



运筹学随机模型

严 颖 成世学 程 侃 编著



运筹学随机模型

严颖 成世学 程侃 编著

中国人民大学出版社

(京) 新登字 156 号

图书在版编目 (CIP) 数据

运筹学随机模型/严颖等编著.

北京: 中国人民大学出版社, 1995.

ISBN 7-300-01992-7/o · 33

I. 运…

I. 严…

III. 运筹学-随机-数学模型

IV. o22

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (95) 第 0225 号

运筹学随机模型

严颖 成世学 程侃 编著

出版: 中国人民大学出版社
(北京海淀路 175 号 邮码 100872)

发行: 新华书店总店北京发行所

印刷: 中国人民大学出版社印刷厂

开本: 850×1168 毫米 1/32 印张: 15
1995 年 6 月第 1 版 1995 年 6 月第 1 次印刷
字数: 373 000 册数: 1-3 000

定价: 15.00 元

序 言

运筹学中的随机模型与方法是运筹学理论与应用的重要组成部分。它是对随机现象建立数学模型、进行定性与定量分析以及最优化的一个重要工具。在运筹学近 90 年的近代发展史中，形成了各具研究特色但又互相紧密联系的学科分支，例如排队论、库存论、可靠性、决策与对策、搜索论以及模拟等。这些分支以概率统计、随机过程理论等作为其基础与工具，构筑成了变化多端的随机模型。

《运筹学随机模型》一书是作者们根据多年来教学与研究的经验编著而成的。目的是试图在不大的篇幅内较系统地介绍运筹学中的主要随机分支。为了使内容适合更广的读者面（应用数学、运筹学、管理科学、工业工程或工程技术人员等），我们在前面六章中给出了必要的准备知识与研究工具，在第一章中补充了一些概率论的知识，如条件期望等。第二到六章介绍随机过程，其中包括 Poisson 过程，更新过程，马尔科夫链与过程，以及鞅论初步。为了避免篇幅过长，有些定理只给出叙述而略去其证明。我们往往通过结果的直观解释来阐明定理的意义，以便帮助读者理解及更好地应用。从第七到十二章分别介绍排队论、库存模型、可靠性模型、模拟方法、马尔科夫决策规划以及随机序。在各章中读者都会发现一些较新的内容。例如鞅论一章中关于期权值的界；排队论一章中关于 $M/M/S$ 系统稳态下的输出过程，排队网络以及

排队控制问题；库存论中具有概率约束的模型，基于安全库存量的模型；模拟一章中关于随机过程的模拟及减少方差的一些技巧；随机序在经济分析及决策中的应用等。此外，每章都附有一定数量的习题帮助读者熟悉掌握所述内容。

本书是由三位作者共同撰写而成的。第一、二、三、八、十二章由严颖执笔，第四、五、六、十一章由成世学执笔，第七、九、十章由程侃执笔。最后由程侃负责统纂。

本书的写作得到国家自然科学基金的资助，以及胡兴卫、江晓岳、王文玮等同志的协助，中国人民大学出版社为本书的出版做了大量工作，在此一并表示感谢。

作者

1994年4月

目 录

第一章 预备知识.....	1
§ 1 随机变量及其分布	1
§ 2 随机变量的数字特征	4
2.1 离散与连续随机变量的矩	4
2.2 随机变量的矩与 Riemann-Stieltjes 积分	5
§ 3 条件数学期望	8
3.1 定义	8
3.2 条件数学期望的性质	11
§ 4 独立随机变量和的分布	16
§ 5 母函数与 Laplace-Stieltjes 变换	19
§ 6 随机变量序列的收敛概念与极限定理	22
习题一	24
参考文献	26
第二章 Poisson 过程	27
§ 1 引言	27
§ 2 时齐 Poisson 过程的定义	29
§ 3 Poisson 过程的基本性质	35
3.1 年龄与剩余寿命	35
3.2 到达时的条件分布	38

