模糊数学基础及应用

肖位枢 编著

航空工业出版社

模糊数学基础及应用

肖位枢 编著

(京)新登字161号

内 容 简 介

本书着重介绍模糊数学的基本理论及其应用。主要内容有模糊集合、模式识别、模糊关系与模糊聚类、模糊关系方程与综合评判、模糊语言与模糊逻辑、模糊控制等，对模糊代数亦作了扼要介绍。书中除列举较多实际例子外，并在附录中介绍了几个不同领域的应用实例。每章末附有习题，便于复习思考和巩固。

本书是一本便于自学、通用性的模糊数学及其应用的基础书，可作为高等学校理、工、农、医、管理、政法等学科的教材，亦可作为有关专业科研、生产单位的工程技术人员的培训或自学读本。

模糊数学基础及应用
肖位枢　编著

航空工业出版社出版发行
(北京市和平里小关东里14号)
—邮政编码：100029—
全国各地新华书店经售
地 质 印 刷 厂 印 刷

1992年2月第1版　　1992年2月第1次印刷
787×1092毫米　1/16　　印张：18.5
印数：1—4300　　字数：461　千字
ISBN 7-80046-407-5/O·008
定价：8·90　元

前　　言

模糊数学是1965年诞生的一门新的数学学科，它不仅在理论上拓展了经典数学的内容，而且在人工智能、信息处理、图象识别、自动控制、经济管理、医疗诊断、气象预报以及社会学、心理学、法律、哲学等领域都得到了广泛应用。为了拓宽基础理论和观念，适应当代科学技术发展的需要，国内不少高等学校都增设了这门课程。

本书是在自编讲义及多遍教学实践的基础上，根据航空航天工业部教材编审室颁布的《模糊数学课程教学基本要求》编写的。它可作为高等学校计算机、自动控制、电子工程、安全工程、经济管理以及农林、气象、医疗等专业的教材。为了适应不同专业的需要，本书在内容安排上有一定的伸缩性，第一章是预备知识，已有先修课的专业可以不讲；第二、四、五章是重点内容，适于所有专业；第三、七、八章内容可根据专业性质作适当删节；第六章对侧重应用的专业也可删去，因此教学时数可在40—50学时之间调整。如果条件允许可以结合实际课题（如模式识别、聚类分析、综合评判等）安排大作业上机实习。

模糊数学既是一门基础理论课，又具有很强的应用性，本书在基本理论的阐述上，力图做到条理清晰、概念准确、深入浅出，并着重实际应用的介绍，书中一些实际应用的例子引用了许多同志的研究成果，谨在此表示感谢。

北京航空航天大学李廷杰副教授在百忙中审阅了本书全稿，并提出了宝贵意见，谨在此表示感谢。

感谢出版社有关同志为使本书早日出版所付出的辛勤劳动。

限于编者水平，书中疏漏和错误之处在所难免，恳请读者批评指正。

肖位枢

一九九一年十二月

主要符号说明

$\in$：属于

$\notin$：不属于

$\subseteq$：包含

$\subset$：真包含

$\not\subset$：不包含

$A \Leftrightarrow B$：A和B等价

$\varnothing$：空集合

U：全集合（论域）

$P(A)$：集合A的幂集

$\cap$：交

$\cup$：并

$A \times B$：集合A与B的直积

$F \circ R$：关系F与R的合成运算

R^T(或R^{-1})：关系R的逆关系

$\underset{\sim}{A}$：模糊集合

$\underset{\sim}{A}^c$：模糊集$\underset{\sim}{A}$的补

$\underset{\sim}{F}(U)$：全集U的模糊幂集

A_λ：模糊集$\underset{\sim}{A}$的λ水平集

$\wedge$：取小运算

$\vee$：取大运算

$\hat{+}$：代数和运算

$\odot$：有界积运算

$\oplus$：有界和运算

$\left.\begin{array}{l}\dot{\varepsilon}\\ \overset{+}{\varepsilon}\end{array}\right\}$ Einstan 算子

$\left.\begin{array}{l}\dot{\gamma}\\ \overset{+}{\gamma}\end{array}\right\}$ Hamacher 算子

$\left.\begin{array}{l}y_p\\ Y_p\end{array}\right\}$ Yager 算子

$\left.\begin{array}{l}\overset{\bullet}{*}\\ \overset{+}{*}\end{array}\right\}$广义模糊算子

