高等学校
试用教材

管理数学基础Ⅰ
微积分

高汝熹　主编

GUANLI SHUXUE JICHU WEIJIFEN

高等学校试用教材

管理数学基础 I
微积分

高汝熹 主编

复旦大学出版社

(沪)新登字 202 号

内 容 提 要

本书系"综合大学管理类专业教育协作组"组织编写的管理类专业通用系列教材之一．全书共十一章，内容包括：函数、极限与连续、导数与微分、微分学的基本定理与导数的应用、不定积分、定积分、无穷级数、空间解析几何、多元函数的微分学、重积分、微分方程和差分方程．书中还通过一些经济学和管理科学的实例介绍了微积分、微分方程、差分方程在经济和管理中的应用，本书也可供从事经济学、管理科学学习和研究人员阅读．

管理数学基础 I
微 积 分
高汝熹 主编
复旦大学出版社出版
(上海国权路 579 号)
新华书店上海发行所发行 复旦大学印刷厂印刷
开本 850×1168 1/32 印张 15.125 字数 445,000
1992 年 10 月第 1 版 1992 年 10 月第 1 次印刷
印数 1— 3000

ISBN 7-309-01027-2/O·119
定价：5.10 元

前 言

1985 年初，由北京大学、中国人民大学、南京大学、复旦大学、厦门大学、中山大学、武汉大学和南开大学等八所综合大学发起，并得到国家教委高等教育一司支持，成立了《综合大学管理类专业教育协作组》，全国三十多所综合大学有关院系参与了协作．在“协作组”第一次全体会议上(1985 年 5 月)决定由南开大学牵头，组织各校力量开展管理类专业系列教材建设．在各校的共同努力下，这项工作取得了长足的进展，系列教材即将陆续出版，供各方面的管理类专业使用．

这套管理类专业系列教材共计二十多本，包括管理学科的六大部分：

1．管理数学。包括微积分、线性代数、管理统计、管理规划、系统科学导论等五本书，系统地讲授计量管理的基础、理论、方法和应用；

2．管理信息系统．包括管理信息系统、管理数据处理与 BASIC 语言、系统分析与设计、数据结构与程序设计、数据库管理系统等五本书，讲授计算机参与现代化管理的理论、手段和方法；

3．管理科学原理．包括管理学概论、管理学原理、管理心理学、经济管理思想史，环境与经济发展学等五本书，从理论上讲授管理学的产生、发展、演变过程以及与特定历史、文化、价值观、道德观和政治、经济、科学、人口、生态等环境的关系；

4．会计统计方面．包括会计原理与工业会计、统计原理与工业统计、财政与信贷学、国际金融与贸易等四本书，全面讲授作为经营管理人员必须掌握的知识、能力基本功；

5．微观经济管理学．包括工业企业管理原理．工业企业生产管理、工业企业经营管理和市场学等四本书，系统地讲授微观经济活动领域内经营管理活动的规律，预测、决策、方法、手段和艺术；

6．宏观经济管理学．包括宏观经济管理学、宏观经济活动分析、

苏联东欧经济管理、西方经济理论(宏观经济学、微观经济学)等五本书,以讲授中国宏观经济管理活动为中心,也系统地介绍东西方经济管理活动思想、理论的发展、演变过程,并加以比较、鉴别.

编写这套书的指导思想是:

1. 鉴于我国管理专业教育受到上自中央、下至企业的广泛重视,各级领导机构为培养管理人才,作出了巨大的努力,积累了不少经验;综合大学普遍建立了经济管理或管理科学专业、或学院,有的还建立了研究机构,几年来,已编写了相当数量的教材和参考资料. 但是,管理作为一个大的学科类别,尚没有系统的教材. 我们组织编写的这套教材,将力求在马克思主义理论指导下,为建立具有中国特色的管理专业学科体系,作出应有的贡献.

