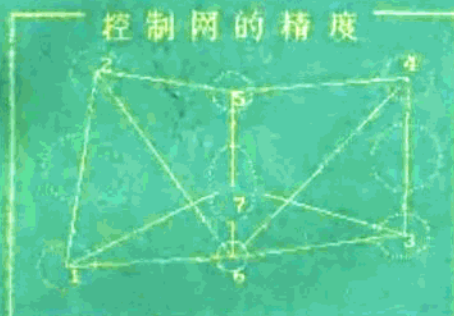


C·L·K·Z·H·W·Y·H·S·H·J



第 7 点

周秋生 编著

$E = 0.698$

$F = 0.419$

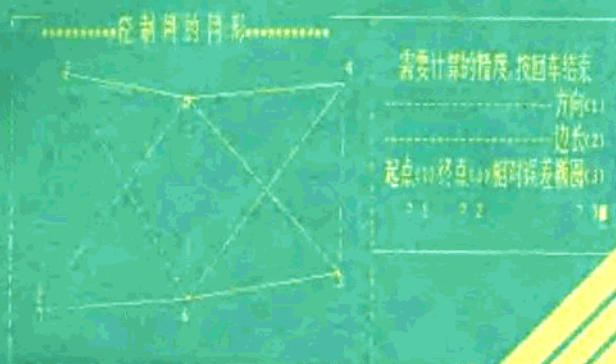
$a = 178.471$

E —长半轴

F —短半轴

a —方向

显示那个点的椭圆, 按回车结束 $i = 7$



测量控制网优化设计

测绘出版社

高等学校教学参考书

测量控制网优化设计

周秋生 编著

测绘出版社

(京) 新登字 065 号

内 容 简 介

本书对近年来有关控制网优化设计的理论与方法作了系统地论述, 将测量平差视为一种优化设计问题, 从而可利用优化设计的许多有效算法来解算平差问题。书中对控制网的各种质量指标作了较为系统地讨论, 对解析法优化设计、机助法优化设计也作了较详细的论述。为了帮助读者理解各种优化设计的原理和方法, 本书列举了许多数值例子。书中内容结合教学, 科研, 深入浅出, 通俗易懂。

测量控制网优化设计

周秋生 编著

*

测绘出版社出版

大兴五中印刷厂印刷

新华书店总店科技发行所发行

*

开本 787×1092 1/16·印张 12.75·字数 283 千字

1992 年 6 月 第一版·1992 年 6 月 第一次印刷

印数 0 001—4 000 册·定价 3.40 元

ISBN 7-5030-0498-3/P·185

前 言

传统上,测量控制网的设计是以达到规定的精度要求为目标进行的,其精度计算方法也是近似的,最终得到的设计方案仅是一个满足精度要求的可行方案,而不是最优的设计方案。随着电子计算机、数理统计、矩阵代数以及最优化方法等在测量中的应用,现在已经可能采用严格的方法,设计出既满足精度要求,又具有成本低和可靠性强的最优控制网。

控制网的优化设计与测量平差是密切相关的,从某种程度上来说两者可以统一起来,因为测量平差问题本身就可以认为是一个优化设计问题。应当指出的是,控制网的优化设计并不比测量平差的重要性低,而且其难度常常超过平差计算问题。近年来控制网优化设计的发展表明,控制网的优化设计将会同今天的测量平差一样,具有同样的意义和重要性。因此,我们必须重视对这一课题的研究和科研成果的推广使用。

本书是在作者的“控制网优化设计方法”的讲义基础上,结合作者多年的教学和科研实践经改写而成的。讲义曾作为我校工程测量专业的选修课教材,并且于1988年在哈尔滨举办的“测量平差原理与工程测量新技术研讨班”上作了讲授,得到了广大同行们的鼓励和帮助。

全书共分七章。第一章给出了控制网优化设计的几个问题和优化设计的基本概念;第二章介绍了非线性规划方法,包括一维搜索、多维搜索和约束问题的解法;第三章是线性规划,这是最基本且最常用的约束优化问题;第四章是将平差问题视为一个优化设计问题,利用优化设计的算法来解平差问题;第五章给出了一些评定控制网的质量指标,这些指标是建立优化设计的数学模型所必需的;第六章按照格拉发伦特(Grafarend)提出的四阶段设计问题,分别讨论了各阶段设计问题的常用解法;最后一章讨论计算机辅助优化设计,探讨了一个机助设计系统应具备的结构和功能,以及有关的一些问题,并介绍了作者研制的一个机助设计系统。

本书对于优化设计的理论力求深入浅出,通俗易懂,只要是学过微积分和线性代数的读者,都可以看懂。所给出的每一个计算公式和计算方法均考虑到在计算机上实现的方便性,便于读者套用或编程。所举的数值例子,在反映解算方法的全过程条件下,尽量使之简单明了,避免使读者的注意力分散而对整个过程的模糊不清,并且读者还可以亲自动手计算,加强对方法的理解。

