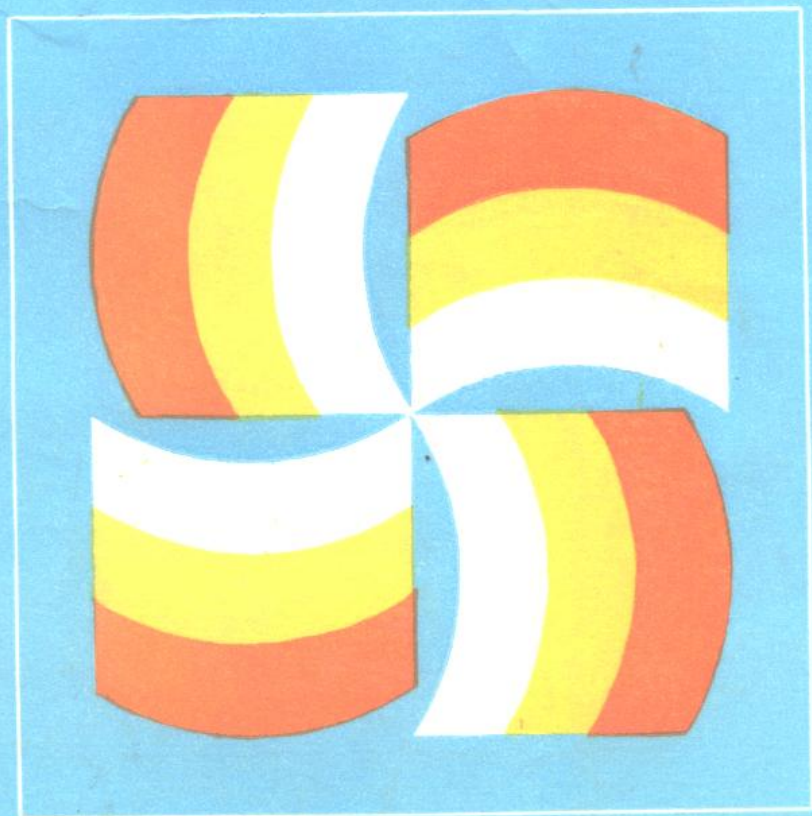


大气动力学 上册

刘式适 刘式达 编著



北京大学出版社

大气动力学

上册

刘式适 刘式达 编著

北京大学出版社

内 容 简 介

本书包含大气动力学的主要内容,是作者多年从事该课程教学的结晶。全书共分十三章,分上、下两册。上册包括前七章,后六章为下册。第一章到第五章主要介绍大气动力学的基本方程和最基本的运动规律;第六章应用摄动法建立了描写大气大尺度运动的准地转运动方程组;第七章和第八章较全面地介绍大气波动及其传播理论;第九章介绍近十多年发展的非线性波动理论;第十章介绍大气能量学;第十一章介绍稳定度理论;第十二章介绍地转适应理论;第十三章介绍近几年发展较快的低纬大气动力学。

本书阐述由浅入深、严谨系统;编排精细新颖,应用新的方法叙述大气动力学中的一些概念,如准地转、有效位能等;并介绍大气动力学的最新发展,如非线性波、波的传播理论等。为了便于教学,每章末并附有复习思考题和习题。

本书可供天气动力学、大气物理学、海洋动力学等专业作为教材或教学参考书,也可供广大从事海洋、气象等科技人员阅读参考。

前 言

多年的学习和工作使我们体会到：总结近10多年国内外的科研成果编写出《大气动力学》一书，贡献给广大气象工作者不仅是我们的愿望，也是广大地球流体力学工作者所希望的。

本书是在1982年10月所编“动力气象学”讲义(上、下册)的基础上修订而成的。在修订过程中既考虑了教学，又考虑了学科的发展；既注意了系统性，又注意便于自学，使初学者能循序渐进地学习它既不感到多大困难又发生兴趣。当然，编写本书的主要目的还是在于使大学生通过学习掌握大气动力学的基础理论，且学会应用近代数学、物理的方法去解决大气动力学的基本问题，并从中了解本学科需要进一步探索和发展之处，从而在今后的学习和工作中去攻克它，为祖国的气象事业和四个现代化服务。

全书共分十三章，第一章到第五章主要介绍大气动力学的基本方程和最基本的运动规律；第六章应用摄动法建立了描写大气大尺度运动的准地转运动方程组；第七章和第八章较全面地介绍大气波动及其传播理论；第七章介绍近十多年发展的非线性波动理论；第十章介绍大气能量学；第十一章介绍稳定度理论，第十二章介绍地转适应理论；第十三章介绍近几年发展较快的低纬大气动力学。