$\left.\begin{array}{l}\circledast\\ \circledast\end{array}\right\}$模糊集的广义交、并运算

$$\left.\begin{array}{l}\tilde{+}\\ \tilde{-}\\ \tilde{\times}\\ \tilde{\div}\end{array}\right\}$$模糊集的扩张四则运算

$$a\,\delta\,b=\begin{cases}1, & \text{当 } a\leqslant b\\ b, & \text{当 } a>b\end{cases}$$

$$a\,\varepsilon\,b=\begin{cases}b, & \text{当 } a\geqslant b\\ 0, & \text{当 } a<b\end{cases}$$

$\underset{\sim}{A}\otimes\underset{\sim}{B}$：模糊集$\underset{\sim}{A}$与$\underset{\sim}{B}$的内积

$\underset{\sim}{A}\circledcirc\underset{\sim}{B}$：模糊集$\underset{\sim}{A}$与$\underset{\sim}{B}$的外积

$D(\underset{\sim}{A},\ \underset{\sim}{B})$：模糊集$\underset{\sim}{A}$与$\underset{\sim}{B}$的距离

$N(\underset{\sim}{A},\ \underset{\sim}{B})$：模糊集$\underset{\sim}{A}$与$\underset{\sim}{B}$的贴近度

目　　录

绪　言

一、模糊数学诞生的历史背景

模糊数学是研究和处理模糊性现象的数学。"模糊"一词译自英文 Fuzzy，有人译成"勿晰"或"乏晰"，原意是"模糊的、绒毛状的、边界不清、不分明"的意思，现在多数人采用"模糊"这个词。

数学一向被看作是严谨、精确的象征，怎么在今天反而会出现"模糊"数学呢？为了回答这个问题，不妨从以下两个方面谈谈模糊数学诞生的历史背景。

先从数学本身的发展来看，在人类社会初期，由于科技水平和观察手段等因素的限制，对客观世界的一些现象和规律，人们还不能完全认识和掌握，那时作为研究客观世界的空间形式和数量关系的数学也不是很精确的。到17世纪牛顿和莱布尼兹创立微积分，使数学的发展产生了一个飞跃，人们利用数学可以将力学、电磁学等基本规律，表示成相应的微分方程，建立起严密完整的数学公式，以后电子计算机的出现，更使数学的运算达到了高精度的要求．以致数学这个名词，被人们看作是严谨、精确的化身。但是随着社会的发展，人们要求数学研究和解决的问题也日益复杂，复杂的事物是难以精确化的，一个复杂的系统很难用精确的数学进行描述，例如过去曾有人用微分方程去计算小麦生长的规律和进行气象预报，结果都失败了。这意味着对一个复杂的系统，要求建立精确的数学模型是很困难的，甚至是不可能的．这就使数学在自身的发展中，遇到了如何分析和处理复杂系统的难题。实践表明，处理一个复杂系统，要求过分精确反倒模糊，而适当的模糊却可以达到精确的目的，就好像画家给一个满脸胡须的人画像，如果精确地把这个人的胡须一根根都画出来，就不成其为"像"了，这样的精确又有什么意义呢？而一些漫画家恰恰是采用了模糊的手法反而取得逼真的效果。所以突破经典数学的一些框框，是使数学得以继续发展的必然要求。其次，随着科学的发展，数学的应用领域也逐渐扩大，各门学科甚至过去与数学很少联系的学科如生物学、心理学等社会和人文学科都迫切要求数学化、定量化，而传统的数学却很难进入这些学科的大门，原因是这些学科的大多数概念都具有模糊性，而经典数学是无法描述和处理具有模糊性的概念的，因此需要有研究和处理具有模糊性概念的数学来为这些学科提供新的数学描述语言和工具，这就是我们所要介绍的模糊数学。所以模糊数学的诞生，是数学在自身发展过程中为适应社会需要的必然产物。但是，这并不意味着可以用模糊数学取代精确数学，更不是把已经很精确的数学变得模模糊糊。模糊数学虽然是研究和描述模糊性现象的一种数学工具，但它本身是精确的，是用精确的数学方法去描述和研究模糊性现象的，所以它是精确数学的延伸和推广，它把数学的研究和应用领域，从清晰现象扩大到模糊现象，使数学的发展，又上升到一个新的阶段。