本书经于来法老师和金学林老师进行了认真的审阅,并提了许多宝贵意见,刘艳春同志给本书绘制了插图,在此表示衷心的感谢。

限于作者水平所限,书中难免有一些不妥或错误之处,恳请读者给予批评指正。

作 者

于哈尔滨冶金测量专科学校

1991年7月

目 录

第一章 优化设计引论	(1)
§1-1 引言.....	(1)
§1-2 控制网优化设计问题举例.....	(2)
§1-3 优化设计问题的分类及解法.....	(5)
§1-4 最优性条件.....	(7)
第二章 非线性规划	(13)
§2-1 搜索算法概述.....	(13)
§2-2 一维搜索.....	(14)
§2-3 无约束优化的间接法.....	(20)
§2-4 无约束优化的直接法.....	(29)
§2-5 约束优化的解法.....	(34)
第三章 线性规划	(41)
§3-1 线性规划的数学模型.....	(41)
§3-2 两个变量的图解法.....	(44)
§3-3 单纯形法.....	(47)
§3-4 确定初始可行基的方法.....	(57)
§3-5 改进单纯形法.....	(61)
§3-6 对偶单纯形法.....	(64)
第四章 最优化方法在平差问题中的应用	(69)
§4-1 经典平差问题的解算方法.....	(69)
§4-2 稳健估计问题.....	(74)
§4-3 一范数最小解法.....	(80)
§4-4 ∞ 范数最小问题.....	(83)
第五章 测量控制网的质量指标	(90)
§5-1 精度指标.....	(90)
§5-2 可靠性指标.....	(97)
§5-3 灵敏度指标.....	(103)
§5-4 经济指标.....	(109)
§5-5 综合指标的制订方法.....	(110)
第六章 控制网解析法优化设计	(112)
§6-1 零阶段设计.....	(112)
§6-2 一阶段设计.....	(118)

§6-3 二阶段设计.....	(126)
§6-4 三阶段设计.....	(151)
第七章 机助法优化设计.....	(164)
§7-1 概述.....	(164)
§7-2 机助设计系统的结构和功能.....	(164)
§7-3 控制网的图形处理方法.....	(167)
§7-4 实时计算方法.....	(168)
§7-5 观测值的作用分析.....	(173)
§7-6 CAENDS 简介.....	(182)

第一章 优化设计引论

§1-1 引言

我们在做任何一项工作时，总是希望在所有可行的方案中选择一种在某种意义上最优的方案，这就是最优化设计。在国民经济的各个领域，普遍存在着优化设计问题，如生产管理、运输调度、服务系统、信息系统等等。就测量控制网来说，在布设控制网时，希望在现有的人力、物力和财力条件下，使控制网具有最高的精度和可靠性；在旧有控制网的改造时，希望在满足一定的要求前提下，使改造的费用最低；在观测数据处理时，则希望测量误差对最终的结果影响最小。

对最优化问题的研究已有很久的历史。早在公元前 500 年毕达哥拉斯就已发现了黄金长方形，即长方形的长与宽的最佳比率为 1.618，称为黄金分割比。古希腊和欧洲的建筑师和美术家认为在建筑、绘画中应用这个比例将使建筑和艺术最优美、协调。在微积分出现以前，已有许多人开始应用数学方法来解决最优化问题。例如公元前 200 年阿基米德已证明，给定周长，圆所包围的面积最大。在微积分出现以后，利用求导法、变分法和拉格朗日乘数法，有效地解决了一类可导函数的极值问题。这类问题也称为古典最优化问题。近 30 年来，由于科学技术发展的需要，实践中许多最优化问题已无法用古典方法来解决，因此，许多新的最优化技术应运而生，为解决各种优化设计问题提供了有效的方法。

在测绘科学方面大家熟知的，高斯所创立的最小二乘法，使观测数据和拟合曲线的残差平方和最小。这一方法至今仍广泛应用于各种数据处理的领域中。1868 年 Helmert 就发表了关于“测量的合理性研究”的论文。1882 年 Shreiber 曾提出过著名的“基线网最适当权分配”的方法，对基线扩大网的测角观测方案进行了优化设计，这是对测量控制网的优化设计所作的开创性工作。但是在相当长的一段时间内，这一问题没有得到深入而系统的研究。直到 60 年代末期，由于整个科学技术的发展和电子计算机的应用，测量控制网的优化设计问题引起了测量工作者的重视，尤其是近 20 年来，控制网的优化设计一直是人们感兴趣的课题之一。值得提及的是，Baarda 对控制网的质量标准问题进行了深入研究，提出了评价控制网质量的三项标准，即精度、可靠性（抵抗观测粗差及其影响的能力）和经济，并在 1971 年首先引入了准则矩阵的概念，提供了一种更为全面和精密的精度标准。Graafrend 对控制网优化设计问题作了广泛的理论研究，提出了现已为国际上所公认的四阶段优化分类概念，系统地应用了各种数学规划方法来解决控制网优化设计问题。在 1972 年 Graafrend、Schaffin 导出了具有均匀和各向同精度结构的准则矩阵，即著名的 Taylor—Karman 结构，简称 TK 结构。他们的工作为控制网的优化设计奠定了理论基础。