2. 这套教材把管理学科作为一个大系统,六个部分是服从大系统要求的各自相对独立的子系统,每本教材、又各自在子系统下负有完成教育任务的独立功能. 全套教材相互呼应,避免重复、脱节和重大的遗漏. 这套书既可以作为综合大学管理类本科的专业课教材,也可以部分地用作其他类型管理专业教育的教材,即把教学的普遍要求与特殊要求有机地结合起来.

3. 每本教材努力结合自身所应完成的教育任务,贯彻当前政治、经济、科技、教育体制改革的要求和对外开放、搞活经济、古为今用、洋为中用的基本政策,阐述管理科学的二重性原理与继承、借鉴、改造、开拓、创新的辨证关系.

这套教材的陆续出版是综合大学经济管理院系大协作的主要成果之一,有两百多名具有较高学术水平的教师团结一致、通力协作,在较短的时间内在新学科的建设方面得到可喜的成果. 教材采取分章编写法,取名家之长. 每本教材从审定大纲到最后定稿,从体系、体例、内容到文字,都由集体讨论审定,最后由主编定稿,以保证质量.

经国家教育委员会高等教育一司批准,《协作组》成立了由北京大学等十六所综合大学的管理学教授和专家十七人组成的《综合大学管理学科教材编选协调委员会》,对教材建设进行全面的指导,负责审查、协调、组织工作,并承担推荐综合大学其他个人或集体撰写的优秀管理

学科教材出版工作.

这套教材由复旦大学出版社、云南教育出版社、南开大学出版社、内蒙古大学出版社、武汉大学出版社、天津人民出版社等陆续出版.

全国综合大学管理教育协作组

1987年4月10日

编者的话

《管理数学》是根据1985年"全国综合大学管理数学协作组"(简称协作组)意见及按照1986年4月昆明会议制定的大纲编写，并经过1987年6月沈阳会议审稿而完成的，可供经济、管理、财贸等高等院校的有关专业用作教材. 全套书共分五种：《管理数学基础I微积分》、《管理数学基础II线性代数》、《管理统计》、《管理规划》、《系统科学导论》，本书即为其中的一种.

本书由复旦大学高汝熹主编，孙芳烈主笔，参加本书编写的还有张金成、王志常、倪秀冬. 全书由高汝熹负责定稿，孙芳烈协助主编做了大量工作. 复旦大学曹正明老师也为本书选配了部分习题.

参加本书审稿的单位有云南大学、辽宁大学、厦门大学、内蒙古大学、兰州大学、郑州大学、南开大学、复旦大学、武汉大学、协作组、复旦大学出版社、云南教育出版社.

本书在编写过程中得到了国家教委及各兄弟院校的大力支持，特致以衷心的谢意. 由于编者水平有限，书中难免有谬误之处，敬请读者批评、指正。

目　　录

第一章 函 数

客观世界中的任何事物总是在不断地运动、变化的，而且它们的运动和变化总是相互联系、相互制约的，函数就是从数量上反映事物在运动、变化过程中的相互联系、相互制约的关系，它是高等数学的主要研究对象.

§1 集合与映射

1. 集合的概念

集合是我们经常遇到的一个名词，就人们的经验而言，这几乎是不言自明的概念，如用简洁的语言来表述，那就是：某些指定的事物（或成员）汇集在一起就成为一个集合，简称为集；其中每一个事物（或成员）叫做这个集合的元素.

例 1 全体实数是一个集合，每个实数是这个集合的一个元素.

例 2 本书的全部习题是一个集合，而其中每一道习题是它的一个元素.

例 3 凯乐百货店销售的所有商品是一个集合，其中的每一件商品是这集合的一个元素.

我们用大写字母 $A, B, C, \cdots$ 表示集合，用小写字母 $a, b, c, \cdots$ 表示集合的元素. 若 a 是集合 A 的元素，则记为 $a\in A$（读作 a 属于 A）；若 a 不是集合 A 中的元素，则记为 $a\overline{\in} A$（读作 a 不属于 A）. 如果集合 A 和 B 具有完全相同的元素，则称 A 和 B **相等**，记为 $A=B$.