再从计算机科学技术的发展来看，目前计算机的应用，已渗透到了自然科学、社会科学及人文科学的各个领域，今后计算机的发展将有以下三个方向：一个是传统意义上数值

分析中的应用。由于计算机运算的高速度及计算的高精度，是人们远远无法相比的，正是依靠计算机，人类才有可能实现宇宙航行和月球着陆。今后为了实现更大系统的模拟和复杂的科学计算，还需要发展用于数值分析的巨型和超巨型计算机；另一个方向是网络化。由于在信息检索、文件处理等方面需要进行大批量的数据处理，不仅要求计算机有巨大的存贮容量，还须要能够迅速、准确、方便地进行数据的存取，并能够充分发挥分散在各地的软、硬件及数据资源的作用，实现协同操作，提高可靠性。为了适应这一需要，计算机网络将会有较大的发展；第三个方向是人工智能，即用机器模拟人的智能，使计算机能部分的或大部分代替人脑力劳动。我们知道，人脑的思维可分为两类：一是形式化思维，具有逻辑的、循序的特点；二是模糊性思维，可同时进行综合的、整体的思考。对于前者用计算机模拟人的思维，已经取得许多可喜的成就，目前已经出现具有这方面智能的计算机，例如计算机下棋，有限的语言对话，数学定理的证明，编制计算机程序等，但是对于后者却是现在的计算机远远无法比拟的。

为了说明这个问题，不妨举两个例子。例如某电影演员在银幕上出现时，不管他的穿着打扮，演的是什么角色，熟悉他的观众会立刻认出他来，这种情况如果用计算机进行识别，就得测量这个人的身高体重、行走的姿势、速度等等一大批数据，而且还必须精确到小数点后面多少位才行，即使这样，还有可能闹出“翻脸不认人”的笑话来。再一个例子，日本著名的模式识别和人工智能专家渡边慧认为，有一个概念相应地就有一个物的集合，例如有狗的概念，就有狗的集合，给这个集合下定义有两种办法，一种是把狗的性质一一列出来，诸如狗是有四条腿的有毛动物，见到生人会汪汪叫等等，即用集合的内涵给集合下定义。另一种办法是把所有的狗都列出来，即用集合的外延给集合下定义。原则上讲这两种办法计算机都能够做得到。但是母亲把狗的概念教给孩子时，并未采用上述传统数学的两种方法，内涵和外延都不用，只是说这是狗，那不是狗，让孩子看几次以后就能区分了，母亲既没讲清狗的定义，也没把全世界的狗都牵来给孩子看，就教会孩子掌握了狗的概念。这就是人类思考事物独特之处，这正是人类智慧的具体表现，它表明人类不仅有处理模糊信息的能力，而且还有用模糊的手段处理精确信息的能力，这是当前的计算机远远不能做到的。因此当人们在研究人工智能时，面临着一个重大的课题就是如何使机器能像人那样去分析和处理现象的模糊性问题，它要求数学能为解决这样的问题提供新的理论，就在这种历史条件下，模糊数学顺应时代的需要，在计算机科学技术发展的催产下，作为数学领域的一个崭新分支诞生了。

二、模糊数学的发展概况及前景

1965 年，美国加利福尼亚大学查德教授（L.A.Zadeh）发表了著名的论文“模糊集合”，第一次引人注目地提出了模糊性问题，给出了模糊概念的定量表示法，模糊数学从此诞生了。

查德教授是著名的工程控制和系统论专家，长期来在检测、决策、控制以及有关的一系列重要问题的研究中，应用传统数学方法解决这类问题的成功和失败，使他看到传统数学方法的局限性，他指出：“在人类知识领域里，非模糊概念起主要作用的唯一部门只是古典数学，一方面，使数学具有其他学科所无法与之比拟的一种美、力量和广泛性，另一

方面，却也限制了它在模糊性起显著作用的领域里的作用，特别是人文系统，这里人类的判断、感觉和情绪起重要作用。”“如果深入研究人类的认识过程，我们将发现人类运用模糊概念是一个巨大财富而不是负担，这一点是理解人类智能和机器智能之间深奥区别的关键”。

