运筹学随机模型

严 颖 成世学 程 侃 编著

运筹学随机模型

严 颖 成世学 程 侃 编著

中国人民大学出版社

（京）新登字 156 号

图书在版编目（CIP）数据

运筹学随机模型/严颖等编著.
北京：中国人民大学出版社，1995.
ISBN 7-300-01992-7/o·33
Ⅰ. 运…
Ⅱ. 严…
Ⅲ. 运筹学-随机-数学模型
Ⅳ. o22

中国版本图书馆 CIP 数据核字（95）第 0225 号

运筹学随机模型
严 颖 成世学 程 侃 编著

出 版：中国人民大学出版社
（北京海淀路 175 号 邮码 100872）
发 行：新华书店总店北京发行所
印 刷：中国人民大学出版社印刷厂

开本：850×1168 毫米 1/32 印张：15
1995 年 6 月第 1 版 1995 年 6 月第 1 次印刷
字数：373 000 册数：1-3 000

定价：15.00 元

序　言

运筹学中的随机模型与方法是运筹学理论与应用的重要组成部分。它是对随机现象建立数学模型、进行定性与定量分析以及最优化的一个重要工具。在运筹学近 90 年的近代发展史中，形成了各具研究特色但又互相紧密联系的学科分支，例如排队论、库存论、可靠性、决策与对策、搜索论以及模拟等。这些分支以概率统计、随机过程理论等作为其基础与工具，构筑成了变化多端的随机模型。

《运筹学随机模型》一书是作者们根据多年来教学与研究的经验编著而成的。目的是试图在不大的篇幅内较系统地介绍运筹学中的主要随机分支。为了使内容适合更广的读者面(应用数学、运筹学、管理科学、工业工程或工程技术人员等)，我们在前面六章中给出了必要的准备知识与研究工具，在第一章中补充了一些概率论的知识，如条件期望等。第二到六章介绍随机过程，其中包括Poisson过程，更新过程，马尔科夫链与过程，以及鞅论初步。为了避免篇幅过长，有些定理只给出叙述而略去其证明。我们往往通过结果的直观解释来阐明定理的意义，以便帮助读者理解及更好地应用。从第七到十二章分别介绍排队论、库存模型、可靠性模型、模拟方法、马尔科夫决策规划以及随机序。在各章中读者都会发现一些较新的内容。例如鞅论一章中关于期权值的界；排队论一章中关于 M/M/S 系统稳态下的输出过程，排队网络以及

排队控制问题；库存论中具有概率约束的模型，基于安全库存量的模型；模拟一章中关于随机过程的模拟及减少方差的一些技巧；随机序在经济分析及决策中的应用等。此外，每章都附有一定数量的习题帮助读者熟悉掌握所述内容。

本书是由三位作者共同撰写而成的。第一、二、三、八、十二章由严颖执笔，第四、五、六、十一章由成世学执笔，第七、九、十章由程侃执笔。最后由程侃负责统纂。

本书的写作得到国家自然科学基金的资助，以及胡兴卫、江晓岳、王文玮等同志的协助，中国人民大学出版社为本书的出版做了大量工作，在此一并表示感谢。

作者

1994 年 4 月

目　录

第一章　预备知识

运筹学随机模型以概率论作为其主要基础知识，为此，我们首先回顾初等概率论中的重要概念，并在某些方面作些拓展，以满足后面章节的需要。

§1　随机变量及其分布

记随机试验的基本结果为 ω，称作样本点，记 $\Omega=\{\omega\}$，称作样本空间。设 X 为 Ω 到 R^1 的映射，并且满足，$\forall\ x\in R^1$，随机事件 $\{\omega: X(\omega)\leqslant x\}$ 都有概率可言，则称 X 为随机变量，简记为 rv$X$。函数

$$F(x)=P\{X\leqslant x\}, x\in R^1 \tag{1.1}$$

称作 rv$X$ 的分布函数。

如果有函数 $f(x)$ 满足

$$\forall\ x\in R^1,\ F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt \tag{1.2}$$

则称 $f(x)$ 为 rv$X$ 或其分布函数 $F(x)$ 的分布密度。

如果 X 具有分布密度，则称 X 为连续型随机变量。

如果 X 最多以正概率取可列个值，则称 X 为离散型随机变量。

(1.1) 中定义的分布函数具有以下性质：

$$F(-\infty) = \lim_{x \to -\infty} F(x) = 0 \tag{1.3}$$

$$F(+\infty) = \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1 \tag{1.4}$$

$$\forall\ x_1 < x_2, F(x_1) \leqslant F(x_2) \quad (\text{单调升}) \tag{1.5}$$

$$\lim_{x \to x_0^+} F(x) = F(x_0) \quad (\text{右连续}) \tag{1.6}$$

性质(1.3)—(1.6) 在一般初等概率论教程中都可以找到。

在本书中，有时我们允许随机变量取值 $+\infty$，见例 1.1。

例 1.1　假设对某个系统进行周期观测，并把一个周期取作时间的量度单位。设系统有三个可能的状态，记作 1，2，3。记时刻 n 系统所处的状态为 X_n，并知：对于 $n = 0,1,2,\cdots$，有