我们通常用以下三种方法来表示集合：

i）文字描述法：如上面三个例子.

ii）列举法：当集合的元素可一一列出时，就把所有元素列于括号 $\{\cdots\cdots\}$ 内来表示此集合，例如：

$\{c, a, b\}$表示由元素 a, b, c 组成的集合；

自然数集　　$N \triangleq \{1, 2, 3, \cdots\cdots\}$*；

整数集　　$Z \triangleq \{0, \pm 1, \pm 2, \cdots\cdots\}$等.

iii）结构式方法：把具有某种特定性质 p 的所有元素 x 组成的集合记成

$$A = \{x | x \text{ 具有性质 } p\}.$$

例如：

$A_1 = \{x | 0 \leqslant x < 1\}$ 是由满足不等式 $0 \leqslant x < 1$ 的全体实数组成的集合；

$A_2 = \{(x, y) | x^2 + y^2 < 1\}$是平面上单位圆内的点的全体所组成的集合；

$A_3 = \{x | x^2 - 1 = 0\}$是满足方程 $x^2 - 1 = 0$ 的 x 的全体所组成的集合. 由集合相等的含义易知：

$$A_3 = \{x | x^2 - 1 = 0\} = \{-1, 1\}.$$

我们把全体实数组成的集合称做实数集，记为 R，即

$$R \triangleq \{x | -\infty < x < +\infty\}$$

为了数学处理的需要，我们称不包含任何元素的集合为空集，记为 $\varnothing$. 例如，

$$\{x | x^2 + 1 = 0 \text{ 且 } x \in R\} = \varnothing.$$

要注意$\{0\}$不是空集，它是由单个元素“0”组成的集合.

集合按其包含的元素的多少可分为：有限集——仅包含有限个元素的集合，如例 2、例 3 中的集合和 A_3 等；无限集，如 N, Z, R 等.

对于两个集合 A 和 B，若对任一 $a \in A$，必有 $a \in B$，即 A 的每一个元素都是 B 的元素，就称 A 是 B 的子集，记为 $A \subset B$ 或 $B \supset A$，读作“A 包含于 B”或“B 包含 A”.

例如，$\left\{n \middle| \frac{n}{2} \in Z\right\} \subset Z$，即偶数集是整数集的子集. 又如，$A$ 为所有等边三角形组成的集合，B 为等腰三角形的全体组成的集合，C 是任意三角形组成的集合，则有：

---

* 记号“$\triangleq$”表示“记为”或“定义为”.

$$A \subset B \subset C$$

为了直观起见，我们通常用一个平面图形，譬如平面圆来表示一个集合，这时 $A \subset B$ 的关系，如图 1-1 所示.

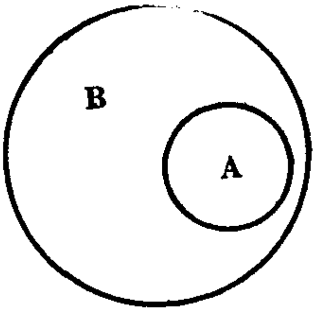

图 1-1

由子集的定义，易知：

i）若 $A \subset B$ 且 $B \subset A$，则 $A = B$. 由此可见，在集合论中我们若要证明两个集相等，只要证明它们互相包含即可.

ii）$A \subset A$，即任一集合包含它自身.

关于后一点，即 $A \subset A$ 是平凡情况，而我们感兴趣的往往是一个集的"真子集"：即若 $A \subset B$，且至少存在一元素 $b \in B$，但 $b \overline{\in} A$，这时称 A 是 B 的**真子集**.

另外，也是为了数学处理的需要，规定：空集 $\varnothing$ 是任一集合 A 的子集，即 $\varnothing \subset A$.

