
六、二维齐次波动方程初值问题的解——降维法	46
七、三维非齐次波动方程齐次初值问题的解——推迟位	50
八、时变电磁场的推迟位	54
§ 5 波动方程的傅里叶解法	57
一、有界弦的自由振动	57
二、有界弦的强迫振动	63
三、长方膜的自由振动	66
四、圆膜的自由振动	69
五、长方体内的自由振动	73
§ 6 波动方程的积分变换解法	79

一、应用傅氏变换解波动方程	79
1. 一维齐次波动方程的初值问题	79
2. 一维非齐次波动方程的齐次初值问题	82
3. 一维齐次波动方程在一端为自由端的半区间上的混合问题	83
二、应用拉氏变换解波动方程	87
〔附录〕 拉普拉斯变换	93
一、拉普拉斯变换的引出	93
二、拉普拉斯变换的存在定理和反演定理	95
三、拉普拉斯变换举例	96
四、拉普拉斯变换的基本性质	97
五、展开定理	104
§ 7 亥姆霍兹方程	108
一、在直角坐标系中用分离变量法解亥姆霍兹方程	109
二、在圆柱坐标系中用分离变量法解亥姆霍兹方程	111
三、在球坐标系中用分离变量法解亥姆霍兹方程	116
〔附录〕 将任意时变场视为谐变场的叠加	120

II. 电磁波

电磁波的传播

§ 8 平面电磁波	124
一、绝缘物质中的平面电磁波	125
二、导电物质中的平面电磁波	131
〔附录〕 运用复数工具计算谐变量乘积的均值	140
§ 9 反射和折射	143
一、斯涅耳定律	143
二、菲涅耳公式	145
1. $\vec{E}_0$ 垂直于人射面	146
2. $\vec{E}_0$ 平行于人射面	147
三、绝缘物质分界面上的反射和折射	149
1. 实折射角情况	149

2. 复折射角情况	153
四、绝缘和导电物质分界面上的反射和折射	155
1. 折射波	155
2. 反射波	158
五、复入射角	161
六、成层物质	167
1. 三层物质中的平面电磁波 (垂直入射)	167
2. n 层物质的平面波阻抗	170
甲、垂直入射情形	170
乙、倾斜入射情形	177
§ 10 波导中的电磁波	183
一、理想导体的边界条件	183
二、矩形波导	185
三、圆柱形波导	192

电磁波的辐射

§ 11 偶极辐射	199
一、电偶极辐射	199
二、磁偶极辐射	206
三、两种场的比较	208
§ 12 多极辐射	209
§ 13 导电物质中电偶极子的场	217

成层物质上方的偶极子和线电流

§ 14 成层物质上方的垂直磁偶极子	221
一、两层大地上方的垂直磁偶极子	221
二、 n 层大地上方的垂直磁偶极子	226
三、均匀大地表面的垂直磁偶极子 (场的具体计算)	227
四、 n 层大地表面的垂直磁偶极子	236
§ 15 成层物质上方的水平磁偶极子	238

A. 引入磁标位计算 $\vec{H}$

一、 n 层大地上方的水平磁偶极子.....	239
二、均匀大地表面的水平磁偶极子(磁场的具体计算).....	241
三、 n 层大地表面的水平磁偶极子.....	246

B. 引入 $\vec{F}$

一、均匀大地.....	248
二、两层大地.....	256
三、 n 层大地.....	260
§ 16 成层物质上方的水平电偶极子.....	261
一、均匀大地.....	261
二、 n 层大地.....	268
§ 17 成层物质上方的垂直电偶极子.....	271
一、均匀大地.....	271
二、 n 层大地.....	273
§ 18 成层物质上方的线电流.....	274
一、空气中的无限长线电流.....	274
二、 n 层大地上方的线电流.....	277
三、均匀大地表面的线电流(地面场的具体计算).....	280
四、 n 层大地表面的线电流.....	284