§ 4	复合 Poisson 过程	45
§ 5	条件 Poisson 过程	47
§ 6	非时齐 Poisson 过程	48
	习题二	55
	参考文献	57
第三章	更新过程	58
§ 1	更新过程的定义	58
§ 2	更新函数与更新方程	60
§ 3	更新函数的计算	66
§ 4	极限性质	68
§ 5	更新过程的推广	79
	5.1 交替更新过程	79
	5.2 延迟更新过程与平衡更新过程	80
§ 6	更新报酬过程	83
§ 7	离散更新过程	86
	习题三	94
	参考文献	98
第四章	马尔科夫链	99
§ 1	引言	99
§ 2	基本定义与性质	100
§ 3	状态的分类	109
§ 4	状态空间的分解	117
§ 5	转移概率的极限性质	126
	5.1 首达概率 f_{ij} 的计算	126
	5.2 转移概率的极限性质	131
§ 6	平稳分布	143

习题四	152
参考文献	157
第五章 可数状态的马尔科夫过程	158
§ 1 引言	158
§ 2 定义与基本性质	158
§ 3 转移概率函数的分析性质	161
§ 4 样本函数的性质	167
§ 5 状态分类与平稳分布	172
§ 6 生灭过程	178
习题五	188
参考文献	191
第六章 鞅论	192
§ 1 引言	192
§ 2 定义与例	193
§ 3 停时定理及其应用	203
3.1 鞅与上鞅的停时定理	203
3.2 关于期权值的界	212
§ 4 鞅的收敛定理	216
习题六	222
参考文献	226
第七章 排队论	227
§ 1 引言	227
1.1 排队模型的描述	228
1.2 排队模型的记号	229
1.3 排队论研究的问题	230

§ 2	一般性结论	231
2.1	稳态概率的有关结果	231
2.2	Little 公式	233
§ 3	M/M/1 模型	235
3.1	稳态结果	235
3.2	瞬时结果	240
§ 4	M/M/c/k 模型	242
4.1	M/M/c/k 模型的稳态结果	242
4.2	稳态下 M/M/c 的输出过程	247
§ 5	排队网络	249
5.1	串联排队网络	249
5.2	Jackson 开网络	250
5.3	Jackson 闭网络	256
5.4	循环排队网络	259
§ 6	M/G/1 模型	260
6.1	M/G/1 的嵌入 MC	260
6.2	稳态下的特征量	265
6.3	逗留时间与等待时间分布	267
6.4	忙期分布	268
§ 7	G/M/1 模型	271
7.1	G/M/1 的嵌入 MC	271
7.2	稳态结果	275
§ 8	简单的排队控制模型	277
8.1	N 策略模型	278
8.2	T 策略模型	281
8.3	N 策略与 T 策略的比较	282
	习题七	283
	参考文献	286

第八章 库存模型	288
§ 1 引言	288
1.1 研究库存问题的意义	288
1.2 库存问题的描述	288
§ 2 周期随机库存模型	291
2.1 单周期模型	291
2.2 多周期动态模型	296
2.3 多品种单周期模型	297
2.4 具有概率约束的模型	303
§ 3 基于稳态分析的随机库存模型	305
3.1 单个需求连续盘点模型	305
3.2 周期盘点模型	309
§ 4 基于安全库存量的模型	314
4.1 (s, Q) 订货策略, Q 已知	315
4.2 多种货物安全库存决策的比较	320
4.3 (s, Q) 订货策略, s, Q 都未知	323
习题八	326
参考文献	328
第九章 可靠性模型	329
§ 1 可靠性的定量指标	330
1.1 不可修复系统	330
1.2 可修复系统	331
§ 2 典型的不可修系统分析	332
2.1 串联及并联系统	332
2.2 $k/n (F)$ 系统	333
2.3 有备件的系统	334
§ 3 马尔科夫型可修系统模型	337

3.1	有限状态马尔科夫过程的回顾	337
3.2	一般马尔科夫型可修系统分析	339
§ 4	例	345
4.1	两部件并联系统	345
4.2	r 个修理工的 k/n (F) 系统	349
§ 5	可靠性中的更新过程模型	353
5.1	n 部件串联系统	353
5.2	两部件冷备系统	354
5.3	两部件热备系统	358
§ 6	维修策略介绍	363
6.1	按年龄更换策略	363
6.2	成批更换策略	365
6.3	有小修的定期更换策略	367
	习题九	370
	参考文献	372