本书内容除参考国内外有关的重要著作外，还包含了近些年我们和国内外一些学者的重要科研成果。本书的编写出版还要感谢一贯对本书的出版给以极大关心的谢义炳教授，杨大升教授主编的“动力气象学”也给本书以极大的启发，陶祖钰副教授阅读了本书的全部书稿，并提出了许多宝贵的意见。北大出版社邱淑清同志对本书的出版作了极大的努力，我们在此深表感谢。还要说明的是，本书的出版得到了中国科学院大气物理所曾庆存教授的热情支持和大气所开放实验室的大力资助，在此深表谢意。

限于编者的水平，本书一定有不少缺点和错误，希望读者指正。

本书主要参考书目

- J. Pedlosky, Geophysical Fluid Dynamics, second edition, Springer-Verlag (1986).
J.R. Holton, An Introduction to Dynamic Meteorology, Academic Press (1972).
Kuo.H.L., Dynamics of quasi-geostrophic flows and instability theory, In Advances in Applied Mechanics, 13(1973).
杨大升, 动力气象学(修订本), 气象出版社(1983).

上册目录

前言	(i)
第一章 大气运动的基本方程	(1)
§ 1.1 地球与大气的基本特征	(1)
§ 1.2 绝对运动与相对运动	(2)
§ 1.3 运动方程	(3)
§ 1.4 连续性方程	(7)
§ 1.5 状态方程	(8)
§ 1.6 热力学方程	(9)
§ 1.7 水汽方程	(11)
§ 1.8 基本方程组	(12)
§ 1.9 球坐标系中的大气运动方程组	(12)
§ 1.10 局地直角坐标系中的大气运动方程组及 β 平面近似	(17)
§ 1.11 大气运动的湍流性, 平均化的大气运动基本方程组	(21)
§ 1.12 湍流半经验理论, 封闭方程组	(26)
§ 1.13 初条件与边条件	(29)
§ 1.14 气压倾向方程	(33)
复习思考题	(34)
习题	(35)
第二章 大气运动的变形方程	(38)
§ 2.1 角动量与角动量方程	(38)
§ 2.2 能量与能量方程	(41)
§ 2.3 正压大气与斜压大气	(50)
§ 2.4 环流与环流定理	(53)
§ 2.5 散度与涡度、流场分析	(57)
§ 2.6 涡度方程、位涡度方程	(64)
§ 2.7 散度方程与平衡方程	(71)
复习思考题	(73)
习题	(74)
第三章 大气中的平衡运动	(77)
§ 3.1 大气水平运动的方程组	(77)
§ 3.2 力的垂直分布和大气的动力分层	(78)
§ 3.3 自然坐标系	(80)
§ 3.4 自由大气中的平衡运动	(83)
§ 3.5 惯性振动和惯性稳定度	(92)
§ 3.6 近地面层大气中的平衡运动	(95)
§ 3.7 上部边界层大气中的平衡运动	(99)
§ 3.8 Ekman 抽吸与旋转衰减	(105)

§ 3.9 地转偏差	(107)
复习思考题	(109)
习题	(111)
第四章 层结大气与静力平衡	(116)
§ 4.1 层结大气和层结稳定度	(116)
§ 4.2 Richardson数	(123)
§ 4.3 有效位能(available potential energy)	(126)
§ 4.4 以静止大气为背景的大气运动基本方程组	(129)
§ 4.5 静力近似、非弹性近似和 Boussinesq 近似	(135)
§ 4.6 正压模式(浅水模式)	(137)
§ 4.7 准 Lagrange 坐标系	(141)
§ 4.8 其它层结参数	(156)
复习思考题	(160)
习题	(161)
第五章 尺度分析	(167)
§ 5.1 大气运动的分类和尺度概念	(167)
§ 5.2 尺度分析(scale analysis)	(168)
§ 5.3 无量纲参数	(173)
§ 5.4 方程的无量纲化及某些近似的充分条件	(180)
复习思考题	(184)
习题	(184)
第六章 准地转动力学	(186)
§ 6.1 小参数方法(WKB 方法)	(186)
§ 6.2 准地转模式与准地转位涡度守恒定律	(196)
§ 6.3 准地转模式的能量守恒定律	(199)
§ 6.4 准地转的位势倾向方程和 ω 方程	(202)
§ 6.5 准无辐散模式	(204)
§ 6.6 半地转模式	(206)
复习思考题	(207)
习题	(207)
第七章 线性波动	(212)
§ 7.1 波的基本概念	(212)
§ 7.2 小振幅波和小扰动方法(small perturbation method)	(217)
§ 7.3 正交模方法(normal modes method)	(223)
§ 7.4 大气中的基本波动	(224)
§ 7.5 正压模式中的大气波动	(234)
§ 7.6 一般大气系统中的波动	(237)
§ 7.7 准地转模式中的大气波动	(243)
§ 7.8 包含基本气流的 Rossby 波	(245)
§ 7.9 Rossby 波的频散, 上下游效应	(249)
§ 7.10 超长波的尺度分析与频率分析	(253)
§ 7.11 Haurwitz 波	(256)
§ 7.12 永恒性波解(permanent wave solution)	(258)