均匀谐变场中的简单形状导电导磁体

§ 19 谐变均匀磁场中的导电导磁球.....	287
§ 20 谐变均匀磁场中的导电导磁柱.....	296

均匀脉冲场中的简单形状导电导磁体

§ 21 阶跃均匀磁场中的导电导磁球.....	305
-------------------------	-----

[附录] 关于(1081)、(1082)式的证明.....	316
-------------------------------	-----

第九章 场的频率域分析.....	319
------------------	-----

§ 1 重磁异常谱的基本关系.....	320
---------------------	-----

一、函数的频谱与其导数的频谱之间的关系.....	320
--------------------------	-----

1. 三维情形.....	320
--------------	-----

2. 二维情形	321
二、频率域泊松公式	323
三、泊松体重磁异常频谱的关系	324
1. 磁异常分量谱与重力异常分量谱的关系	324
2. 各种磁异常分量谱之间的关系	326
3. 不同磁化方向的磁异常分量谱之间的关系	327
四、重磁异常谱的一般表示式及一般情况下各种磁异常分量谱之间的关系	329
1. 重力异常谱的一般表示式	329
2. 磁异常分量谱的一般表示式及一般情况下各分量谱之间的关系	330
五、常用的频谱算子简表	333
§ 2 均匀规则体重磁异常的谱函数	337
一、均匀二度规则体重磁异常的谱函数	337
1. 谱函数表达式	337
2. 谱函数的特征	346
3. 谱曲线	349
二、均匀三度规则体重磁异常的谱函数	356
1. 谱函数表达式	356
2. 谱函数的特征	359
3. 谱图	363
§ 3 空间坐标轴旋转前后的重磁异常谱函数之间的关系	365
一、空间坐标轴旋转前后的二度体频谱函数之间的关系	365
二、空间坐标轴旋转前后的三度体频谱函数之间的关系	366
§ 4 三度体与二度体重磁异常谱的等价关系	367
一、三度体与二度体空间域重磁异常的等价关系	367
二、三度体与二度体重磁异常谱的等价关系	371
§ 5 谱分析在解反问题中的应用	373
一、振幅谱的解释	373
1. 振幅谱曲线的分类及识别	373
2. 振幅谱曲线的通用解释法	375

3. 振幅谱曲线的特殊解释法.....	377
二、相位谱的解释.....	378
§ 6 谱分析在异常变换及滤波中的应用.....	381
一、线性滤波器的一般原理.....	382
1. 线性平移不变滤波器.....	382
2. 脉冲响应函数与传输函数.....	383
二、谱分析在异常变换中的应用.....	384
三、谱分析在线性滤波中的应用.....	385
1. Wiener滤波器.....	385
2. 二维最佳线性数字滤波器的设计原理.....	388
第十章 随机场.....	394

第一部分 理论基础简介

I. 概率论的基本概念

§ 1 随机事件及其概率.....	394
§ 2 事件的关系和运算 概率加法定理.....	399
§ 3 条件概率与概率乘法定理.....	404
§ 4 全概公式与逆概公式.....	406
§ 5 事件的独立性.....	409

II. 随机变量及其分布

§ 6 随机变量.....	414
§ 7 离散型随机变量的分布列.....	415
§ 8 连续型随机变量的概率密度.....	420
§ 9 随机变量的分布函数.....	427
§ 10 随机变量函数的分布函数.....	430

III. 随机变量的数字特征

§ 11 数学期望.....	435
§ 12 方差.....	441

§ 13	矩	445
§ 14	Tschebyscheff (切比雪夫) 不等式	447

IV. 多维随机变量及其分布

§ 15	多维随机变量	449
§ 16	多维随机变量的分布函数	450
§ 17	多维离散型随机变量的分布列	452
§ 18	多维连续型随机变量的概率密度	457
§ 19	随机变量的独立性	463
§ 20	多维随机变量函数的分布函数	466
§ 21	多维随机变量的数字特征	475
一、数学期望		475
二、方差		476
三、协方差		478
四、相关系数		481
五、矩		482