模糊概念可以用模糊集合来定义，查德就是抓住这一点首先在模糊集合的定量描述上取得突破。

一个新生事物的成长不是一帆风顺的，模糊数学也是如此，在它刚刚出现的时候，几乎没有得到人们的理解和重视，而持怀疑和反对态度的人却不少。甚至到 1974 年查德去巴黎参加国际数学会议时，还有人公开说：“模糊数学是数学的倒退”。但是就在同一年，英国工程师马丹尼却把模糊数学成功地应用到工业控制上。此后模糊集合的概念才逐渐被人们所认识，有关这方面的研究迅速发展，每年召开的国际性学术会议次数不断增加，学术论文的数量成倍增长，模糊数学的应用成果也日愈增多并扩大到很多领域。模糊数学虽然只有短短 20 多年的历史，但它打入了经典数学无力顾及的模糊领域，大大扩展了应用范围，增强了生命力。利用隶属函数可以建立反映模糊现象的数学模型，目前已研制成功的 FSDTS 系统语言，就有可能将模糊语言编制程序输入计算机，使人工智能向前迈进了可喜的一步。对于过去不能应用数学的一些学科，应用模糊数学也取得了明显的效果，例如计算机诊病应用了模糊数学，治疗效率有的竟达 97%。现在模糊数学研究或应用的领域有：语言、自动机、系统工程、信息检索、自动控制、图象识别、故障诊断、逻辑、决策、人工智能以至生物、医学、社会、心理、拓扑、网络等领域，它的发展和应用之广泛超过了许多应用数学分支。

我国于 1976 年出现第一篇介绍模糊集合论的文章，此后举办过不少次有关这方面的讲座和学术讨论会，我国学者在模糊拓扑方面的研究工作在国际上处于领先地位，在气象预报、中医诊断、农业规划、环境检测等方面，模糊数学的应用也取得了较好的成果，而且这方面的科技队伍不断壮大，对模糊数学的理论研究及开拓应用领域，必将起到更大的推动作用。

模糊数学还处在幼年时期，不很完善，也还存在一些缺点，以致现在还有一些学者对模糊数学持保留甚至否定的态度，他们对模糊数学的指摘，主要论点如下：

1．确定隶属函数的方法，用得最多的仍然是主观判定或统计方法，这些方法都有局限性且根据不够充分。

2．至今还没有建立完善的公理系统。模糊数学中很多内容是从经典数学移植过来的，没有经过证明，因此不够严谨。

我们知道，从牛顿到希尔伯特，经过 200 多年才产生一套数学分析的公理系统，模糊数学仅有 20 多年的历史，不够成熟和完整是可以理解的，这就要求人们需要更深入地进行系统的理论研究。但是，模糊数学在实践中经受了考验，实践证明它是最有生命力的学科之一，它具有广阔的应用前景，它的出现必将导致数学的一次更为深刻的变革。

三、模糊数学与经典数学及统计数学的关系

模糊数学是一门新的数学分支，它的诞生使许多学者预测今后的数学将分成三大类，

即经典数学、统计数学与模糊数学。经典数学是研究确定性现象的数学，而统计数学和模糊数学则是研究非确定性现象的数学，后两者又有本质上的不同，主要区别如下：

1．统计数学是研究和处理随机性的问题。所谓随机性是对事件的发生与否而言，由于条件不充分，事件可能发生也可能不发生，即事件的发生存在一定的概率，但事件本身的含义是明确的。例如抛掷一枚伍分的硬币，国徽是否朝上是无法确定的，也就是随机的，但国徽的含义是明确的，我们可以通过多次抛掷得出国徽朝上的概率。统计数学的诞生使数学的研究和应用范围从必然现象扩大到偶然现象的领域。模糊数学是研究和处理模糊性现象的数学，在这里事件本身的含义就是不明确的，但事件发生与否则是明确的。例如“张三的病不轻”，张三有病是确定的了，但病重到什么程度却是不明确的，需要用隶属函数来刻画这种不确定性。

2．统计数学和经典数学一样，都是以经典集合论为理论基础，因此满足互补律，而模糊数学摒弃了“非此即彼”的确定性，表现出“亦此亦彼”的模糊性，因此是不满足互补律的。

3．统计数学把数学应用的领域从必然现象扩大到偶然现象，而模糊数学则把数学应用的领域从清晰现象扩大到模糊现象。

总之统计数学研究和处理随机性，模糊数学研究处理模糊性，两者都属于不确定数学，相互既有联系，又有本质上的不同。它们互相促进，相辅相成，使数学这一瑰丽的百花园，开放出更为绚丽多彩的花朵。

