概率统计基本概念

内容简介

本书是为高等理工科院校的学生加深理解概率与数理统计的基本概念和基础理论而编写的。全书分为两大部分，第一部分提出是非题160个，第二部分给出了参考解答。编者根据多年教学经验，针对学生在学习这门课程中最容易混淆或忽视的基本概念，用是非题的形式从反面帮助读者开拓思路、加深理解，提高分析问题和解决问题的能力。

本书可供理工科、师专、电大等高等院校学生作为学习辅导资料，也适合于高等学校青年教师教学参考。

概率统计基本概念160题

王祖裕　编著

*

国防工业出版社出版、发行

（北京市海淀区紫竹院南路23号）

（邮政编码100044）

国防工业出版社印刷厂印装

*

787×1092　1/32　印张$6^1/_2$　140千字

1990年9月第一版　1990年9月第一次印刷　印数：0,001—5065册

ISBN 7-118-00595-9/O·48　　定价：3.35元

序　言

自然界和人类社会中广泛地存在着两类不同的现象：确定性现象和随机现象。众所周知，所谓确定性现象，就是在一定条件下一定会出现的某种肯定现象；所谓随机现象，就是在一定条件下具有多种可能的结果而事前不能肯定究竟哪一种结果会发生的现象。因此，在相同条件下进行若干次试验，它们的结果可能是不一样的。所以随机现象的发生具有偶然性，但是，它并非不可捉摸和无规律可循。概率论与数理统计就是研究随机现象数量规律的数学分支。

由于随机现象广泛存在，各个不同领域所提出的大量问题促使概率统计学科蓬勃发展，使它在生产、科研和经济管理等各个领域有着广泛的应用，可以说各种学科（包括自然科学和社会科学）已越来越多地运用了概率与数理统计。因此，在我国，近年来不但在理工科大专院校要开设概率与统计，而且在医药、生物、财经、企管、保险和军事等院校，都把概率统计作为一门必修课。在国外，例如美国的大学入学考试数学委员会，大学生数学课程委员会等组织，都认为需要出版更多的概率与统计方面的著作。

我国各类院校和出版社已经出版了不少概率与统计方面的教材和习题解答，前者是“正面”阐述原理和方法，后者只能从“侧面”敲击。事实上，学生在学习这一门课程时，容易在概念和推理两方面出现许多“似是而非”的谬误。本书作者王祖裕同志所编《概率统计基本概念160题》一书，对解决上述问题可以起到很好的作用。这是因为作者根据多年

担任这门课的教学经验，积累了大量学生在概念上模糊、推理上错误的资料，编成“是非题”作为第一部分，促使学生从“反面”来考验自己，对这种是非题作出自己的判断。正确的答案可以在第二部分中找到。解答不但详尽易懂而且“借题发挥”，可以开拓思路，更进一步明确是非。本书适合一般高校学生参考，当然也有助于有关人士自学之用。

本书将160个是非题作了分类，对于每类所需要的基本知识和重要公式，都有简单摘要列在前面，便于读者直接复习而不必再查阅有关书籍。当然，要全面了解这些概念和复习这些公式的推导过程，则还需要到其他教材中去找。这样，通过正反两方面促进，必能加深学生对基本概念的理解和提高推理能力，因此这是一本在编写上有所创新的好书，很值得向广大读者推荐。

肖 伊 莘

1988年1月于湖南大學

编 者 的 话

其他数学学科（如微积分、高等代数、微分方程、拓扑学等）都是研究确定性现象中的数量关系及空间形式的科学，唯独概率论才是研究随机现象的规律性的数学学科，由于这种“随机”、就使得概率论从内容到方法都别具一格。牢固掌握基本概念本是学好任何一门数学课程的关键，概率论这么一“随机”，就使它的基本概念更难于掌握、容易混淆，这往往是初学者最感困惑的一个问题，本书打算在这方面向读者提供一些帮助。

本书编写以工科教学大纲为其知识起准线，纵向稍有延伸，160个是非题（包括解答）基本上各自独立成篇，因此，对于不同专业、不同层次的学生，大可不必通览全书。但无论是中专、大专或是本科，无论你是数学专业、工科专业还是其他专业的学生，都可以从中找到一些你所感兴趣的内容。

作为教师，在备课的时候常常希望找到一些反例，因为反例不但可以轻而易举地去证明某些假命题，而且通过反例可以更加明确一个概念的内涵，使对其了解的程度远比做十几个“正面”的习题来得更加深刻，这是为当过教师的同志所公认的。在本书的解答中，这种反例数量是可观的。因此它也可以起到教学参考资料的作用（特别是对一些青年教师）。

本书的解答尽可能多地从一些浅显的直观模型出发向读者提供概率统计基本概念的背景材料，并加入了一些通俗比喻，它们虽然不能替代定义，也不能作为定义的“证明”（谁

也不能证明定义)，但对初学者无疑是必需的。另外，还选编了不少饶有趣味的悖论，因此，对于那些不打算系统掌握概率论而又想粗略了解一下其大概的同志，浏览翻阅一下本书也可能比读专著来得轻松。

篇幅只有这样大，条目也只有这么多，加上笔者水平有限，求全是不大可能的。如果它能成为你学习或教学的些微佐料，那就算不错了。

本书初稿承蒙肖伊莘教授，戴世虎、蒋光震副教授审阅，提出了宝贵的修改意见，在此表示衷心的感谢。

王　祖　榕

1988.1.