V. 大数定律和中心极限定理

§ 22	大数定律	486
§ 23	中心极限定理	488

VI. 随机函数论的基本知识

§ 24	随机函数	490
§ 25	随机过程的分布函数	492
§ 26	随机过程的数字特征	494
§ 27	随机过程系的分布函数和数字特征	497
§ 28	随机过程的极限和连续性	500
§ 29	随机过程的导数和积分	500
§ 30	几种重要的随机过程简介	505
一、独立随机过程		505
二、正态随机过程		506

三、Markov (马尔可夫) 过程.....	507
四、平稳随机过程.....	509
§ 31 随机场.....	511

VII. 平稳随机过程

§ 32 平稳过程的数字特征.....	513
§ 33 各态历经性.....	522
§ 34 平稳过程的平均功率和功率谱密度.....	526
§ 35 平稳系的互平均功率和互功率谱密度.....	531

VIII. 平稳过程的线性变换

§ 36 随机过程的线性变换.....	537
§ 37 平稳过程的线性变换.....	540
§ 38 常系数线性微分方程的平稳解.....	543

第二部分 物探应用举例

IX. Monte Carlo方法

§ 39 随机变量的模拟.....	547
§ 40 用Monte Carlo法计算定积分.....	551
§ 41 用Monte Carlo法解Laplace 方程的边值问题...	552

X. 重磁资料数据处理中的一些滤波方法

§ 42 Kolmogoroff-Wiener (柯尔莫哥洛夫-维纳) 滤波.....	555
§ 43 二维最佳线性滤波.....	563

XI. 航磁异常的统计解释

§ 44 Spector (史帕克托) 和Grant (格兰特) 解释航磁资料的统计模型.....	571
---	-----

XII. 逆概率法

§ 45 用逆概率法在强干扰背景下判断是否存在弱

异常	578
习题答案	583
参考文献	595

第八章 波动方程

I . 波动方程的导出及其数学解法

§ 1 波动方程的导出

一、弦的微小横振动方程

所谓横振动是指弦的运动出现在一个平面上且弦上各点的位移与弦的平衡位置垂直。取弦的平衡位置为 x 轴，弦上横坐标为 x 的点在时刻 t 的位移用 $u(x, t)$ 表示。微小振动的含义是指弦

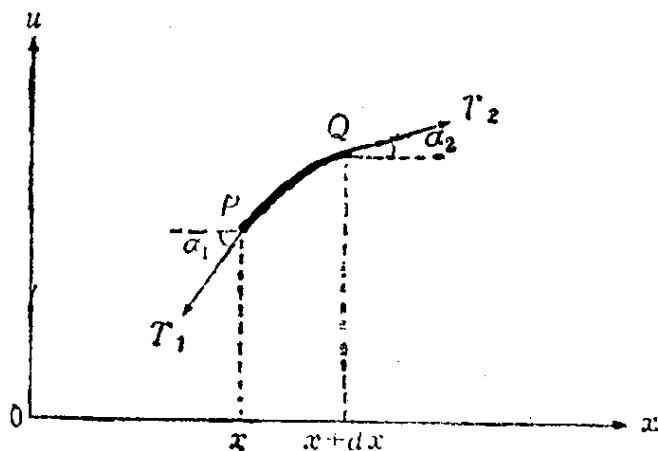


图 1

振动的幅度以及各点切线的斜率都很小，与 1 相比 u_x 高于一次方的项均可略去不计，例如可认为 $1 + u_x^2 \approx 1$ 。又设弦是柔软的，即它不抵抗弯曲，因此张力总是沿切线方向。此外，我们还假定弦是均匀的，用常量 ρ 表示它的线密度，即单位长度的质量。弦受到垂直于 x 轴的外力作用，记单位长度的外力为 $F(x, t)$ ，其正向与 u 轴正向一致。

如图1，研究任一小段弦 $\widehat{PQ}$ ，端点的横坐标分别为 x 及 $x + dx$ ，

它的长度

$$ds = \sqrt{1 + u_x^2} dx \approx dx.$$

据牛顿第二定律，可列出如下的运动方程

$$\begin{cases} T_2 \cos \alpha_2 - T_1 \cos \alpha_1 = 0, \\ T_2 \sin \alpha_2 - T_1 \sin \alpha_1 + F dx = \rho dx u_{tt}, \end{cases}$$