第一章　经典集合论基础

§1.1　集合及其表示方法

集合，如同几何学中的点、线、面一样是数学的最基本概念，很难再用其他概念给以精确定义。我们不妨理解为所谓集合是由具有明确涵义的事物（或称个体）组成的集体。集合里的每一事物，称为该集合的成员或元素。所谓事物，涵义也是广泛的，它可以是具体的东西，也可以是抽象的概念。例如地球上所有的人构成一个集合，每个人是该集合的元素。进行某项工程建设时制定的各种方案构成一个集合，每个方案是该集合的元素。等等。

通常用大写字母 $A,B,\cdots,S$ 表示集合，用小写字母 $a,b,\cdots$，x,y,z 表示集合的元素。如果 a 是集合 S 的元素，则称 a 属于 S，记作 $a\in S$。如果 a 不是集合 S 的元素，则称 a 不属于 S，记作 $a\notin S$。对任一元素 a 与任一集合 S 来说，或者 $a\in S$，或者 $a\notin S$，两者必居其一而且只居其一，这就是经典集合论的基本特征。

一个集合 A 如果由有限个元素构成，则称为有限集合。有限集合 A 所含（不同）元素的数目，称为集合 A 的基数，记作 $|A|$（或 $\# A$），不是有限集合的集合，称为无限集合。

可以用下列五种表达式描述一个集合：

（1）列举法：将集合的元素全部列出，这种方法称为全列法。如果只列出部分元素也能表达出集合的特征，其余元素不再列出而用…表示，则称为简列法。

（2）构造法：写出作为集合的元素应具备的条件，用它表示集合的特征。

（3）归纳法：用递归定义描述集合。

（4）特征函数法：见本章§1.5。

（5）通过某些集合的运算表示一个集合，见本章§1.2。

以上五种表示法中以（1），（2）两种用得最多。

例 1.1　设集合 S 是由1到10的十个自然数所构成，试用上述的前三种方法写出集合的表达式。

解（1）全列法 $S=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$，

简列法 $S=\{1,2,\cdots,10\}$；

（2）构造法 $S=\{x\,|\,x\text{是自然数且}1\leqslant x\leqslant 10\}$；

（3）归纳法 $S=\{x_{i+1}=x_i+1,\ i=1,\cdots,9,x_1=1\}$。

定义 1.1　设 A 和 B 是两个集合，如果 B 的所有元素都是 A 的元素，则称 B 是 A 的子集，或称集合 B 包含于集合 A 中，记作 $B\subseteq A$。如 B 是 A 的子集，而 A 至少有一个元素不是 B 的元素，则称 B 是 A 的真子集，或称集合 B 真包含于集合 A 中，记作 $B\subset A$。

由定义可知，任何一个有限集合 S 都是自已的子集但不是真子集，即 $S\subseteq S$ 但 $S\not\subset S$。而且如 $B\subseteq A$ 且 $A\subseteq C$，则必有 $B\subseteq C$。

定义 1.2 当且仅当$A\subseteq B$且$B\subseteq A$时，称集合A与集合B是相等的，记作$A=B$，即

$$A=B\Leftrightarrow A\subseteq B\text{且}B\subseteq A。$$

对有限集合来说，如果两个集合含有完全相同的元素，则它们是相等的。

定义 1.3 不含任何元素的集合称为空集合，简称空集，用$\varnothing$表示。

定理 1.1 空集是任一集合的子集。即对任意集合A，均有$\varnothing\subseteq A$。

证 用反证法，设$\varnothing\nsubseteq A$，则一定存在一个元素x，有$x\in\varnothing$但$x\notin A$，但$x\in\varnothing$与$\varnothing$的定义矛盾，假设不能成立，故有$\varnothing\subseteq A$。（证毕）

定理 1.2 空集是唯一的。

证 用反证法，设有两个空集$\varnothing$和$\varnothing'$，根据定理1.1，应有$\varnothing\subseteq\varnothing'$及$\varnothing'\subseteq\varnothing$，因此$\varnothing'=\varnothing$，所以空集是唯一的。 （证毕）

