数学小丛书

(5)

平　　均

史济怀

北京市数学会编

人民教育出版社
1964年·北京

这本小册子是在作者对北京市中学生数学小组所作的两次讲演"不等式"和"平均"的讲稿的基础上扩充而成的，因此对象主要是高中学生。

本书环绕"平均"这个概念讲述一些有趣的数学问题。先从算术平均、几何平均、调和平均三者的关系讲到它的有趣的应用：解答诸如食品罐头采用什么样的形状最省料、电灯挂在多高照到桌上最亮等实际问题，以及证明了数学上某些有用的不等式。然后进一步推广平均的概念，引进了"幂平均"，把算术平均、几何平均、调和平均三者统一起来，并且介绍了有关幂平均的一些性质。最后还讲了"加权平均"，这又是在实际生活中经常遇到的一种平均值，而这种平均还可以和力学上的重心问题联系起来。书中还附有不少习题，通过这些习题，读者可进一步体会书中所讲理论的用处。

平　均

史济怀

人民教育出版社出版（北京沙滩后街）

新华书店北京发行所发行

全国新华书店经售

国营五二三厂印装

统一书号：13012·0252　字数：42千

开本：787×1092 毫米　1/32　印张：$2\frac{1}{4}$

1964年2月新一版

1979年1月第二次印刷

北京：27,601—327,600册

定价 0.20元

编者的话

数学课外读物对于帮助学生学好数学，扩大他们的数学知识领域，是很有好处的．近年来，越来越多的中学学生和教师，都迫切希望出版更多的适合中学生阅读的通俗数学读物．我们约请一些数学工作者，编了这套“数学小丛书”，陆续分册出版，来适应这个要求．

这套书打算介绍一些课外的数学知识，以扩大学生的知识领域，加深对数学基础知识的掌握，引导学生独立思考，理论联系实际．

这是我们的初步想法和尝试．热切地希望数学工作者和读者对我们的工作提出宝贵的意见和建议，更希望数学工作者为中学生写出更多更好的数学课外读物．

北京市数学会

1962年4月

目　次

一 引 言

“平均每人…….”

“平均每亩…….”

“这个球队队員的平均年龄…….”

“某工厂的平均日产量…….”

无論是听广播、看报紙或者和周围的人們交談，在日常生活中差不多每天都要遇到“平均”这样一个詞儿．每次听到或講到这两个字的时候，实际上我們都是在无意之中走近了一大堆有趣的数学問題的边緣．正是由于我們对“平均”这个詞儿太熟悉了，覚得沒有必要去进一步思索它的全部含义，所以每次接触到这些数学問題时，我們又漫不經心地离开了它們，沒有发覚到它們的存在．

其实我們很需要追究一下：为什么人們常要和“平均”这个詞儿打交道呢？

讓我們来看一些例子．

如果有人把某公社的一千亩土地中每亩的产量都告訴你，你能对这公社的生产情况作出什么結論嗎？恐怕你除了感到听得很疲倦外，什么結論也得不到．因为他告訴你的資料太瑣碎了．相反，如果他很簡单地对你說，这一千亩土地“平均”亩产多少，那你立刻可对这个公社的生产情况作出結論．同样，为了要說明某个工厂的生产情况，我們常常要用到

“平均日产量”、“平均月产量”这些名詞.

从上面的例子看来，如果要对某些事物从某些数量方面作一个概括性的了解，那么不可避免地要碰到“平均”这个概念，而在很多情况下，这种概括性的了解又是十分必要的. 这或許就是我們所以常要和“平均”这詞儿打交道的原因了.

那么怎样算出上面所講的平均值呢? 这个問題恐怕小学生也会回答. 如果要計算一千亩土地的平均产量，只須把每亩的产量一起加起来，再用 1000 去除一下就行了. 一般来說，假設已給 n 个数

$$a_1, a_2, \cdots, a_n,$$

为了計算它們的平均值，只須把这 n 个数一起加起来，再用 n 去除一下，得

$$A=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n},$$

我們把数 A 叫做这 n 个数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的**算术平均**.