第一式是由于弦只作横振动。对于微小振动，有

$$\sin \alpha_1 \approx \tan \alpha_1 = u_x(x, t),$$

$$\sin \alpha_2 \approx \tan \alpha_2 = u_x(x + dx, t),$$

$$\cos \alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{1 + u_x^2(x, t)}} \approx 1,$$

$$\cos \alpha_2 = \frac{1}{\sqrt{1 + u_x^2(x + dx, t)}} \approx 1.$$

上述运动方程变为

$$\begin{cases} T_2 - T_1 = 0, \\ T_2 u_x(x + dx, t) - T_1 u_x(x, t) + F(x, t) dx = \rho dx u_{tt}(x, t). \end{cases}$$

第一式告诉我们，张力的大小 T 不依赖于 x 。又由于 $ds \approx dx$ ，可以认为弦段在振动过程中并未伸长，由虎克定律推知， T 也不随时刻 t 而变。也就是说，对于所有的 x, t ,

$$T = \text{常数}.$$

考虑到这一点，第二式可进一步写成

$$T \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx + F dx = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \rho dx.$$

记

$$a^2 = \frac{T}{\rho}, \quad f(x, t) = \frac{F(x, t)}{\rho},$$

后者代表单位质量的弦所受的外力，于是得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f. \quad (1)$$

这就是描述受外力作用的均匀柔软弦的微小横振动的偏微分方程，称之为非齐次波动方程， $f(x, t)$ 称为自由项。若 $f(x, t) \equiv 0$,

则变为齐次波动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (2)$$

它们都是一维的。

类似地，可以从其它实际问题（例如膜的横振动、声波的传播）导出二维波动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + f(x, y, t) \quad (3)$$

及三维波动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + f(x, y, z, t). \quad (4)$$

二、电磁波方程

假定在我们所讨论的区域内，物质均匀、线性和各向同性。本段将在第三章的基础上进一步研究有外源存在时电磁场矢量和电磁位所满足的偏微分方程，并且一律采用SI制。

先给出显含外源的麦克斯韦方程组以及它在谐变情况下的简化形式。

所谓外源，指的是这样的电流和磁矩，它们参与激发我们所研究的电磁场，然而它们并不受我们所研究的电磁场的影响^①。外源常简称源，它们是给定的时空函数。

当有外电源时，欧姆定律用下式表示：

$$\vec{j}_f = \sigma \vec{E} + \vec{j}'_f. \quad (5)$$

其中， $\vec{j}'_f$ 为外来电流密度。相应地，自由电荷守恒定律

$$\nabla \cdot \vec{j}_f + \frac{\partial \rho_f}{\partial t} = 0$$

改写作

$$\nabla \cdot \vec{j}'_f + \frac{\partial \rho_f}{\partial t} + \frac{\sigma}{\epsilon} \rho_f = 0. \quad (6)$$

① 它们是由另外的原因（不同于我们所研究的电磁场）所产生。

由(6)式极易推知：在无外源的均匀各向同性线性导电物质内部不可能积累自由电荷。

当有外磁源时，磁化强度

$$\vec{J} = \kappa \vec{H} + \vec{J}_0, \quad (7)$$

其中 $\kappa \vec{H}$ 为感应磁化强度， $\vec{J}_0$ 为外来磁化强度。将(7)式代入定义式

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J} \text{ 或 } \vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{J}),$$

得

$$\vec{B} = \mu \vec{H} + \mu \vec{J}', \quad (8)$$

其中

$$\vec{J}' = \frac{\mu_0}{\mu} \vec{J}_0. \quad (9)$$

分别以 $\mu \vec{H} + \mu \vec{J}'$ 和 $\sigma \vec{E} + \vec{j}_f$ 替代麦克斯韦方程组

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{H} = \vec{j}_f + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{D} = \rho_f \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \end{cases} \quad (10)$$