§ 7.13 地形 Rossby 波	(261)
§ 7.14 定常 Rossby 波的形成	(263)
复习思考题.....	(264)
习题.....	(265)

第一章 大气运动的基本方程

本章的主要内容有：

简述地球的特征及其对大气运动的影响；

分析大气中的力场，并建立大气运动的基本方程。这些方程主要有：运动方程(Newton第二定律)、连续性方程(质量守恒定律)、状态方程(气体状态定律)、热力学方程(热力学第一定律)和水汽方程(水汽质量守恒定律)；

指出大气运动的湍流性，并根据湍流半经验理论将上述方程平均化；

建立描写大气运动的封闭方程组，并给出常用的初始条件和边界条件。

§ 1.1 地球与大气的基本特征

一、地球的基本特征

地球一方面绕太阳公转(一年365.25天绕太阳一周)，另一方面又绕自己的轴(称为地轴)自西向东旋转。对太阳而言，自转一周的时间平均为24小时(称为太阳日)；对恒星而言，自转一周的时间平均为23小时56分4秒(称为恒星日)。

地球自转角速度为一矢量，记为 Ω ，见图1.1。其方向为地轴方向，即垂直于旋转平面，并与旋转平面构成右手螺旋系统； Ω 的大小按恒星日计算为

$$\Omega = \frac{2\pi}{1 \text{ 恒星日}} = \frac{2\pi}{86164\text{s}} \approx 7.292 \times 10^{-5} \text{s}^{-1}.$$

地球自转对大气运动有重大的影响，而地球公转主要决定一年四季的变化，但对大气运动影响极小。

地球可视为一椭球体，赤道半径 $a_e \approx 6.378 \times 10^6 \text{m}$ ，极地半径 $a_p \approx 6.357 \times 10^6 \text{m}$ ，两半径之差约21km。又地球上最高的山脉高度不超过10km，所以，地球一般可作为球体来处理。设与椭球体同体积的球体半径为 a (称为地球的平均半径)，则

$$a \approx 6.371 \times 10^6 \text{m};$$

地球的质量经推算为

$$M \approx 5.976 \times 10^{24} \text{kg}.$$

二、大气的基本特征

大气环绕地球并与地球一道旋转，地球大气总质量约为

$$M_a \approx 5.136 \times 10^{18} \text{kg}.$$

标准大气压为一大气压，其数值为

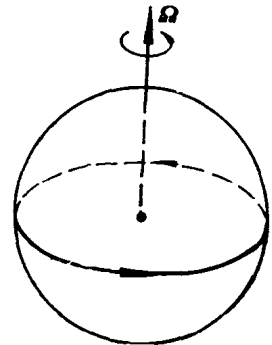


图1.1 地球自转角速度

$$P_0 = 1013.25 \text{ hPa} \approx 1000 \text{ hPa},$$

它即是常说的海平面气压, 标准大气密度数值为

$$\rho_0 \approx 1.29 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3},$$

它即是常说的海平面附近的大气密度. 大气的密度和压强都随高度的增加而减小. 大约95%的大气质量集中在离地面20km高度以下, 这层大气相对于地球半径是很薄的, 但其中有千变万化的天气. 这层大气连续地充满该层的整个空间, 可视为连续介质, 因而其中一切物理量都可视为时间和空间的连续函数. 即大气的任一微小部分(空气微团)可以作为“点来处理”, 称为空气质点.

§ 1.2 绝对运动与相对运动

对于地球而言, 固定在地球上的观测者与地球一道旋转, 他所观测到的大气运动是相对于旋转地球的相对运动, 而对于在恒星上的观测者而言, 它所观测到的大气运动是绝对运动.

设原点位于地球中心, 坐标轴方向相对于恒星(如太阳)是固定的坐标系为惯性坐标系, 而原点也在地球中心, 但坐标轴固定在地球上的坐标系为旋转坐标系. 对于矢量 $\mathbf{A}$, 设它在惯性坐标系和在旋转坐标系中随时间的变化率分别为 $\frac{d_a \mathbf{A}}{dt}$ 和 $\frac{d \mathbf{A}}{dt}$, 因而, 依力学基本原理,

$\frac{d_a \mathbf{A}}{dt}$ 应是 $\frac{d \mathbf{A}}{dt}$ 与因旋转坐标系以角速度 $\boldsymbol{\Omega}$ 旋转而引起的 $\mathbf{A}$ 的变化 $\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{A}$ 之和, 即

$$\frac{d_a \mathbf{A}}{dt} = \frac{d \mathbf{A}}{dt} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{A}. \quad (1.1)$$

对于空气微团的位置矢量(矢径) $\mathbf{r}$, 上式化为

$$\mathbf{V}_a = \mathbf{V} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}. \quad (1.2)$$

它表示空气微团的绝对速度 $\mathbf{V}_a \equiv \frac{d_a \mathbf{r}}{dt}$ 等于它的相对速度 $\mathbf{V} \equiv \frac{d \mathbf{r}}{dt}$ 与因地球自转而引起的牵连速度 $\mathbf{V}_e \equiv \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}$ 之和.