可是我們根据什么理由，可以認为这样得出的数 A 就是我們所要求的平均值呢? 原来这里边是有一层道理的. 当我們定义一組数

$$a_1, a_2, \cdots, a_n$$

的平均值 x 的时候，按照我們刚才講的意思，这个平均值 x 要能反映这組数的总的情况，我們总是希望 x 和这 n 个数的偏差

$$x-a_1, x-a_2, \cdots, x-a_n$$

在总体上說来尽可能地小. 也就是說，我們要适当地选取 x 值，使得平方和

$$D=(x-a_1)^2+(x-a_2)^2+\cdots+(x-a_n)^2$$

达到它的最小值。这里我們不直接把这 n 个差数本身相加，而把它們的平方相加，是因为这些差数，有些是正值，有些是負值，直接相加，就会正負相消，不能反映总体的情况。

現在我們来求使 D 取得最小值的 x 值。經过简单的变形之后，上式可以写成：

$$D = nx^2 - 2(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)x + (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)$$

$$= n\left[x^2 - 2\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}x + \left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}\right)^2\right]$$

$$-n\left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}\right)^2 + (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)$$

$$= n\left(x - \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}\right)^2 - \frac{(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2}{n}$$

$$+ (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2).$$

在最后的式子中，末二項是和 x 无关的常数；只有第一項和 x 有关，而且永远不会是負数。因此只有当第一項等于零时，D 的值最小。也就是說，为了使 D 取最小值，必須有

$$x = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

才行。算术平均的意义就在于此。

上面只是介紹了在我們生活中常用的計算平均值的方法。事实上，求平均的方法远不止一种，在各种不同的具体問題中，根据各种不同的具体条件，为了各种不同的具体目的，我們經常需要采用各种不同的方法去求各种不同数据的平均值。既然求平均值的方法有許多种，那么对同一組数，采用不同的方法所得平均值之間的关系又怎样呢？

在这本小書中，我們打算环繞"平均"这个概念講述一些

有趣的数学問題.

二　$H\leqslant G\leqslant A$

上面已經提到,求平均的方法不止一种. 刚才我們把 n 个数相加,然后用 n 来除得到了这 n 个数的算术平均. 自然我們也可把 n 个数相乘,然后把乘积开 n 次方,这样我們又得到了另一种平均,叫做这 n 个数的**几何平均**. 說得詳細些,就是任給 n 个非負实数

$$a_1, a_2, \cdots, a_n,$$

我們把
$$G=\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$$
叫做这 n 个数的几何平均.

“几何平均”这个名詞的来源可以从下述簡单的几何事实中得到解釋. 如图 1,我們把两个数 a_1, a_2 看成是两个綫段的長度,并以它們做边作一長方形. 如果我們想作一正方形,使

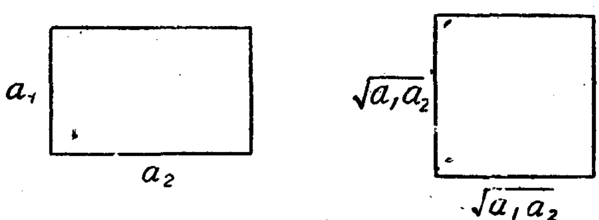

图 1.

它的面积等于長方形的面积,那么它的边長就是 a_1 和 a_2 这两个数的几何平均 $\sqrt{x_1a_2}$.

除了上面的算术平均和几何平均外,我們还可定义另外一种平均. 任給 n 个正的实数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$, 我們先求它

們倒数的算术平均

$$\frac{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}{n},$$

然后再作这个平均值的倒数：

$$H=\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}},$$

这样得到的数 H 称为 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的**調和平均**.