在高等数学中常用到的集合是实数集 R 及其子集，特别是称为区间的子集，例如(当 $b > a$ 时)：

闭区间　　　　$[a, b] \triangleq \{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$，

开区间　　　　$(a, b) \triangleq \{x \mid a < x < b\}$，

半开半闭区间 $(a, b] \triangleq \{x \mid a < x \leqslant b\}$ 等.

此外，还有无穷区间：

$$[a, +\infty) \triangleq \{x \mid x \geqslant a\},$$

$$(-\infty, b) \triangleq \{x \mid x < b\} \text{ 等}$$

而

$$(-\infty, +\infty) \triangleq \{x \mid -\infty < x < +\infty\} = \boldsymbol{R}.$$

另外，我们引入与区间有关的点的邻域概念.

设 x_0 与 δ 是两个实数，且 $\delta > 0$，我们称点集

$$N(x_0, \delta) \triangleq \{x \mid |x - x_0| < \delta, x \in R\} = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

为点 x_0 的 δ-邻域，点 x_0 和数 $\delta > 0$ 分别称作这个邻域的中心和半径，$N(x_0, \delta)$ 在数轴上的表示如图 1-2 所示.

图 1-2

我们把 xoy 平面上的点集称为平面点集．整个平面上的点组成的集合记为

$$R^2 \triangleq \{(x, y) \mid -\infty < x < +\infty,\ -\infty < y < +\infty\}.$$

设点 $M_0(x_0, y_0)$, $M(x, y) \in R^2$, 记点 M_0 和 M 的距离为 d_{M_0M}, 即有

$$d_{M_0M} = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}.$$

又设 $\delta > 0$, 则称平面点集

$$N(M_0, \delta) \triangleq \{M \mid d_{M_0M} < \delta\}$$

为点 M_0 的 δ-邻域，它是以 M_0 为中心，δ 为半径的圆的内部的所有点组成的集合(图 1-3)．

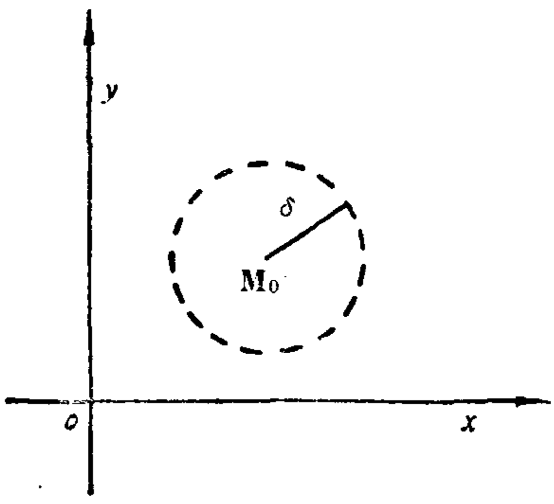

图 1-3

设 E 是一平面点集，若对 $M_0 \in E$，存在正数 δ，使 $N(M_0, \delta) \subset E$，则称 M_0 是 E 的**内点**．若对每一点 $M \in E$，总可找到相应的 $\delta > 0$，使 $N(M, \delta) \subset E$，即 E 中的点都是内点，则称 E 为平面上的**开集**．如，

$$E_1 = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$$

是一开集．

如果对于平面点集 E 中的任意两点，总可用包含在 E 中的折线联接起来，则称 E 具如连通性．具有连通性的开集 E 称为**区域**．上述 E_1 就是一个区域(简称圆域)．$E_2 = \{(x, y) \mid 0 < x < 1,\ 0 < y < 2\}$ 也是区域(矩形区域)．

假若点 M^* 的任意邻域内，总是既有属于 E 的点，又有不属于 E 的点，则称 M^* 是点集 E 的**边界点**．E 的所有边界点组成的集合称为 E 的**边界**．例如，点集 $\Gamma = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$ 就是上述圆域 E_1 的边界，即单位圆周是单位圆域的边界．

区域连同其边界构成的平面点集称为**闭区域**．如闭圆域 $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\}$，闭矩形域 $\{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 2\}$．闭圆环域 $\{(x, y) \mid 1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 4\}$．

在不致混淆或毋需区分区域和闭区域的场合，我们把闭区域也简

称为区域.