取旋转坐标系原点在球心 O , 空气微团所在空间一点为 P , 则 $\mathbf{r} = \overrightarrow{OP}$; 取地轴到 P 点且垂直于地轴的矢径为 $\mathbf{R}$ ($\mathbf{R}$ 的大小 R 称为通过 P 点的纬圈半径), 如图1.2, $\mathbf{R} = \overrightarrow{O'P}$; 因

$$\mathbf{r} = \overrightarrow{OO'} + \mathbf{R},$$

则

$$\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} = \boldsymbol{\Omega} \times (\overrightarrow{OO'} + \mathbf{R}) = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{R}. \quad (1.3)$$

上式表示: 因地球旋转产生的牵连速度 $\mathbf{V}_e$ 既垂直于 $\boldsymbol{\Omega}$ 又垂直于 $\mathbf{R}$, 因而与通过 P 点的纬圈相切, 方向自西向东.

将 (1.3) 式代入 (1.2) 式, 则空气微团的绝对速度可表为

$$\mathbf{V}_a = \mathbf{V} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{R}. \quad (1.4)$$

同样, 由 (1.1) 式可以得到空气微团的绝对加速度为

$$\frac{d_a \mathbf{V}_a}{dt} = \frac{d \mathbf{V}_a}{dt} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V}_a.$$

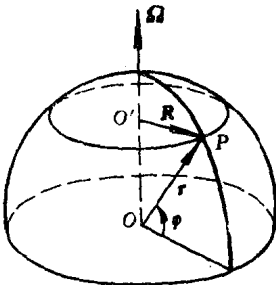


图1.2 $\mathbf{r}$ 与 $\mathbf{R}$

(1.2)式代入上式得到

$$\frac{d_a \mathbf{V}_a}{dt} = \frac{d}{dt} (\mathbf{V} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) + \boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{V} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) = \frac{d\mathbf{V}}{dt} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}). \quad (1.5)$$

其中 $d\mathbf{V}/dt$ 为相对加速度, $2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V}$ 为 Coriolis 加速度, $\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})$ 为地球旋转产生的牵连加速度。上式表明: 空气微团的绝对加速度等于相对加速度、Coriolis 加速度与牵连加速度之和。

对于牵连加速度, 依 (1.3) 式

$$\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) = \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{R}) = (\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{R}) \boldsymbol{\Omega} - (\boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{\Omega}) \mathbf{R} = -\Omega^2 \mathbf{R},$$

这样, (1.5) 式可改写为

$$\frac{d_a \mathbf{V}_a}{dt} = \frac{d\mathbf{V}}{dt} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V} - \Omega^2 \mathbf{R}. \quad (1.6)$$

§ 1.3 运动方程

运动方程是 Newton 第二定律的数学表述。Newton 第二定律指出: 在惯性坐标系中, 作用于物体上的力等于物体的质量与其加速度的乘积。对于单位质量的空气微团而言, 设其受力为 $\mathbf{F}_i (i=1, 2, \dots)$, 因而运动方程可表为

$$\frac{d_a \mathbf{V}_a}{dt} = \sum_i \mathbf{F}_i.$$

将 (1.6) 式代入上式, 得到

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V} - \Omega^2 \mathbf{R} = \sum_i \mathbf{F}_i. \quad (1.7)$$

若不考虑电磁力, 则在惯性坐标系中单位质量空气微团所受的作用力有下列三种。

一、地心引力

地心引力是万有引力的一种, 单位质量空气微团所受的地心引力为

$$\mathbf{g}_a \equiv -\frac{GM}{r^3} \mathbf{r}, \quad (1.8)$$

其中

$$G = 6.668 \times 10^{-11} \text{ kg}^{-1} \cdot \text{m}^3 \cdot \text{s}^{-2}$$

为引力常数, M 为地球质量, $\mathbf{r}$ 为矢径, $r = |\mathbf{r}|$ 。

由此便知: 地心引力 $\mathbf{g}_a$ 的方向指向球心, 大小与 r^2 成反比。

不难证明 (见本章末习题 6): 地心引力 $\mathbf{g}_a$ 是位势力或保守力, 即它可表为

$$\mathbf{g}_a = -\nabla \phi_a. \quad (1.9)$$

其中 ∇ 为 Hamilton 算子, ϕ_a 称为引力位势, 它的空间微分为

$$\delta \phi_a = \nabla \phi_a \cdot \delta \mathbf{r} = -\mathbf{g}_a \cdot \delta \mathbf{r},$$