很容易看出，上面定义的三种平均都具有下面两个簡单性質：

(一)如果 n 个原始数据彼此相等，卽

$$a_1=a_2=\cdots=a_n=a,$$

那么它們的算术平均、几何平均、調和平均也都等于 a，卽

$$A=G=H=a.$$

(二)如果 n 个原始数据都界于 m 和 M 之間，卽

$$m\leqslant a_i\leqslant M \quad (i=1,2,\cdots,n),$$

那么它們的算术平均、几何平均、調和平均也都界于 m 和 M 之間，卽

$$m\leqslant A\leqslant M, \qquad m\leqslant G\leqslant M, \qquad m\leqslant H\leqslant M.$$

特别，如果用

$$\max(a_1,a_2,\cdots,a_n), \qquad \min(a_1,a_2,\cdots,a_n)$$

記 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 中最大的和最小的(例如 $a_1=1,a_2=3,a_3=6,a_4=5$，那么 $\max(a_1,a_2,a_3,a_4)=6$，$\min(a_1,a_2,a_3,a_4)=1$)，那么显然有

$$\min(a_1,a_2,\cdots,a_n)\leqslant a_i\leqslant\max(a_1,a_2,\cdots,a_n)\ (i=1,2,\cdots,n),$$

所以有 $\min(a_1,a_2,\cdots,a_n)\leqslant A\leqslant\max(a_1,a_2,\cdots,a_n)$,

$$\min(a_1,a_2,\cdots,a_n)\leqslant G\leqslant\max(a_1,a_2,\cdots,a_n),$$

$$\min(a_1,a_2,\cdots,a_n)\leqslant H\leqslant\max(a_1,a_2,\cdots,a_n),$$

即一組数的算术平均、几何平均和調和平均总是夹在这組数的最大值和最小值之間.

这两个性質的証明留給讀者作練习.

定义了上述三种平均值以后,首先使我們感到关心的是这三种平均值之間的关系. 它們之間哪个大些,哪个小些?或者它們間根本就不存在一定的規律:对某些数来說,A 比 G 大,而对另外一些数来說 G 又比 A 大?

为了获得启发,我們从最簡单的情况研究起. 先考虑只有两个数 a_1,a_2 的情形. 我們知道,对任意两个实数 x 和 y,永远有不等式:

$$(x-y)^2\geqslant 0,$$

展开后即得
$$xy\leqslant\frac{x^2+y^2}{2}. \qquad (1)$$

命 $x=\sqrt{a_1}$, $y=\sqrt{a_2}$, 得

$$\sqrt{a_1a_2}\leqslant\frac{a_1+a_2}{2}. \qquad (2)$$

再在(1)中命 $x=\frac{1}{\sqrt{a_1}}$, $y=\frac{1}{\sqrt{a_2}}$,那就有

$$\frac{1}{\sqrt{a_1a_2}}\leqslant\frac{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}}{2},$$

取倒数卽得
$$\frac{2}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}}\leqslant\sqrt{a_1a_2}. \tag{3}$$

把不等式(2)、(3)联合起来便得：
$$\frac{2}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}}\leqslant\sqrt{a_1a_2}\leqslant\frac{a_1+a_2}{2}. \tag{4}$$

不等式(4)告訴我們，对两个数来說，算术平均最大，几何平均次之，調和平均最小。原来它們之間是有一定的規律的.

这个結論使人們有理由猜測：对任意 n 个正数来說，这样的規律——算术平均最大，几何平均次之，調和平均最小——也是存在的。

定理一 对任意 n 个正数来說，永远有
$$H\leqslant G\leqslant A.$$

証明 以 $A(a_1,a_2,\cdots,a_n)$, $G(a_1,a_2,\cdots,a_n)$, $H(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 分别表示 n 个正数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的算术平均、几何平均和調和平均。先証
$$G(a_1,a_2,\cdots,a_n)\leqslant A(a_1,a_2,\cdots,a_n). \tag{5}$$