2. 集合的运算

(1) 并集(或称和集) 设 A, B 是两个集合，由至少属于 A, B 两集合之一的所有元素所组成的集合，称为 A, B 的**并集**或**和集**，如图 1-4 中的阴影部分，记为 $A\cup B$，即

$$A\cup B\triangleq\{x|x\in A \text{ 或 } x\in B\}$$
$$=\{x|x \text{ 至少属于 } A,\ B \text{ 之一}\}.$$

它实际上是由 A 与 B 的全部元素(相同的只取一次)合并成的集合.

易知，$A\cup A=A\cup\varnothing=A$；而当 $A\subset B$ 时，$A\cup B=B$.

类似地，由至少属于集合 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 之一的所有元素组成的集合，称为 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的并集，记为

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i\triangleq A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$$
$$\triangleq\{x|x \text{ 至少属于 } A_1,\ A_2,\ \cdots,\ A_n \text{ 之一}\}.$$

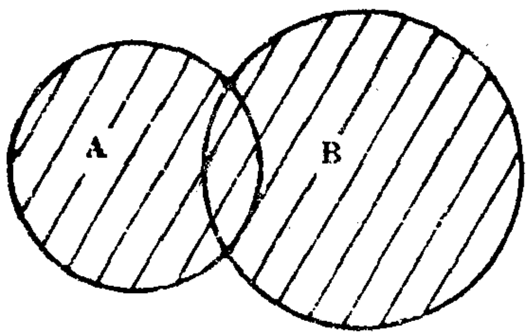

图 1-4

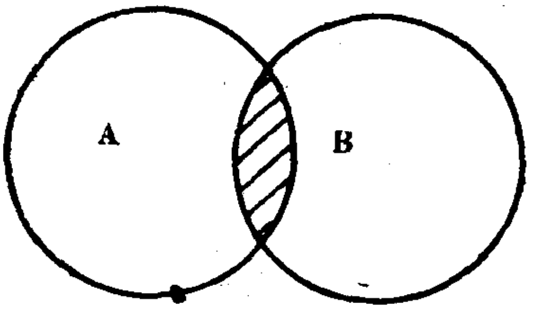

图 1-5

(2) 交集 设 A, B 是两个集合，由既属于 A，又属于 B 的所有元素(即 A, B 中相同的元素)组成的集合，称为 A, B 两集合的**交集**，如图 1-5 中阴影部分，记为 $A\cap B$，即

$$A\cap B\triangleq\{x|x\in A \text{ 且 } x\in B\}.$$

若 $A\cap B=\varnothing$，则称 A 与 B 不相交.

由定义易知，$A\cap A=A$，$A\cap\varnothing=\varnothing$，而当 $A\subset B$ 时，$A\cap B=A$.

类似地，可推广到多个集合的交集：

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i \triangleq A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n \triangleq \{x \mid x \in A_i,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ n\}.$$

(3) 差集　设 A, B 是两个集合，由属于 A 但不属于 B 的所有元素组成的集合，称为集 A 与 B 的**差集**，如图 1-6 中阴影部分，记为 $A-B$, 即

$$A-B \triangleq \{x \mid x \in A,\ 且\ x \overline{\in} B\}.$$

例 4　设
$$A=\{a,\ b,\ c,\ d,\ e\},$$
$$B=\{a,\ b,\ d,\ f\},$$

则
$$A \cup B=\{a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f\},$$
$$A \cap B=\{a,\ b,\ d\},$$
$$A-B=\{c,\ e\},$$
$$B-A=\{f\}.$$