其中 $\delta \mathbf{r}$ 为矢径 $\mathbf{r}$ 的空间微分。由上式求得

$$\phi_a = - \int \mathbf{g}_a \cdot \delta \mathbf{r} = \int \frac{GM}{r^3} \mathbf{r} \cdot \delta \mathbf{r} = \int \frac{GM}{r^2} \delta r = - \frac{GM}{r} + C_1,$$

其中 C_1 为积分常数。如取极地海平面 ($r = a_p$) 的引力位势为零, 则由上式定得 $C_1 = \frac{GM}{a_p}$, 因而

$$\phi_a = - \frac{GM}{r} + \frac{GM}{a_p} = GM \left(\frac{1}{a_p} - \frac{1}{r} \right).$$

所以, 等引力位势面为同心球面, 且 ϕ_a 随 r 的增加而增加。

二、气压梯度力

气压梯度力是由于空气压强不均匀, 周围空气对空气微团的作用力。单位质量空气微团所受的气压梯度力为

$$\mathbf{G} \equiv - \frac{1}{\rho} \nabla p, \quad (1.10)$$

其中 ρ 为空气密度, p 为空气压强。

由此便知: 气压梯度力 $\mathbf{G}$ 的方向垂直于等压面, 且由高压指向低压, 大小与气压梯度 ∇p 的大小 $|\nabla p|$ 成正比, 与空气密度成反比。

三、分子粘性力 (分子摩擦力)

分子粘性力是在空气速度分布不均匀的情况下, 由于空气分子运动引起动量输送的表现。单位质量空气微团所受的分子粘性力可表为

$$\mathbf{F} \equiv \nu \nabla^2 \mathbf{V} + \frac{\nu}{3} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{V}), \quad (1.11)$$

其中 ∇^2 为 Laplace 算子, ν 称为运动学分子粘性系数。通常还引进动力学分子粘性系数 μ , 它与 ν 的关系为

$$\nu = \mu / \rho. \quad (1.12)$$

在海平面附近, 通常取

$$\mu = 1.72 \times 10^{-5} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}, \quad \nu = 1.34 \times 10^{-5} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}.$$

有时, 分子粘性力 $\mathbf{F}$ 也可用分子粘性应力张量 τ_{ij} 表示为

$$F_j = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_i}.$$

把地心引力、气压梯度力和分子粘性力三者代入到运动方程 (1.7) 的右端, 并把 (1.7) 式左端第二项和第三项移至右端, 则运动方程 (1.7) 化为

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = \mathbf{g}_a + \Omega^2 \mathbf{R} - 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{F}. \quad (1.13)$$

上述运动方程的表示意味着是在与地球一道旋转的坐标系中考察大气运动。

这样, 依 D'Alembert 原理, 在旋转坐标系中又增加了两个力, 它们是

四、Coriolis 力（地转偏向力）

对单位质量空气微团而言，Coriolis 力表示为

$$\mathbf{C} \equiv -2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V}, \quad (1.14)$$

是由于地球旋转及空气微团相对于地球有运动而产生。Coriolis 力 $\mathbf{C}$ 垂直于 $\boldsymbol{\Omega}$ 和 $\mathbf{V}$ ，且在北半球指向运动的右方。因 $\mathbf{C}$ 垂直于 $\mathbf{V}$ ，所以，Coriolis 力对空气微团运动不作功。即它只能改变速度的方向，不能改变速度的大小，故 Coriolis 力又有地转偏向力之称。

五、惯性离心力

对单位质量空气微团而言，惯性离心力为

$$\mathbf{F}_c \equiv \Omega^2 \mathbf{R}, \quad (1.15)$$

是由于地球自转所引起，惯性离心力 $\mathbf{F}_c$ 的方向垂直于地轴向外（即 $\mathbf{R}$ 的方向），大小为 $\Omega^2 R$ ($R = |\mathbf{R}|$)。在极地点，因 $R = 0$ ，所以，在极地点无惯性离心力的作用。

同样，也不难证明（见本章末习题 6），惯性离心力 $\mathbf{F}_c$ 与地心引力 $\mathbf{g}_a$ 一样也是位势力或保守力，即它可表为

$$\Omega^2 \mathbf{R} = -\nabla \phi_c,$$

其中 ϕ_c 称为惯性离心力位势。它的空间微分为

$$\delta \phi_c = \nabla \phi_c \cdot \delta \mathbf{r} = -\Omega^2 \mathbf{R} \cdot \delta \mathbf{r} = -\Omega^2 \mathbf{R} \cdot \delta \mathbf{R},$$

其中 $\delta \mathbf{R}$ 为 $\mathbf{R}$ 的空间微分。由上式求得

$$\phi_c = - \int \Omega^2 \mathbf{R} \cdot \delta \mathbf{R} = - \int \Omega^2 R \delta R = - \frac{1}{2} \Omega^2 R^2 + C_2.$$