第十章	模拟	373
§ 1	引言	373
§ 2	随机数的产生	374
§ 3	随机变量的模拟	376
3.1	反变换法	376
3.2	舍选法	377
3.3	连续随机变量的模拟	380
3.4	离散随机变量的模拟	386
3.5	随机向量的模拟	389
§ 4	随机过程的模拟	390
4.1	Poisson 过程的模拟	390
4.2	非时齐 Poisson 过程的模拟	391

4.3	MC 及 MP 的模拟	393
§ 5	减小方差的技术及模拟精度估计	394
5.1	减小方差的技术	394
5.2	模拟精度的估计	402
§ 6	系统模拟的一个简单例子	403
	习题十	405
	参考文献	408
第十一章	马尔科夫决策规划	409
§ 1	引言	409
§ 2	离散时间 MDP 的数学描述	410
2.1	模型	410
2.2	马尔科夫决策过程与目标	412
§ 3	有限阶段模型	415
§ 4	无限阶段折扣模型	427
4.1	预备知识	427
4.2	策略迭代法	429
	习题十一	440
	参考文献	444
第十二章	随机序及其应用	445
§ 1	引言	445
1.1	随机序	445
1.2	Markwitz 模型	447
§ 2	效用函数类 U_1, U_2 与随机序 FSD, SSD	448
2.1	效用函数类 U_1, U_2	448
2.2	随机序 FSD, SSD	451
2.3	随机向量及过程的比较	457

§ 3 风险厌恶度与三阶随机序	459
3.1 绝对与相对风险厌恶度	459
3.2 递减绝对风险厌恶度与 $u'''(x)$	461
§ 4 似然比序及其应用	463
习题十二	465
参考文献	466

第一章 预备知识

运筹学随机模型以概率论作为其主要基础知识，为此，我们首先回顾初等概率论中的重要概念，并在某些方面作些拓展，以满足后面章节的需要。

§ 1 随机变量及其分布

记随机试验的基本结果为 ω ，称作样本点，记 $\Omega = \{\omega\}$ ，称作样本空间。设 X 为 Ω 到 R^1 的映射，并且满足， $\forall x \in R^1$ ，随机事件 $\{\omega: X(\omega) \leq x\}$ 都有概率可言，则称 X 为随机变量，简记为 rvX 。函数

$$F(x) = P\{X \leq x\}, x \in R^1 \quad (1.1)$$

称作 rvX 的分布函数。

如果有函数 $f(x)$ 满足

$$\forall x \in R^1, F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt \quad (1.2)$$

则称 $f(x)$ 为 rvX 或其分布函数 $F(x)$ 的分布密度。

如果 X 具有分布密度，则称 X 为连续型随机变量。

如果 X 最多以正概率取可列个值，则称 X 为离散型随机变量。

(1.1) 中定义的分布函数具有以下性质：

$$F(-\infty) = \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0 \quad (1.3)$$

$$F(+\infty) = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1 \quad (1.4)$$

$$\forall x_1 < x_2, F(x_1) \leq F(x_2) \quad (\text{单调升}) \quad (1.5)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} F(x) = F(x_0) \quad (\text{右连续}) \quad (1.6)$$

性质(1.3)–(1.6)在一般初等概率论教程中都可以找到。

在本书中,有时我们允许随机变量取值 $+\infty$, 见例 1.1。

例 1.1 假设对某个系统进行周期观测, 并把一个周期取作时间的量度单位。设系统有三个可能的状态, 记作 1, 2, 3。记时刻 n 系统所处的状态为 X_n , 并知: 对于 $n = 0, 1, 2, \dots$, 有

$$\begin{aligned} P(X_{n+1} = 1 | X_n = 1) &= 1 \\ P(X_{n+1} = 1 | X_n = 2) &= \frac{1}{2} \\ P(X_{n+1} = 2 | X_n = 2) &= \frac{1}{6} \\ P(X_{n+1} = 3 | X_n = 2) &= \frac{1}{3} \\ P(X_{n+1} = 1 | X_n = 3) &= \frac{1}{3} \\ P(X_{n+1} = 2 | X_n = 3) &= \frac{3}{5} \\ P(X_{n+1} = 3 | X_n = 3) &= \frac{1}{15} \end{aligned} \quad (1.7)$$