$$\begin{aligned}
&P(X_{n+1} = 1 | X_n = 1) = 1 \\
&P(X_{n+1} = 1 | X_n = 2) = \frac{1}{2} \\
&P(X_{n+1} = 2 | X_n = 2) = \frac{1}{6} \\
&P(X_{n+1} = 3 | X_n = 2) = \frac{1}{3} \\
&P(X_{n+1} = 1 | X_n = 3) = \frac{1}{3} \\
&P(X_{n+1} = 2 | X_n = 3) = \frac{3}{5} \\
&P(X_{n+1} = 3 | X_n = 3) = \frac{1}{15}
\end{aligned} \tag{1.7}$$

由上述条件概率可以看出，如果系统在某个时刻 n 处于状态 1，那么以后便一直留在状态 1。这样的状态称作吸收状态。

设 $X_0 = 2$。记系统由状态 2 出发，首次到达状态 3 的时间为 T_1。则由(1.7) 中所给条件概率有

$$P(T_1 = k) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^{k-1},\ k = 1,2,\cdots$$

求和可得

$$P(T_1<+\infty)=\sum_{k=1}^{\infty}P(T_1=k)=\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{\infty}(\frac{1}{6})^{k-1}=\frac{2}{5}$$

这一概率小于1，即系统由状态2出发，经过任意有限个周期的转移，有可能（概率为$\frac{3}{5}$）始终不能到达状态3。这时我们定义$T_1=+\infty$。易见

$$P(T_1=+\infty)=1-P(T_1<\infty)=1-\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$$

如果$X_0=3$，记系统由状态3出发首次返回状态3的时间为T_2，由(1.7)有

$$P(T_2=1)=\frac{1}{15}$$

$$P(T_2=k)=\frac{3}{5}(\frac{1}{6})^{k-2}(\frac{1}{3}),\ k=2,3,\cdots$$

$$\begin{aligned}P(T_2<+\infty)&=P(T_2=1)+\sum_{k=2}^{\infty}P(T_2=k)\\&=\frac{1}{15}+\frac{1}{5}\sum_{k=2}^{\infty}(\frac{1}{6})^{k-2}=\frac{23}{75}\end{aligned}$$

于是

$$P(T_2=+\infty)=\frac{52}{75}$$

由上例看出，为了处理实际问题的需要，确实应该允许随机变量取∞。由于在运筹学中我们主要面对非负随机变量，所以只允许随机变量取$+\infty$也就够用了。

在随机变量取$+\infty$的概率大于零的情况下，其分布函数不满足通常分布函数的正则化性质，即(1.4)不成立。这时有$F(+\infty)<1$。记例1.1中T_1的分布函数为$F(x)=P(T_1\leqslant x)$，有

$$\begin{aligned}F(+\infty)&=\lim_{x\to+\infty}F(x)=\lim_{x\to+\infty}P(T_1\leqslant x)\\&=P(T_1<+\infty)=\frac{2}{5}<1\end{aligned}$$

§2 随机变量的数字特征

随机变量的概率分布能够提供关于随机变量的全面信息。但由于一般情况下随机变量可以取到的数值比较多，人们难以通过其概率分布来把握一个随机变量的总体情况。数字特征是反映随机变量综合特性的数量指标。例如，数学期望是随机变量的加权平均值，方差是反映随机变量取值分散程度的数量指标等。

2.1 离散与连续随机变量的矩

设离散随机变量 X 的概率分布为 $P\{X=x_i\}=p_i, i=1,2,\cdots$，那么 X 的 k 阶原点矩定义为

$$EX^k=\sum_{i=1}^{\infty}x_i^k p_i,\quad k=1,2,\cdots \tag{2.1}$$

一阶原点矩 EX 就是 X 的数学期望。X 的 k 阶中心矩定义为

$$E(X-EX)^k=\sum_{i=1}^{\infty}(X_i-EX)^k p_i,\ k=1,2,\cdots \tag{2.2}$$

假设(2.1)、(2.2) 右端级数均绝对收敛。二阶中心矩就是 X 的方差。

若 X 为连续随机变量，设其分布密度为 $f(x)$，分布函数为 $F(x)$，那么 X 的 k 阶原点矩定义为($k=1,2,\cdots$)

$$EX^k=\int_{-\infty}^{\infty}x^k f(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty}x^k dF(x) \tag{2.3}$$

k 阶中心矩定义为

$$\begin{aligned}E(X-EX)^k&=\int_{-\infty}^{\infty}(x-EX)^k f(x)dx\\&=\int_{-\infty}^{\infty}(x-EX)^k dF(x)\end{aligned} \tag{2.4}$$

假设(2.3)、(2.4) 右端积分绝对收敛。

定义(2.1)—(2.4) 均是初等概率论中熟知的。本书后面的内容要求我们突破随机变量要么离散，要么连续的限制，即需要考虑