其中 δR 为 R 的空间微分， C_2 为积分常数。如规定在地轴上 ($R = 0$) 的离心力位势为零，则由上式定得 $C_2 = 0$ ，因而

$$\phi_c = - \frac{1}{2} \Omega^2 R^2.$$

所以，等离心力位势面为同轴圆柱面，且 $\phi_c < 0$ ，其绝对值随 R 的增加而增加。

我们上面分析了五种力，它们就是通常所说的空气微团的作用力。在这些力中与地球有关但与空气运动无关的有地心引力 $\mathbf{g}_a$ 与惯性离心力 $\Omega^2 \mathbf{R}$ 。如地球不旋转，静止空气微团所受地球的作用力就只有地心引力 $\mathbf{g}_a$ 。然而，实际地球是自转的，因而单纯的地心引力 $\mathbf{g}_a$ 无法测量到，实际测量到的是地心引力 $\mathbf{g}_a$ 和惯性离心力 $\Omega^2 \mathbf{R}$ 的合力，也就是通常所说的重力。对单位质量的空气微团而言，它表为

$$\mathbf{g} \equiv \mathbf{g}_a + \Omega^2 \mathbf{R}. \quad (1.16)$$

重力的简单图象见图 1.3。

因 $\mathbf{g}_a$ 指向球心， $\Omega^2 \mathbf{R}$ 垂直于地轴向外，因而，除赤道和极地而外， $\mathbf{g}$ 并不指向球心，而具有指向赤道方向的分量。正由于存在惯性离心力，使地球成为椭球体，赤道半径比极地半径约长 21km。但这个差值比起地球平均半径来讲是微不足道的，因此，在地球流体（海洋及大

气) 动力学中仍把地球处理为一球形。

因 $\mathbf{g}_a$ 和 $\Omega^2 \mathbf{R}$ 都是位势力, 所以, 重力 $\mathbf{g}$ 也是位势力, 即它可表为

$$\mathbf{g} = -\nabla\phi, \quad (1.17)$$

其中 ϕ 称为重力位势, 它为引力位势 ϕ_a 和离心力位势 ϕ_c 之和, 即

$$\phi = \phi_a + \phi_c = GM \left(\frac{1}{a_p} - \frac{1}{r} \right) - \frac{1}{2} \Omega^2 R^2. \quad (1.18)$$

从 (1.17) 式便知: 重力 $\mathbf{g}$ 的方向垂直于等重力位势面, 且由高重力位势值指向低重力位势值。 $\mathbf{g}$ 的大小即是重力加速度 $g = |\mathbf{g}|$ 。因重力位势 ϕ 随 r 和 R 变化, 引进纬度 φ 和海拔高度 z , 由图 1.2 知

$$R = r \cos \varphi, \quad r = a + z.$$

因而重力加速度 g 随纬度 φ 和高度 z 的变化而变化。通常, g 随纬度 φ 的增加而增加, 随高度 z 的增加而减小。设在海平面 ($z=0$), g 随 φ 的变化记为 $g_0(\varphi)$ 。据分析有

$$g_0(\varphi) = g_0(0) (1 + 0.005302 \sin^2 \varphi - 0.000007 \sin^2 2\varphi),$$

其中 $g_0(0) = 9.78031 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ 为赤道海平面处的重力加速度。由上式可算得极地海平面处重力加速度的数值为 $g_0(\pi/2) = 9.83028 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ 。 g 随 φ 和 z 的变化, 常采用下列公式计算

$$g = g_0(\varphi) (1 - 3.14 \times 10^{-7} z),$$

其中 z 用米做单位。

对于 $z=20\text{km}$ 以下的大气, 我们通常就取 $g=9.8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ 来计算。若认为 $\mathbf{g}$ 的方向指向球心, 则重力位势 ϕ 的空间微分为

$$\delta\phi = \nabla\phi \cdot \delta\mathbf{r} = -\mathbf{g} \cdot \delta\mathbf{r} \approx g\delta z,$$