我們把証明分成两部分：先对 $n=2^m$ 这种形状的数来証明不等式(5)，然后再在这个基础上証明 n 是任何自然数的情形。

上面我們已經証明了 $n=2$ 时(5)是成立的，卽
$$G(a_1,a_2)\leqslant A(a_1,a_2),$$
由此不难推出 $n=4$ 时(5)也成立：

$$G(a_1,a_2,a_3,a_4)$$

$$=\sqrt[4]{a_1a_2a_3a_4}=\sqrt{\sqrt{a_1a_2}\sqrt{a_3a_4}}\leqslant\frac{\sqrt{a_1a_2}+\sqrt{a_3a_4}}{2}$$

$$\leqslant\frac{\frac{a_1+a_2}{2}+\frac{a_3+a_4}{2}}{2}=\frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4}=A(a_1,a_2,a_3,a_4).$$

同样的方法可用来証明 $n=2^m$ 时(5)的正确性．对 m 进行数学归納法．$m=1,2$ 时(5)是成立的，今設 $m=k$ 时(5)成立，則当 $m=k+1$ 时，

$$G(a_1,a_2,\cdots,a_{2^{k+1}})$$

$$=\sqrt[2^{k+1}]{a_1a_2\cdots a_{2^k}\cdot a_{2^k+1}\cdots a_{2^{k+1}}}$$

$$=\sqrt{\sqrt[2^k]{a_1a_2\cdots a_{2^k}}\sqrt[2^k]{a_{2^k+1}\cdots a_{2^{k+1}}}}$$

$$\leqslant\frac{1}{2}\left(\sqrt[2^k]{a_1a_2\cdots a_{2^k}}+\sqrt[2^k]{a_{2^k+1}\cdots a_{2^{k+1}}}\right)$$

$$\leqslant\frac{1}{2}\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{2^k}}{2^k}+\frac{a_{2^k+1}+\cdots+a_{2^{k+1}}}{2^k}\right)$$

$$=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{2^{k+1}}}{2^{k+1}}=A(a_1,a_2,\cdots,a_{2^{k+1}}).$$

也就是説，$m=k+1$ 时(5)成立．于是由数学归納法的原理知道，对 $n=2^m$ 形状的数，(5)是正确的．

現在假設 n 不等于2的冪次，我們总可以找到一个适当的自然数 r，使得 $n+r$ 是2的冪，就是使得

$$n+r=2^m$$

(例如,当 $n=5$ 时,可取 $r=3$,就得 $n+r=8=2^3$; 当然也可取 $r=11$,使 $n+r=16=2^4$). 这样一来,对自然数 $n+r$ 来說,(5)便成立了。 命

$$A=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n},$$

那么 $$nA=a_1+a_2+\cdots+a_n,$$

为了利用刚才証明的結果,在 n 个数

$$a_1,a_2,\cdots,a_n$$

之外再补充 r 个 A ,于是便得 $n+r$ 个数:

$$\underbrace{a_1,a_2,\cdots,a_n,\overbrace{A,A,\cdots A}^{r\text{个}}}_{n+r\text{个}},$$

对这 $n+r$ 个数来說,我們有:

$$\sqrt[n+r]{a_1a_2\cdots a_n\underbrace{AA\cdots A}_{r\text{个}}}\leqslant\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n+A\overbrace{+A+\cdots+A}^{r\text{个}}}{n+r}$$

$$=\frac{nA+rA}{n+r}=A,$$

不等式两边自乘 $n+r$ 次,便有:

$$a_1a_2\cdots a_nA^r\leqslant A^{n+r},$$

两端同用 A^r 除之后再开 n 次方,便得

$$\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\leqslant A.$$

也就是說,当 n 不是 2^m 这种形式时,不等式 $G\leqslant A$ 也成立。綜合上面两段証明,便知对任何自然数 n ,

$$G\leqslant A$$

永远成立。

现在再来証明不等式的第二部分

$$H \leqslant G,$$

便沒有原則性的困难了。在不等式

$$\sqrt[n]{b_1 b_2 \cdots b_n} \leqslant \frac{b_1+b_2+\cdots+b_n}{n}$$

中命 $b_1=\frac{1}{a_1},\ b_2=\frac{1}{a_2},\ \cdots, b_n=\frac{1}{a_n}$，立得

$$\frac{1}{\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}} \leqslant \frac{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}{n},$$