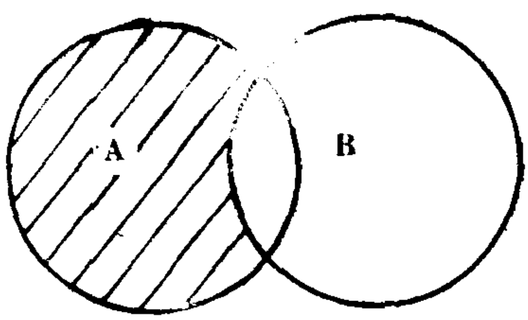

图　1-6

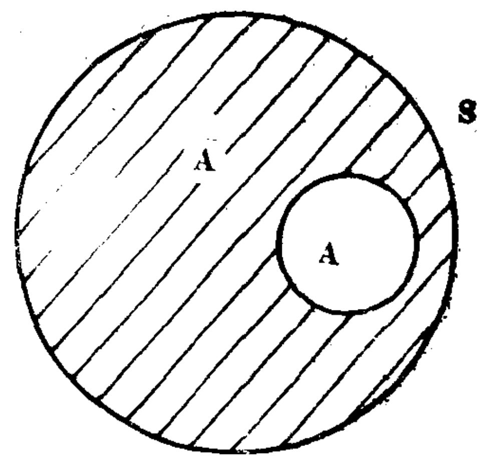

图　1-7

(4) 余集　设 S 为给定的集合，对 S 的任一子集 A，称差集 $S-A$ 为 A 关于 S 的**余集或补集**，如图 1-7 中的阴影部分，记为 $\overline{A}$，即

$$\overline{A} \triangleq S-A=\{x \mid x \in S,\ 且\ x \overline{\in} A\},$$

易知，　$A \cup \overline{A}=S,\ A \cap \overline{A}=\varnothing,\ \overline{\overline{A}} \triangleq \overline{(\overline{A})}=A.$

按上述集合运算的定义，集合之间还有如下的主要运算性质：

i）交换律：　$A \cup B=B \cup A,$

$A \cap B=B \cap A.$

ii）结合律：　$A \cup (B \cup C)=(A \cup B) \cup C,$

$A \cap (B \cap C)=(A \cap B) \cap C.$

iii）分配律：$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$，

$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C).$$

iv）余交关系（德·摩根律）：

$$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B},$$

$$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}.$$

以上诸等式都可用图示方法加以说明，但严格的证明方法应该是证明等式两边的集合互相包含．这里我们仅证明分配律中第一个等式，即

$$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C).$$

证 第一步，设 $x\in A\cup(B\cap C)$，则由和集定义，必有

$$x\in A \text{ 或 } x\in B\cap C.$$

若 $x\in A$，必有 $x\in A\cup B$ 且 $x\in A\cup C$，从而证得

$$x\in(A\cup B)\cap(A\cup C).$$

若 $x\in B\cap C$，按交集定义，必有

$$x\in B \text{ 且 } x\in C,$$

从而 $$x\in A\cup B,\ x\in A\cup C,$$

于是 $$x\in(A\cup B)\cap(A\cup C),$$

从而证得 $$A\cup(B\cap C)\subset(A\cup B)\cap(A\cup C).$$

第二步，设 $x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)$，则由交集定义，必有

$$x\in A\cup B \text{ 且 } x\in A\cup C.$$

若 $x\in A$，则必有

$$x\in A\cup(B\cap C)$$

若 $x\overline{\in}A$，则必有 $x\in B$ 且 $x\in C$．从而有

$$x\in B\cap C,$$

于是 $$x\in A\cup(B\cap C),$$

从而证得 $$(A\cup B)\cap(A\cup C)\subset A\cup(B\cap C),$$

综合上述两个包含关系，即得两集合相等的结论． 证毕

以上四个性质，都可推广到任意有限个集合的情形，例如有一般的余交关系：

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n}A_i}=\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A}_i \quad 和 \quad \overline{\bigcap_{i=1}^{n}A_i}=\bigcup_{i=1}^{n}\overline{A}_i.$$