中的 $\vec{B}$ 和 $\vec{j}_f$ ，可得以下显含外源的麦克斯韦方程组：

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} - \mu \frac{\partial \vec{J}'}{\partial t}, \\ \nabla \times \vec{H} = \vec{j}_f + \sigma \vec{E} + \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \\ \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_f}{\epsilon}, \\ \nabla \cdot \vec{H} = -\nabla \cdot \vec{J}'. \end{cases} \quad (11)$$

研究谐变电磁场时，可将场强和密度 $\vec{E}$ 、 $\vec{H}$ 、 ρ_f 、 $\vec{j}_f$ 、 $\vec{J}'$ 等

表示为相应的复场强和复密度 $\hat{E}$ 、 $\hat{H}$ 、 $\hat{\rho}_f$ 、 $\hat{j}'_f$ 、 $\hat{J}'$ 等的实部，即

$$\begin{cases} \vec{E} = \text{Re} \hat{E} = \text{Re}(|\hat{E}| e^{-i\omega t}), \\ \vec{H} = \text{Re} \hat{H} = \text{Re}(|\hat{H}| e^{-i\omega t}), \\ \rho_f = \text{Re} \hat{\rho}_f = \text{Re}(|\hat{\rho}_f| e^{-i\omega t}), \\ \vec{j}'_f = \text{Re} \hat{j}'_f = \text{Re}(|\hat{j}'_f| e^{-i\omega t}), \\ \vec{J}' = \text{Re} \hat{J}' = \text{Re}(|\hat{J}'| e^{-i\omega t}), \end{cases} \quad (12)$$

等等。其中 $|\hat{E}|$ 、 $|\hat{H}|$ 、 $|\hat{\rho}_f|$ 、 $|\hat{j}'_f|$ 、 $|\hat{J}'|$ 等为复振幅^①。利用关系式 (21)、(22) 可知复场强和复密度同样满足形如 (11) 的显含外源的方程组：

① 对于谐变标量场

$$\varphi = \varphi_m \cos(\omega t + \theta) \quad (13)$$

及谐变矢量场

$$\vec{a} = a_{xm} \cos(\omega t + \alpha_x) \vec{x}_0 + a_{ym} \cos(\omega t + \alpha_y) \vec{y}_0 + a_{zm} \cos(\omega t + \alpha_z) \vec{z}_0, \quad (14)$$

可引入复量

$$\hat{\varphi} = \varphi_m e^{-i(\omega t + \theta)} = |\hat{\varphi}| e^{-i\omega t} \quad (15)$$

及

$$\begin{aligned} \vec{\hat{a}} &= a_{xm} e^{-i(\omega t + \alpha_x)} \vec{x}_0 + a_{ym} e^{-i(\omega t + \alpha_y)} \vec{y}_0 + a_{zm} e^{-i(\omega t + \alpha_z)} \vec{z}_0 \\ &= |\vec{\hat{a}}| e^{-i\omega t}, \end{aligned} \quad (16)$$

其中

$$|\hat{\varphi}| = \varphi_m e^{-i\theta}, \quad (17)$$

$$|\vec{\hat{a}}| = a_{xm} e^{-i\alpha_x} \vec{x}_0 + a_{ym} e^{-i\alpha_y} \vec{y}_0 + a_{zm} e^{-i\alpha_z} \vec{z}_0, \quad (18)$$

分别称为复量 $\hat{\varphi}$ 及 $\vec{\hat{a}}$ 的复振幅，显然有

$$\varphi = \text{Re} \hat{\varphi}, \quad (19)$$

$$\vec{a} = \text{Re} \vec{\hat{a}}. \quad (20)$$

容易直接验证：

$$\dot{\hat{\varphi}} = \dot{\varphi} + \frac{i}{\omega} \ddot{\varphi}, \quad (21)$$

$$\vec{\dot{\hat{a}}} = \vec{\dot{a}} + \frac{i}{\omega} \ddot{\vec{a}}. \quad (22)$$

其中，顶端记号 “ $\ddot{}$ ” 表示对时间求导。