由上述条件概率可以看出, 如果系统在某个时刻 n 处于状态 1, 那么以后便一直留在状态 1。这样的状态称作吸收状态。

设 $X_0 = 2$ 。记系统由状态 2 出发, 首次到达状态 3 的时间为 T_1 。则由(1.7)中所给条件概率有

$$P(T_1 = k) = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{6}\right)^{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots$$

求和可得

$$P(T_1 < +\infty) = \sum_{k=1}^{\infty} P(T_1 = k) = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{6}\right)^{k-1} = \frac{2}{5}$$

这一概率小于 1, 即系统由状态 2 出发, 经过任意有限个周期的转移, 有可能 (概率为 $\frac{3}{5}$) 始终不能到达状态 3。这时我们定义 $T_1 = +\infty$ 。易见

$$P(T_1 = +\infty) = 1 - P(T_1 < \infty) = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$$

如果 $X_0 = 3$, 记系统由状态 3 出发首次返回状态 3 的时间为 T_2 , 由 (1.7) 有

$$P(T_2 = 1) = \frac{1}{15}$$

$$P(T_2 = k) = \frac{3}{5} \left(\frac{1}{6}\right)^{k-2} \left(\frac{1}{3}\right), \quad k = 2, 3, \dots$$

$$\begin{aligned} P(T_2 < +\infty) &= P(T_2 = 1) + \sum_{k=2}^{\infty} P(T_2 = k) \\ &= \frac{1}{15} + \frac{1}{5} \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{1}{6}\right)^{k-2} = \frac{23}{75} \end{aligned}$$

于是

$$P(T_2 = +\infty) = \frac{52}{75}$$

由上例看出, 为了处理实际问题的需要, 确实应该允许随机变量取 ∞ 。由于在运筹学中我们主要面对非负随机变量, 所以只允许随机变量取 $+\infty$ 也就够用了。

在随机变量取 $+\infty$ 的概率大于零的情况下, 其分布函数不满足通常分布函数的正则化性质, 即 (1.4) 不成立。这时有 $F(+\infty) < 1$ 。记例 1.1 中 T_1 的分布函数为 $F(x) = P(T_1 \leq x)$, 有

$$\begin{aligned} F(+\infty) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} P(T_1 \leq x) \\ &= P(T_1 < +\infty) = \frac{2}{5} < 1 \end{aligned}$$

§ 2 随机变量的数字特征

随机变量的概率分布能够提供关于随机变量的全面信息。但由于一般情况下随机变量可以取到的数值比较多,人们难以通过其概率分布来把握一个随机变量的总体情况。数字特征是反映随机变量综合特性的数量指标。例如,数学期望是随机变量的加权平均值,方差是反映随机变量取值分散程度的数量指标等。

2.1 离散与连续随机变量的矩

设离散随机变量 X 的概率分布为 $P\{X = x_i\} = p_i, i = 1, 2, \dots$, 那么 X 的 k 阶原点矩定义为

$$EX^k = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^k p_i, \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.1)$$

一阶原点矩 EX 就是 X 的数学期望。 X 的 k 阶中心矩定义为

$$E(X - EX)^k = \sum_{i=1}^{\infty} (x_i - EX)^k p_i, \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.2)$$

假设(2.1)、(2.2)右端级数均绝对收敛。二阶中心矩就是 X 的方差。

若 X 为连续随机变量,设其分布密度为 $f(x)$, 分布函数为 $F(x)$, 那么 X 的 k 阶原点矩定义为($k = 1, 2, \dots$)

$$EX^k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^k dF(x) \quad (2.3)$$

k 阶中心矩定义为

$$\begin{aligned} E(X - EX)^k &= \int_{-\infty}^{\infty} (x - EX)^k f(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (x - EX)^k dF(x) \end{aligned} \quad (2.4)$$

假设(2.3)、(2.4)右端积分绝对收敛。

定义(2.1)—(2.4)均是初等概率论中熟知的。本书后面的内容要求我们突破随机变量要么离散,要么连续的限制,即需要考虑