其中 δz 为 z 的空间微分。若规定在海平面 $\phi=0$, 则由上式求得重力位势 ϕ 为

$$\phi = \int_0^z g\delta z \approx g_0(\varphi)z \approx gz. \quad (1.19)$$

所以, 重力位势 ϕ 表示移动单位质量空气微团从海平面 ($z=0$) 到 z 高度, 克服重力所作的

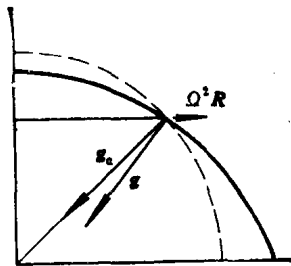


图 1.3 重力

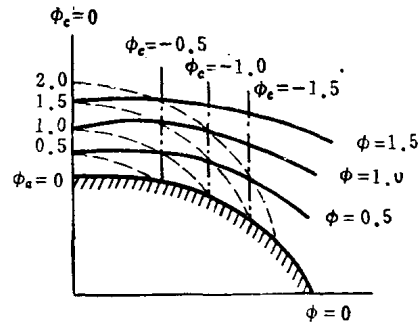


图 1.4 等重力位势面

功, 其数值近似等于重力加速度 $g_0(\varphi)$ 乘以海拔高度 z 。在 z 不太大时, ϕ 就用 gz 来代替。

利用 (1.18) 式, 我们可以画出等重力位势面的大致形势, 见图 1.4 中的实线。若取等

ϕ_a 面与等 ϕ_c 面的间隔都为 $10^7 \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$, 则穿过等 ϕ_a 面与等 ϕ_c 面的交点就是等 ϕ 面。由图 1.4 可知, 等重力位势面间的几何距离是不同的, 在极地密 (g 数值相对大) 赤道疏 (g 数值相对小)。

实际工作中, 考虑到用“几何米”这把尺子去量度重力位势时, 等重力位势面不平行的特点, 又考虑到两重力位势面重力位势差值相同的事实, 设计了“位势米(gpm)”尺子去量度重力位势。因由 (1.18) 式, 当 $z = 1 \text{m}$ 时, $\phi \approx 9.8 \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$ 。为了使这两把尺子在数值上更接近, 我们定义

$$1 \text{ gpm} = 9.8 \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2},$$

并引进位势米 ($\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$) 的当量 C

$$C = 9.8 \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} / \text{gpm} \textcircled{1},$$

则用位势米做单位的重力位势为

$$z_g = \frac{1}{C} \phi = \frac{1}{C} \int_0^z g \delta z \approx \frac{1}{C} g_0(\varphi) z.$$

z_g 称为位势高度, 它的本质不是高度, 而是重力位势。引入位势高度后, 它用位势米做单位, 它就像哈哈镜一样, 把几何上本来不平行的等重力位势面, 变成彼此平行了。以致认为重力只在 z_g 上有分量, 而且 z_g 在数值上与 z 很接近。因 $g_0(\varphi) z \approx C z_g$, 因而若 z 用 z_g 代替, 则 g_0 就用 C 代替。

将 (1.16) 式代入 (1.13) 式得到

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = \mathbf{g} - \frac{1}{\rho} \nabla p - 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V} + \mathbf{F}. \quad (1.20)$$

这就是在地球上常用到的描述大气运动的运动方程或 Navier-Stokes 方程的矢量形式, 其中

$$\frac{d}{dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \quad (1.21)$$

称为个别变化(或物质导数、随体微商), $\frac{\partial}{\partial t}$ 称为局地变化, $\mathbf{V} \cdot \nabla$ 称为迁移变化。

§ 1.4 连续性方程

连续性方程是质量守恒定律的数学表述, 它表为

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{V} = 0, \quad (1.22)$$

其中 ρ 为空气密度, $\mathbf{V}$ 为速度。由于

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \rho, \quad \nabla \cdot \rho \mathbf{V} = \rho \nabla \cdot \mathbf{V} + \mathbf{V} \cdot \nabla \rho,$$

连续性方程 (1.22) 式可以改写为

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{V} = 0. \quad (1.23)$$

①单位gpm为气象学中常用单位,

在上述诸式中, $\nabla \cdot \rho \mathbf{V}$ 称为质量散度, $\nabla \cdot \mathbf{V}$ 称为速度散度。在大气中 $\mathbf{V}$ 的水平运动部分, 即空气的水平运动通常称为风, 记为 $\mathbf{V}_h$ 。相应, $\mathbf{V}_h$ 的散度称为水平速度散度或水平辐散辐合。

若定义

$$\alpha \equiv 1/\rho, \quad (1.24)$$

称为比容, 则连续性方程也可表为

$$\frac{d\alpha}{dt} = \alpha \nabla \cdot \mathbf{V}. \quad (1.25)$$

如密度定常, $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$, 此时流体可称为非弹性流体, 连续性方程写为