为了深入开展研究和国际间的合作，国际大地测量协会（IAG）于 1979 年 12 月成立

了“大地网计算机辅助优化设计”专题研究小组,1980年5月又成立了“大地网最优化设计”专题研究小组。这两个小组的研究内容相互联系,后者着重探讨控制网优化设计的理论问题,内容涉及到基准的选择与变换、最优化方法、准则矩阵的构造与逼近解法、加密方案的设计等等。前者着重探讨控制网优化设计的具体实施过程,一些著名的软件系统已研制成功,并且还在不断地扩充和完善。如 Mephram 等在 1984 年研制出 CANDSN 系统 (Computer Aided Network Design), Grindsy 等在 1984 年研制出 OPTUN 系统 (Optimization of Tunnel)。在这段时间内,公开发表的论文就有数百篇,使控制网的优化设计逐步从理论研究走向实际应用阶段。

近 10 年来,我国测量界也开始对控制网的优化设计引起了广泛重视,有关控制网优化设计的文章和硕士研究生论文较集中地出现,研究范围不断拓宽,内容逐步深入,取得了一些可喜的成绩。有些成果已被生产单位采用,引起了生产单位的兴趣和重视。

展望控制网优化设计的未来,其重点研究方向是:

1. 结构能反映各种专用控制网特性的准则矩阵;
2. 考虑反映实际价格的成本函数于优化设计过程中;
3. 进一步发展人机交互图示的优化设计系统;
4. 研究解决各种现代特殊网的优化设计问题,如监测网、卫星和陆地联合网、GPS 网等等。

§ 1-2 控制网优化设计问题举例

为了具体了解什么是优化设计问题,本节将列举几个控制网优化设计例子。通过这些例子抽象出一般的优化设计问题,进而引入一些优化设计的基本概念。

例 1-1 如图 1-1 所示的测角前方交会, A 和 B 为已知控制点, α 和 β 为角度观测值,其中误差为 σ 。问待定点 P 位于何处时,其点位的精度最高?

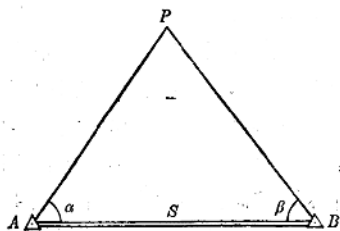


图 1-1

解 设 S 为两固定点之间的长度。由误差传播律可得 P 点的点位方差为

$$\sigma_P^2 = \frac{\sigma^2 S^2}{\rho^2} \cdot \frac{\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta}{\sin^4(\alpha + \beta)} \quad (1-1)$$

式中 $\rho = 206265$ 。

由于 P 点的位置是由 α 和 β 所确定的,因此,

问题可表示为下列极值问题,即

$$\min F(\alpha, \beta) \quad (1-2)$$

其中

$$F(\alpha, \beta) = \frac{\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta}{\sin^4(\alpha + \beta)}$$

min 表示求极小值。

例 1-2 设有 n 个观测值 $L_1, L_2, \dots, L_n$, 以及观测值的一个线性函数

$$x = f_1 L_1 + f_2 L_2 + \dots + f_n L_n$$

若要求函数 x 的方差 σ_x^2 不超过 D_x , 问如何配置各观测值的观测精度, 才能使观测的工作量最小?

解 设观测值的方差为 $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_n^2$, 则函数 x 的方差为

$$\sigma_x^2 = f_1^2 \sigma_1^2 + f_2^2 \sigma_2^2 + \dots + f_n^2 \sigma_n^2 \quad (1-3)$$

观测工作量的大小一般可以认为与观测方差成反比或者与观测权成正比, 即可用

$$P_1 + P_2 + \dots + P_n \quad (1-4)$$

来反映观测工作量的大小。其中 $p_i = \frac{C}{\sigma_i^2}$, C 为任意常数。因此, 问题转化成了观测值的权分配问题, 可表示成如下形式

$$\begin{cases} \min \sum_{i=1}^n p_i \end{cases} \quad (1-5)$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n f_i^2 \frac{C}{p_i} \leq D_x \end{cases} \quad (1-6)$$

$$\begin{cases} p_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n \end{cases} \quad (1-7)$$

其中式 (1-7) 确保设计的观测方案具有实际意义。

例 1-3 现有一测角控制网, 为了对该网进行改造, 拟定用电磁波测距仪加测若干条边长。问如何设计一个改造方案, 以达到控制网的平均点位精度提高一倍, 并且加测边长的条数最少?