两边取倒数卽得：

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}} \leqslant \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n},$$

也就是 $$H \leqslant G.$$

定理一到这里全部証毕。

从証明的过程可以看出，定理一虽然包含两个不等式：

$$G \leqslant A \text{ 和 } H \leqslant G,$$

但証明的主要困难是在前者，后者可以从前者簡单地推出。

由于这个定理的重要性，数学家們对它作出了各种各样不同的証明，这些証明体現了很多巧妙的想法。 这里我們再介紹另外两个有趣的証明。

十九世紀法国大数学家哥西 (Cauchy) 利用倒推归納法的原理来証明不等式 $G \leqslant A$。

大家知道，普通的数学归納法原理是这样説的：如果

(i)命题 $P(n)$ 当 $n=1$ 时成立；

(ii)从命题 $P(n)$ 的正确性能推出命题 $P(n+1)$ 的正确性；

那么命题 $P(n)$ 便对任何自然数 n 都成立。

所謂倒推归納法却是从下面两条来推断命題 $P(n)$ 对全部自然数 n 的正确性：

(i′)命题 $P(n)$ 对无穷个自然数 n 成立。

(ii′)从命題 $P(n)$ 的正确性能推出命題 $P(n-1)$ 的正确性。

不等式(5)所以能用倒推归納法，那是因为我們已对 $n=2^m$ 这种形状的数証明了(5)是正确的，也就是說，我們已經对无穷个自然数

$$n=2,4,8,16,32,\cdots,2^m,\cdots$$

証明了它的正确性. 現在假定对 n 个数命題已經成立，我們要由此推出对 $n-1$ 个数命題也眞，即

$$\sqrt[n-1]{a_1a_2\cdots a_{n-1}}\leqslant\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}}{n-1}.$$

命 $$b=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}}{n-1},$$

那么 $$a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}=(n-1)b.$$

由归納法的假定，对

$$a_1,a_2,\cdots,a_{n-1},\ b$$

这 n 个数不等式(5)是成立的，于是有

$$\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_{n-1}b}\leqslant\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}+b}{n}=\frac{(n-1)b+b}{n}=b,$$

不等式两端自乘 n 次得：

$$a_1a_2\cdots a_{n-1}\,b\leqslant b^n,$$

两端同用 b 除后再开 $n-1$ 次方，即得：

$$\sqrt[n-1]{a_1a_2\cdots a_{n-1}}\leqslant b,$$

即 $$\sqrt[n-1]{a_1a_2\cdots a_{n-1}}\leqslant\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}}{n-1}.$$

这样便完成了倒推归納法的証明．从而不等式(5)对任何自然数 n 都成立．

上面介紹的两种証法虽然在形式上不一样，但它們有共同的出发点：它們都利用了比較容易証明的事实——$n=2^m$时命題的正确性．下面要講的第三种証明却是从另一种巧妙的想法出发的．

設 $$a_1,a_2,\cdots,a_n \tag{6}$$

是已給的 n 个正数，我們要証

$$G(a_1,a_2,\cdots,a_n)\leqslant A(a_1,a_2,\cdots,a_n).$$

如果 n 个数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 彼此都相等，那么根据前面所講的性質(一)(見第7頁)知道 $G=A$，定理便无需証明了．因此不妨假定这 n 个数中至少有两个是不相等的．于是其中必有一个最大的和一个最小的，不妨設 a_1 是最大的，a_2 是最小的．这时我們有：

$$G=\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}<\sqrt[n]{a_1a_1\cdots a_1}=a_1,$$

$$G=\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}>\sqrt[n]{a_2a_2\cdots a_2}=a_2,$$

即 $$a_2<G<a_1$$

或者 $$(G-a_1)(G-a_2)<0. \tag{7}$$