定义 1.4 一个非空集合A，至少有两个子集$\varnothing$和A，称$\varnothing$和A为集合A的平凡子集。

定义 1.5 给定一个集合，如果所讨论的任一集合都是它的子集，则称该集合为全集合，简称全集，用U表示。

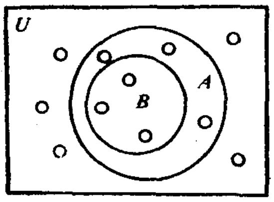

图 1·1

从定义可知我们所讨论的所有元素都是属于全集U的，以后常把全集U称为我们所讨论问题的论域。

常用一种叫文氏图的图形来表示有限集合，如图1.1所示，用一矩形区域表示全集U，其余集合均在U内用圆形区域表示，区域内的小园圈表示该集合的元素，如集合B的区域处在集合A的区域内，表示B是A的子集。

定义 1.6 以集合A的所有子集为元素构成的集合，称为A的幂集，记作$P(A)$，即

$$P(A)=\{X\mid X\subseteq A\}$$

例 1.2 设$A=\{a,b\}$则

$$P(A)=\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$$

定理 1.3 如有限集合A有n个元素，则它的幂集$P(A)$有2^n个元素。

证 $P(A)$的元素数目是A的子集数。在集合A中任取一个元素构成的子集有C_n^1个，任取两个元素构成的子集有C_n^2个，依此类推直到取n个元素构成的子集有C_n^n个，此外还有一个空集$\varnothing$也是A的子集，所以

$$|P(A)|=1+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n=\sum_{i=0}^{n}C_n^i$$

由二项式定理 $(x+y)^n=\sum\limits_{i=0}^{n}C_n^i\cdot x^i\cdot y^{n-i}$。

令 $x=y=1$，得 $2^n=\sum\limits_{i=0}^{n}C_n^i$

故 $|P(A)|=2^n$。 （证毕）

§1.2 集合的运算

这一节我们将用代数的方法研究集合，先定义集合的几种运算，然后介绍运算的一些

基本公式。

定义 1.7 设A和B是任意两个集合。

（1）由A和B所有相同元素构成的集合，称为A和B的交集，记作$A\cap B$，即

$$A\cap B=\{x|x\in A\text{ 且 }x\in B\}$$

（2）由属于A或属于B的元素构成的集合，称为A与B的并集，记作$A\cup B$，即

$$A\cup B=\{x|x\in A\text{或 }x\in B\}$$

（3）由属于A但不属于B的元素构成的集合，称为A对B的差集，记作$A-B$，即

$$A-B=\{x|x\in A\text{但 }x\notin B\}$$

定义 1.8 如果集合A和集合B没有共同元素，则称A和B不相交，或称A和B的交集为空集，写成$A\cup B=\varnothing$

定义 1.9 全集U对集合A的差集$U-A$，称为A的补集，记作A^c，即

$$A^c=U-A=\{x|x\in U\text{但 }x\notin A\}$$

上面定义的几种运算，可以用文氏图表示出来，图 1.2 所示。

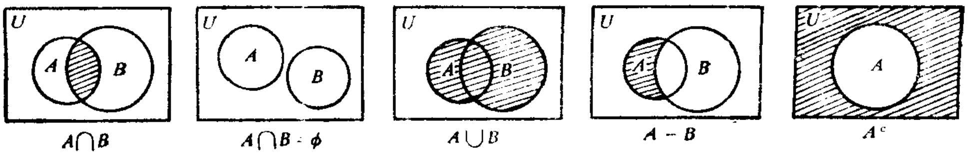

图 1.2

例 1.3 设$U=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$，$A=\{2,4,5,6\}$，$B=\{1,2,5,7\}$，则