解 设测角网中所有可能加测的边长数目为 m , 并且用变量

$$y_i = \begin{cases} 1 & \text{表示第 } i \text{ 条边加测} \\ 0 & \text{表示第 } i \text{ 条边不测} \end{cases} \quad (1-8)$$

来表示第 i 条边是否加测, 其中 $i = 1, 2, \dots, m$ 。因此, 总共加测的边长数为

$$y_1 + y_2 + \dots + y_m \quad (1-9)$$

若原控制网点的协因数阵为 Q_{xx} , 则平均点位精度通常可以用

$$\frac{\sigma_0^2}{t} \cdot \text{tr}(Q_{xx}) \quad (1-10)$$

来描述。其中 σ_0^2 为单位权方差, t 为坐标未知数的个数, tr 表示矩阵的迹运算, 为矩阵对角线元素之和。

设加测边长之后网点的协因数为 Q'_{xx} , 则可得

$$Q'_{xx} = (Q_{xx}^{-1} + \sum_{i=1}^m a_i^T p_i a_i y_i)^{-1} \quad (1-11)$$

式中 a_i 为第 i 条边长的误差方程系数向量, P_i 为其相应的权。因此, 问题可归结为下列极值问题

$$\begin{cases} \min \sum_{i=1}^m y_i \\ \text{tr}(Q'_{xx}) \leq \frac{1}{2} \text{tr}(Q_{xx}) \\ y_i = 0 \text{ 或 } 1, i = 1, 2, \dots, m \end{cases} \quad (1-12)$$

例 1-4 在测量平差计算中, 设条件方程为

$$BV + W = 0 \quad (1-13)$$

其中 B 为系数矩阵, V 为观测值的改正数向量, W 为闭合差。

因为 $r < n$ 而使式 (1-13) 的解不唯一。问如何求解改正数才是最优呢?

解 这里涉及到平差的原则选择问题。在一般的平差问题中, 最常用的平差原则为最小二乘原则, 即改正数的平方和或加权平方和最小。此时, 问题成为下列极值问题

$$\begin{cases} \min V^T P V \\ BV + W = 0 \end{cases} \quad (1-14)$$

在近代的数据处理中, 为了有效地发现观测值中的粗差和进行粗差的定位, 提出了一些其它的平差原则, 如改正数的一范数最小原则, 即需要解如下问题

$$\begin{cases} \min \sum_{i=1}^m |v_i| \\ BV + W = 0 \end{cases} \quad (1-15)$$

此外, 也有的提出选择改正数的无穷大范数最小原则, 即

$$\begin{cases} \min \{\max_i |v_i|\} \\ BV + W = 0 \end{cases} \quad (1-16)$$

也称为极大极小问题。

综上所述的几个优化设计问题, 它们共同的特点是: 最后都归结为一个求解极值的问题, 即为函数的极小化问题。一般地, 优化设计的数学模型为

$$\min f(X) \quad (X \in E^*) \quad (1-17)$$

$$g_j(X) \geq 0, j = 1, 2, \dots, p \quad (1-18)$$

$$h_i(X) = 0, i = 1, 2, \dots, m \quad (1-19)$$

式中 $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ 为设计变量, 可以由设计人员调整, 其不同的取值表示不同的设计方案, 是优化设计问题中最终要确定的变量。如例 1-1 中的角度 α 和 β 、例 1-2 中的观测值的权 $p_1, p_2, \dots, p_n$ 等都是优化设计问题的设计变量。

$f(\cdot)$ 为设计变量的某个函数, 称为目标函数, 其函数值的大小表示了设计方案的好坏, 是优化设计的准则。

$g_j(X)$ 为不等式约束条件, $h_i(X)$ 为等式约束条件, 并统称为约束条件。约束条件是为了确保设计方案能够满足使用上的各种要求而建立的, 以使得设计方案始终是切实可行的。满足约束条件的所有设计变量组成的集合称为可行域。可行域内的每一个点所代表的设计方案都是可行的, 可行域以外的区域称为不可行域。