$$\nabla \cdot \rho \mathbf{V} = 0. \quad (1.26)$$

对于密度的空间变化和时间变化都很小的流体 (它可以称为准均匀不可压缩流体), 可忽略 $d\rho/dt$ 对于质量平衡的影响, 因而连续性方程可近似地写为

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0. \quad (1.27)$$

必须注意, 上式忽略了 $d\rho/dt$, 意味着不考虑 $d\rho/dt$ 在质量平衡中的作用, 但 $d\rho/dt$ 还要受热力学的规律所制约。

§ 1.5 状态方程

大气状态方程即是理想气体的 Clapeyron 定律的数学表述, 它可表为

$$p = \rho RT, \quad (1.28)$$

或

$$p\alpha = RT, \quad (1.29)$$

其中 p 是气体, T 是气温,

$$R = 287 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \text{K}^{-1},$$

为干空气的气体常数。

对于湿空气, 状态方程仍可以用 (1.28) 式或 (1.29) 式进行精确计算, 只要把其中的温度 T 改为虚温 T_v 即可。 T_v 与 T 的关系为

$$T_v = T(1 + 0.608q), \quad (1.30)$$

其中 q 称为比湿。

对于像水这样的流体, 压力变化引起的密度很小, 状态方程可简写为

$$\rho = \rho_0[1 - \beta(T - T_0)], \quad (1.31)$$

其中

$$\beta = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p \quad (1.32)$$

为热膨胀系数, ρ_0, T_0 分别为标准状态的密度和温度。

对于海水, 尚需考虑海水的盐度 S , 其状态方程可以写为

$$\rho = \rho_0[1 - \beta(T - T_0) + \gamma(S - S_0)], \quad (1.33)$$

其中

$$\gamma = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial S} \right)_{p,T}, \quad (1.34)$$

为盐压缩系数, S_0 为标准状态的盐度。

对于大气, 常引入一个新的温度, 它称为位温, 记为 θ , 它是将空气微团通过绝热过程移动到压强 $P_0 = 1000 \text{ hPa}$ 处的温度, 其表达式为

$$\theta = T \left(\frac{P_0}{p} \right)^{\kappa/c_p}, \quad (1.35)$$

其中

$$c_p = 1.005 \times 10^3 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$$

为空气的定压比热,

§ 1.6 热力学方程

热力学方程是热力学第一定律的数学表述, 在不计分子粘性耗损时, 它可以有如下几种表述形式。

一、用气温、比容表述

$$c_v \frac{dT}{dt} + p \frac{d\alpha}{dt} = Q, \quad (1.36)$$

其中

$$c_v = 718 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$$

为空气的定容比热; c_p, c_v 与 R 之间的关系为

$$c_p - c_v = R; \quad (1.37)$$

Q 是单位质量空气在单位时间内从外界得到的热量, 它包括通过分子热传导、辐射、相变等方式传输的热量。

(1.36) 式是经典的热力学第一定律的表述形式。它表示单位质量空气从外界吸收的热量等于空气内能 $c_v T$ 的增加和对外做功之和。

二、用气压、气温表述

将状态方程 (1.24) 式个别微商有

$$p \frac{d\alpha}{dt} + \alpha \frac{dp}{dt} = R \frac{dT}{dt}, \quad (1.38)$$

把它代入到 (1.36) 式, 并利用 (1.37) 式, 消去 α 得到

$$c_p \frac{dT}{dt} - \alpha \frac{dp}{dt} = Q. \quad (1.39)$$

三、用气压、密度表述

将 (1.38) 式代入到 (1.36) 式, 并利用 (1.37) 式, 消去 T 得到

$$\frac{d \ln p}{dt} + \gamma \frac{d \ln \alpha}{dt} = \frac{1}{c_v T} Q$$

或利用 $\alpha = 1/\rho$, 则上式改写为

$$\frac{d \ln p}{dt} - \gamma \frac{d \ln \rho}{dt} = \frac{1}{c_v T} Q. \quad (1.40)$$

在上两式中

$$\gamma \equiv c_p/c_v \approx 1.4,$$

称为 Poisson 指数。

四、用位温表述

将位温公式 (1.35) 取对数有

$$\ln \theta = \ln T - \frac{R}{c_p} \ln p + \frac{R}{c_p} \ln P_0,$$

上式两端作个别微商得

$$\frac{d \ln \theta}{dt} = \frac{d \ln T}{dt} - \frac{R}{c_p} \frac{d \ln p}{dt}.$$

再将上式代入到 (1.39) 式得到

$$\frac{d \ln \theta}{dt} = \frac{1}{c_p T} Q. \quad (1.41)$$

若令

$$s = c_p \ln \theta = c_p \ln T - R \ln p + R \ln P_0 \quad (1.42)$$

为单位质量空气的熵, 则 (1.41) 式可改写为

$$T \frac{ds}{dt} = Q. \quad (1.43)$$

在空气运动的短期变化过程中, 可以认为空气微团与外界无热量交换, 这就是绝热过程。此时, 上述四种热力学方程的表述形式 (1.36), (1.39), (1.40) 和 (1.41) 式分别变为下列四种形式的绝热方程

$$c_v \frac{dT}{dt} + p \frac{d\alpha}{dt} = 0, \quad (1.44)$$

$$c_p \frac{dT}{dt} - \alpha \frac{dp}{dt} = 0, \quad (1.45)$$

$$\frac{d \ln p}{dt} - \gamma \frac{d \ln \rho}{dt} = 0, \quad (1.46)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = 0 \quad \text{或} \quad \frac{d \ln \theta}{dt} = 0. \quad (1.47)$$

(1.47) 式即是绝热过程中的位温守恒定律, 它表示在干绝热过程中, 位温 θ 是守恒量。这里, 我们体会到, 将气压 p 和气温 T 综合成位温 θ , 具有很大的优越性, 这是大气动