$$A\cap B=\{2,4,5,6\}\cap\{1,2,5,7\}=\{2,5\}$$

$$A\cup B=\{2,4,5,6\}\cup\{1,2,5,7\}=\{1,2,4,5,6,7\}$$

$$A-B=\{2,4,5,6\}-\{1,2,5,7\}=\{4,6\}$$

$$B-A=\{1,2,5,7\}-\{2,4,5,6\}=\{1,7\}$$

$$A^c=U-A=\{1,3,7,8\}$$

定理 1.4 （集合运算的基本定律）设U为全集，A,B,C为U的任意子集，下列等式成立

（1）幂等律 $A\cap A=A,\ A\cup A=A$ （1.1）

（2）结合律 $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$ （1.2）

$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$ （1.3）

（3）交换律 $A\cap B=B\cap A,\ A\cup B=B\cup A$ （1.4）

（4）分配律 $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$ （1.5）

$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$ （1.6）

（5）互补律 $A\cap A^c=\varnothing,\ A\cup A^c=U$ （1.7）

（6）同一律 $A\cap U=A,\ A\cup\varnothing=A$ （1.8）

（7）零一律 $A\cap\varnothing=\varnothing,\ A\cup U=U$ （1.9）

（8）吸收律 $A\cap(A\cup B)=A,\ A\cup(A\cap B)=A$ （1.10）

（9）德·摩根律 $(A\cap B)^c=A^c\cup B^c$ （1.11）

$(A\cup B)^c=A^c\cap B^c$ （1.12）

（10）双重否定律 $(A^c)^c=A$ （1.13）

（11）其他　$U^c=\varnothing$，$\varnothing^c=U$　　(1.14)

以上公式直接验证即得。

下面介绍一种特殊形式的集合——卡氏积

定义 1.10　任意两个元素 a，b 按次序排列形成的序列，称为序偶，记作 (a,b)。

由定义可知序偶（a，b）表示 a 排在第一位，b 在第二位，因此 $(a,b)\neq\{a,b\}$。一般情况下 $(a,b)\neq(b,a)$，当且仅当 $a=b$ 时，才有 $(a,b)=(b,a)$。当且仅当 $a=c$ 及 $b=d$ 时，才有 $(a,b)=(c,d)$。

定义 1.11　集合 A 和 B 的笛卡尔乘积（简称卡氏积或直积）用 $A\times B$ 表示，它是以序偶 (x,y) 为元素构成的集合，其中 x 取自集合 A，y 取自集合 B，即

$$A\times B=\{(x,y)\mid x\in A,\ y\in B\}$$

例 1.4　设 $A=\{1,2\}$，$B=\{a,b,c\}$，求 $A\times B$，$B\times A$，$A\times A$。

解　$A\times B=\{1,2\}\times\{a,b,c\}$

$=\{(1,a),(1,b),(1,c),(2,a),(2,b),(2,c)\}$

$B\times A=\{a,b,c\}\times\{1,2\}$

$=\{(a,1),(a,2),(b,1),(b,2),(c,1),(c,2)\}$

$A\times A=\{1,2\}\times\{1,2\}$

$=\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}$

笛卡尔乘积具有如下性质：

（1）交换律不成立，即 $A\times B\neq B\times A$

（2）结合律不成立，即 $A\times(B\times C)\neq(A\times B)\times C$

（3）下列分配律成立：

（a）$A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$　　(1.15)

（b）$A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$　　(1.16)

（c）$(A\cup B)C=(A\times C)\cup(B\times C)$　　(1.17)

（d）$(A\cap B)\times C=(A\times C)\cap(B\times C)$　　(1.18)

（4）若 $C\neq\varnothing$ 则

$A\subseteq B\Leftrightarrow(A\times C\subseteq B\times C)\Leftrightarrow(C\times A\subseteq C\times B)$。　　(1.19)

（5）设 A,B,C,D 是四个非空集合，则

$A\times B\subseteq C\times D$ 当且仅当 $A\subseteq C$ 且 $B\subseteq D$

由卡氏积的定义，容易得到卡氏积的基数公式如下：

$$|A\times B|=|A|\cdot|B| \tag{1.20}$$

由两个集合卡氏积的定义，可以推广到多个集合上去。设 $A_1,A_2,\cdots A_n$ 是 n 个集合，则

$$A_1\times A_2\times\cdots\times A_n=\{(x_1,x_2,\cdots x_n)\mid x_1\in A_1,x_2\in A_2,\cdots,x_n\in A_n\}$$

此时

$$|A_1\times A_2\times\cdots\times A_n|=|A_1|\cdot|A_2|\cdot\cdots\cdot|A_n|$$

§1.3　关系及其性质

关系是客观世界存在的普遍现象，它描述了事物之间存在的某种联系，例如人与人之