若可行域为空集, 即没有一组设计变量能够满足约束条件, 则优化设计问题没有解。

若可行域为非空集,并且其中存在使目标函数达到极值的点,则称该点为优化设计问题的最优解。目标函数和约束条件一起就构成了优化设计的数学模型。

§ 1-3 优化设计问题的分类及解法

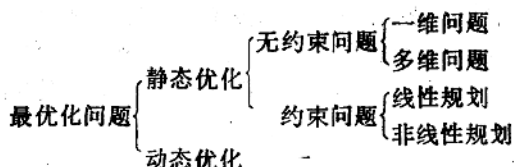
根据优化设计的数学模型的不同性质,可将优化设计问题进行分类。

当目标函数和约束条件均为设计变量的一次函数时,称这类优化设计问题为线性规划。若目标函数或约束条件中,至少有一个函数是设计变量的非线性函数,这类优化设计问题称为非线性规划。线性规划也可以看作是非线性规划的特殊情况。

当目标函数为二次型,约束条件均为线性函数时,这类非线性规划被称为二次规划。二次规划是从线性规划到非线性规划的过渡,是最简单的一种非线性规划。

优化设计问题也可根据是否存在约束条件而分为无约束优化设计问题和约束优化设计问题。当优化设计问题的解不随时间变化时,称为静态优化设计,反之,各设计变量是时间的函数,则称为动态优化设计。动态优化设计是解决多阶段决策过程优化问题的一种数学方法。

综合以上所述,我们可归纳如下:



关于优化设计问题的求解方法大致可分为间接法和直接法。间接法只适应于目标函数和约束条件有明显的解析表达式的情况。求解过程需要利用函数的导数。直接法适应于目标函数较复杂或无明显的解析表达式的情况,是直接以函数值的大小比较为基础的求解方法。

对于测量控制网而言,按照 Grafarend 提出的,目前国际上所公认的分类方法,将控制网的优化设计问题分为:

1. 零阶段设计问题(或称基准选择问题)。即对一个已知图形结构和观测计划的自由网,为控制网点的坐标及其方差阵选择一个最优的坐标系。这就是在已知设计矩阵 A 和观测值的权阵 P 的条件下,确定网点的坐标向量 X 和其协因数阵 Q_{xx} ,使 X 的某个目标函数达到极值。因此,零阶段设计问题也就是一个平差问题。

2. 一阶段设计问题(或称结构图形设计问题)。即在已知观测值的权阵 P 的条件下,确定设计矩阵 A ,使网中某些元素的精度达到预定值或最高精度,或者使坐标的协因数阵最佳逼近一个给定的矩阵 Q_{xx}^0 (准则矩阵)。

3. 二阶段设计问题(或称观测值权的分配问题)。即已知设计矩阵 A ,确定观测值的权阵 P ,使某些元素达到预定的精度或精度最高,或者使坐标的协因数阵最佳逼近一个给定的矩阵 Q_{xx}^0 。

4. 三阶段设计问题(或称网的改造或加密方案的设计问题)。通过增加新点和新的观测值,以改善原网的质量。在给定的改善质量前提下,使改造测量工作量最小,或者在改造费用一定的条件下,使改造方案的效果最佳。

以上各类设计问题的已知量和设计变量列于表 1-1。在大多数实际的优化设计问题中,往往表现为不同类别设计问题的综合,例如三阶段设计问题可以看成是一阶段和二阶段设计问题的混合;一、二和三阶段设计问题的解又必须预先或同时解零阶段设计问题。因此,各类设计问题通常不能严格分开。

表 1-1

类别	已知量	设计变量
零	A, P	X, Q_{xx}
一	P, Q_{xx}	A
二	A, Q_{xx}	P
三	Q_{xx}	A, P

控制网的优化设计的方法已有许多种,但绝大多数方法都可以归纳成两类,即解析设计法和机助设计法。解析法是通过建立优化设计问题的数学模型,包括目标函数和约束条件,选择一种恰当的寻优算法,求出问题的严格最优解。机助法则是将电子计算机的计算能力和判别能力同设计者的知识和经验结合起来,通过对一个凭经验拟定的初始设计方案,进行分析、计算,求出各项质量指标,并对设计方案进行不断地修改,直到设计者满意为止的一种设计方法。

比较两类解算方法可知,解析法的优点是所需机时一般较少,理论上比较严密,其最终结果是严格最优的。它的缺点是优化设计问题的数学模型比较复杂,有时难以建立,最终的结果有时是理想化的,在实际中实施起来比较困难或者不可行。如网形的不合理、过大的观测权和负权的出现。与解析法比较,机助法具有如下优点:

1. 适应性广,可用于除零阶段设计问题外的任何一阶段设计,特别是一、三阶段和各种混合的设计问题。

2. 设计结果的合理性和切实可行性,由于设计过程中参与了设计者的知识和经验,使最终结果一定是实际的,切实可行的。

3. 计算模型简单,可直接利用平差模型和分析模型,一般毋需建立优化设计的数学模型,有利于一般人员掌握和在生产单位的推广使用。

机助法的缺点是所需的机时一般较多,最终结果相对于解析法而言,在严格的数学意义上可能并非最优,只是一种近似最优解,但是这种差别在实用上并不太重要。

从数学的角度来看,对一个实际问题进行优化设计,一般需要经过如下步骤:

1. 分析实际问题,结合各种设计要求,建立优化设计问题的数学模型;
2. 选择适当的求解方法,编制电算程序,在计算机上进行求解。
3. 分析解算结果的合理性,可行性,并对成果作出评价。

§ 1-4 最优性条件

一、无约束问题的最优性条件

考虑无约束最优化问题的数学模型为

$$\min f(X) \quad X \in E^* \quad (1-20)$$

对于 $X^* \in E^*$, 若存在 $\varepsilon > 0$, 使所有与 X^* 的距离小于 ε 的点 $X \in E^*$, 即 $\|X - X^*\| < \varepsilon$, 均有

$$f(X^*) \leq f(X) \quad (1-21)$$

则称 X^* 为函数 $f(X)$ 的局部极小点, $f(X^*)$ 为局部极小值。若对于所有的 $X \in E^*$, 式 (1-21) 均成立, 则称 X^* 为 $f(X)$ 的整体极小点, $f(X^*)$ 为最小值。当式 (1-21) 中是严格不等式时, 相应地点 X^* 称为严格局部极小点或严格整体极小点。

实际问题通常是求整体极小点, 但是直到目前为止, 最优化中绝大多数方法都是求局部极小点, 解决这一矛盾的一种方法是先求出所有的局部极小点, 再求整体极小点。

根据数学分析可知, 极值存在的必要条件和充分条件如下:

定理 1.1 设函数 $f(X)$ 在点 $X^* \in E^*$ 处可微, 如果 X^* 为问题 (1-20) 的局部极小点, 则必有

$$\left. \frac{\partial f(X)}{\partial x_i} \right|_{X=X^*} = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1-22)$$

或写成

$$\nabla f(X^*) = 0 \quad (1-23)$$

式中

$$\nabla f(X^*) = \left(\frac{\partial f(X^*)}{\partial x_1}, \frac{\partial f(X^*)}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f(X^*)}{\partial x_n} \right)^T$$

为函数 $f(X)$ 在点 X^* 处的梯度向量。

通常把满足 (1-23) 的点称为驻点。极值点必为驻点, 但驻点不一定是极值点, 即定理 1.1 为极值点的必要条件。

定理 1.2 设函数 $f(X)$ 在 $X^* \in E^*$ 处二阶可微, 如果 $\nabla f(X^*) = 0$, 且二阶导数阵

$$H(X^*) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(X^*)}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f(X^*)}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f(X^*)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f(X^*)}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(X^*)}{\partial x_2^2} & \dots & \frac{\partial^2 f(X^*)}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 f(X^*)}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(X^*)}{\partial x_n \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f(X^*)}{\partial x_n^2} \end{pmatrix} \quad (1-24)$$

为正定矩阵, 则 X^* 是问题 (1-20) 的严格局部极小点。

矩阵 $H(X)$ 称为海色矩阵, 它是一元函数的二阶导数在多元情况下的推广。定理 1.2 为极值点的充分条件。

例 1-5 试求函数

$$\min f(X) = 2x_1^2 + 5x_2^2 + x_3^2 + 2x_2x_3 + 2x_3x_1 - 6x_2 + 3$$

的极值点及极值。

解 在 E^3 中, 求解

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 4x_1 + 2x_3 = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = 10x_2 + 2x_3 - 6 = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_3} = 2x_3 + 2x_2 + 2x_1 = 0$$

得驻点

$$X^* = (1, 1, -2)^T$$

在驻点处, 函数 $f(X)$ 的海色矩阵为

$$H(X^*) = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 10 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

各阶主子式为

$$4 > 0, \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 10 \end{vmatrix} = 40 > 0, \begin{vmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 10 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 24 > 0$$

所以 $H(X^*)$ 是正定矩阵, 根据定理 1.2 驻点 X^* 就是函数的极小值点。

函数的极小值为

$$f(X^*) = 2 \times 1^2 + 5 \times 1^2 + (-2)^2 + 2 \times 1 \times (-2) + 2 \times (-2) \times 1 - 6 \times 1 + 3 = 0$$

例 1-6 试证正定二次函数

$$f(X) = -\frac{1}{2}X^TAX + b^TX + C$$

有唯一的严格局部极小点。其中 A 是 $n \times n$ 阶对称正定矩阵, b 是 n 维列向量, C 为一常数。

证 因为 $\nabla f(X) = AX + b$, 由定理 1.1 知 $f(X)$ 的极小点应满足

$$AX + b = 0$$

因 A 是正定矩阵, 所以此方程有唯一解

$$X^* = -A^{-1}b$$

这表明 $f(X)$ 最多只有一个极小点 X^* 。另一方面, 因 $f(X)$ 在 X^* 处的海色矩阵

$$H(X^*) = A$$

为正定矩阵, 由定理 1.2 知 X^* 是 $f(X)$ 的严格局部极小点。

二、约束问题的最优性条件

1. 等式约束问题的最优性条件

考虑具有等式约束的最优化问题

$$\begin{cases} \min f(X) \\ h_i(X) = 0, i = 1, 2, \dots, m \end{cases} \quad (1-25)$$

由数学分析可知, 利用函数 $f(X)$ 和约束条件 $h_i(X)$ 构成一个新的函数

$$L(X, \lambda) = f(X) + \lambda_1 h_1(X) + \lambda_2 h_2(X) + \dots + \lambda_m h_m(X)$$

或写成

$$L(X, \lambda) = f(X) + \lambda^T h(X) \quad (1-26)$$

式中 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)^T$, $h(X) = (h_1(X), h_2(X), \dots, h_m(X))^T$, λ_i 称为拉格朗日系数, $L(X, \lambda)$ 称为拉格朗日函数。可将具有等式约束的约束最优化问题转化为求解拉格朗日函数的无约束最优化问题。

根据无约束问题的最优性条件, 由式(1-26)可得式(1-25)的局部极小点 X^* 应满足的必要条件

$$\nabla L(X^*, \lambda^*) = \begin{pmatrix} \nabla_x L \\ \nabla_\lambda L \end{pmatrix} = 0 \quad (1-27)$$

其中

$$\nabla_x L = \nabla f(X^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* \nabla h_i(X^*) = 0 \quad (1-28)$$

$$\nabla_\lambda L = h(X^*) = 0 \quad (1-29)$$

式(1-29)恰好就是问题(1-25)的约束条件。

类似地, 极值点的充分条件为 $\nabla L(X^*, \lambda^*) = 0$, 且函数 $L(X, \lambda)$ 的海色矩阵 $H(X^*, \lambda^*)$ 是正定矩阵。

2. 等式和不等式约束问题的最优性条件考虑一般的最优化问题

$$\begin{cases} \min f(X) \\ g_j(X) \geq 0, j = 1, 2, \dots, p \\ h_i(X) = 0, i = 1, 2, \dots, m \end{cases} \quad (1-30)$$

对于可行域 D 上的点 $X^0 \in D$, 若 $g_j(X^0) = 0$, 则称为对 X^0 的紧约束。显然, 等式约束

$$h_i(X^0) = 0, i = 1, 2, \dots, m$$

都是对 $X^0 \in D$ 点的紧约束。记

$$J = \{j | g_j(X^0) = 0, j = 1, 2, \dots, p, X^0 \in D\}$$

即所有对 X^0 点的紧约束为

$$h_i(X), 1 \leq i \leq m, g_j(X), j \in J$$

设 $X^0 \in D$, 对所有对 X^0 点的紧约束, 若

$$\nabla h_i(X^0), 1 \leq i \leq m, \nabla g_j(X^0), j \in J$$

是线性无关向量组, 就称 X^0 是问题(1-30)的约束条件的正则点。

定理 1.3 若 $f(X)$, $h_i(X)$, ($i = 1, 2, \dots, m$), $g_j(X)$, ($j = 1, 2, \dots, p$), 在可行域 D 上连续可微, 正则点 X^* 是问题(1-30)的极值点, 则存在向量 $\lambda^* = (\lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots, \lambda_m^*)^T$ 和 $\gamma^* = (\gamma_1^*, \gamma_2^*, \dots, \gamma_p^*)^T$, 使

$$\begin{cases} \nabla f(X^*) - \sum_{i=1}^m \lambda_i^* \nabla h_i(X^*) - \sum_{j=1}^p \gamma_j^* \nabla g_j(X^*) = 0 \\ \gamma_j^* g_j(X^*) = 0, j = 1, 2, \dots, p \\ \gamma_j^* \geq 0 \end{cases} \quad (1-31)$$

这就是极值存在的库恩—塔克必要条件。满足上述条件的点称为库恩—塔克点(或写成 Kuhn—Tucker 点)。

根据 Kuhn—Tucker 条件, 可以检验一个点是否为原问题的可能极值点。若不是 Kuhn—Tucker 点, 则一定不会是局部极值点, 假如是 Kuhn—Tucker 点, 则可能是局部极值点。进一步可用下列结论作出判断。

定理 1.4 若 $f(X)$, $h_i(X)$, $i=1, 2, \dots, m$, $g_j(X)$, $j=1, 2, \dots, p$, 在可行域 D 上二阶连续可微, X^* 是 Kuhn—Tucker 点, 并且对于满足

$$\begin{cases} Z^T \nabla g_j(X^*) = 0, & j \in J \text{ 且 } \gamma_j^* > 0 \\ Z^T \nabla g_j(X^*) \geq 0, & j \notin J \text{ 且 } \gamma_j^* = 0 \\ Z^T \nabla h_i(X^*) = 0, & i = 1, 2, \dots, m \end{cases} \quad (1-32)$$

的任意非零向量 Z , 有

$$Z^T [\nabla^2 f(X^*) - \sum_{i=1}^m \lambda_i^* \nabla^2 h_i(X^*) - \sum_{j=1}^p \gamma_j^* \nabla^2 g_j(X^*)] Z > 0 \quad (1-33)$$

则 X^* 问题(1-30)的严格局部极小值点。

其中 $\nabla^2 f(X^*)$, $\nabla^2 h_i(X^*)$, $\nabla^2 g_j(X^*)$ 是相应函数的海色矩阵。

例 1-7 求解非线性规划问题

$$\begin{cases} \min f(X) = x_1 \\ g(X) = 16 - (x_1 - 4)^2 - x_2^2 \geq 0 \\ h(X) = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 2)^2 - 13 = 0 \end{cases} \quad (1-34)$$

解 首先因为

$$\begin{aligned} \nabla f(X) &= (1, 0)^T \\ \nabla g(X) &= (-2(x_1 - 4), -2x_2)^T \\ \Delta h(X) &= (2(x_1 - 3), 2(x_2 - 2))^T \end{aligned}$$

Kuhn—Tucker 条件为

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 2(x_1 - 3) \\ 2(x_2 - 2) \end{pmatrix} - \gamma \begin{pmatrix} -2(x_1 - 4) \\ -2x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \gamma [16 - (x_1 - 4)^2 - x_2^2] = 0 \\ \gamma \geq 0 \end{cases} \quad (1-35)$$

可求出三组满足(1-34)和(1-35)的解

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ \lambda = 0 \\ \gamma = \frac{1}{8} \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = 6.4 \\ x_2 = 3.2 \\ \lambda = \frac{1}{5} \\ \gamma = \frac{3}{40} \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = 3 + \sqrt{13} \\ x_2 = 2 \\ \lambda = \frac{\sqrt{13}}{26} \\ \gamma = 0 \end{cases}$$

将解——代入 $g(X)$, 可知函数 $g(X)$ 对于点 $X' = (0, 0)^T$ 和 $X^2 = (6.4, 3.2)^T$ 都是紧约束, 而

$$\nabla g(X') = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ 和 } \nabla h(X') = \begin{pmatrix} -6 \\ -4 \end{pmatrix}$$

以及

$$\nabla g(X^2) = \begin{pmatrix} -4.8 \\ -6.4 \end{pmatrix} \text{ 和 } \nabla h(X^2) = \begin{pmatrix} 6.8 \\ 2.4 \end{pmatrix}$$

显然都是线性无关的。向量

$$\nabla h(X^3) = \begin{pmatrix} 2\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix}$$

也是线性无关。所以 X' 、 X^2 和 X^3 都是问题 (1-34) 的约束条件的正则点。于是都是问题的 Kuhn-Tucker 点。究竟哪些是极小值点呢？根据定理 1.4 的充分条件，在 X' 处，有

$$\nabla^2 f(X') - \lambda \nabla^2 h(X') - \gamma \nabla^2 g(X') = \frac{-1}{8} \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

是正定矩阵，式 (1-33) 均满足，所以 X' 是严格值小点。

在 X^2 处

$$\begin{aligned} \nabla^2 f(X^2) - \lambda \nabla^2 h(X^2) - \gamma \nabla^2 g(X^2) &= -\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \frac{3}{40} \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

是负定的，然而不存在非零向量 Z ，使

$$Z^T \nabla g(X^2) = 0$$

$$Z^T \nabla h(X^2) = 0$$

成立。因而充分条件 (1-33) 自然满足，即 X^2 也是严格极小值点。

在 $X^3 = (3 + \sqrt{3}, 2)^T$ 处，满足

$$Z^T \nabla g(X^3) \geq 0$$

$$Z^T \nabla h(X^3) = 0$$

的非零向量为 $Z^T = (0, z_2)$ ， $z_2 < 0$ 。然而

$$Z^T [\nabla^2 f(X^3) - \frac{\sqrt{13}}{26} \nabla^2 h(X^3) - 0 \cdot \nabla^2 g(X^3)] Z$$

$$= (0, z_2) \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{13}}{13} & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{13}}{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ z_2 \end{pmatrix} < 0$$