目　录

第一部分　是　非　题

第二部分　参考解答

第一部分　是　非　题

第一章　随机事件与概率

一、基本概念与公式摘要

1．事件及其运算

随机试验　一个试验可以在相同条件下重复进行，它的一切可能结果是事先已知的，并且在每次试验中仅有其中一个结果出现，但究竟出现哪个结果，试验前不能预先断言。

样本点（基本事件）　随机试验中每一个可能的结果。

样本空间（基本事件空间）　全体样本点的集合。

事件　样本空间的子集。

必然事件　样本空间Ω作为一个事件就称为必然事件，它在每次试验中必然发生。

不可能事件　空集Φ作为事件称为不可能事件，它在每次试验中都不会发生。

包含　事件A中的每一个样本点ω都是事件B中的样本点，即若$\omega\in A$，就有$\omega\in B$，则称B包含A，记作$A\subset B$或$B\supset A$，即A发生必导致B发生。

相等　若$A\subset B$，且$A\supset B$，则称事件A、B相等，记作$A=B$。

和　事件$A\cup B$称为事件A、B的和，表示"A、B至少一个发生"的事件。

交　事件$A\cap B$称为事件A、B的交，表示"A、B同

时发生”的事件（A、B的交叉称为A、B的积，也可记作AB）。

互斥（互不相容） 若$AB=\Phi$，称事件A、B互斥（又称为互不相容），它表示A、B不可能同时发生。n个事件两两互斥，则称这n个事件互斥。在A、B、C互斥时，可将$A\cup B\cup C$记为$A+B+C$。

对立（互逆） 若$AB=\Phi$且$A+B=\Omega$，则称A、B为对立事件（又称为互逆事件），记$A=\overline{B}$或$B=\overline{A}$。

差 事件$A-B$称为事件A、B的差，它表示“A发生但B不发生”的事件。即：$A\cap\overline{B}$

事件的运算律：

（1）交换律 $A\cup B=B\cup A$，$AB=BA$

（2）结合律 $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$

$$A(BC)=(AB)C$$

（3）分配律 $(A\cup B)\cap C=AC\cup BC$

$$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$$

（4）对偶律 $\overline{\bigcup_i A_i}=\bigcap_i\overline{A_i}$，$\overline{\bigcap_i A_i}=\bigcap_i\overline{A_i}$，

2．古典概型

若随机试验的样本空间为$\Omega=\{\omega_1, \omega_2, \cdots\omega_n\}$，且每个样本点$\omega_i(i=1, 2, \cdots, n)$出现的可能性相等，则事件$A=\{\omega_{i_1}, \omega_{i_2}\cdots\omega_{i_m}\}$出现的概率为

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{A\text{中包含的样本点个数}}{\text{样本点总数}}$$

3．几何概型

向某一可度量的区域G内投一点，如果所投点落在G中任意区域g内的可能性大小与g的度量成正比，而与g的位

置和形状无关，则称这个随机试验为几何概型。若有利于事件A的G中的部分区域为g，则

$$P(A)=g\text{的测度}/G\text{的测度}$$

若G为区间，则测度指区间长度；若G为平面（空间）区域，则测度指区域的面积（体积）。

4. **概率的公理化定义**

定义1 设Ω是一抽象点集，$\mathscr{F}$是由Ω中一些子集所成的集合，如果$\mathscr{F}$满足以下条件

i) $\Omega\in\mathscr{F}$

ii) 若$A\in\mathscr{F}$，则$\overline{A}\in\mathscr{F}$

iii) 若$A_i\in\mathscr{F}(i=1、2、\cdots)$，有$\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i\in\mathscr{F}$

则称$\mathscr{F}$为σ-代数（又称σ-域）；称$(\Omega,\mathscr{F})$为可测空间；称Ω为基本事件空间；称Ω的每一点ω为基本事件；称$\mathscr{F}$的每一元素A为随机事件（简称事件）或可测集。

定义2 设$(\Omega、\mathscr{F})$为可测空间，对每一集$A\in\mathscr{F}$，定义实值集函数$P(A)$，它满足以下三个条件

i) 对每一$A\in\mathscr{F}$，有$0\leqslant P(A)\leqslant 1$（非负性）

ii) 对必然事件Ω，有$P(\Omega)=1$（规范性）

iii) 对任意$A_i\in\mathscr{F}(i=1,2,\cdots)$，$A_i\cap A_j=\Phi$

$(i\neq j)$恒有$P\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\sum\limits_{i=1}^{\infty}P(A_i)$，（可列可加性）

则称实值集函数P为$(\Omega,\mathscr{F})$上的概率，三元总体$(\Omega、\mathscr{F}、P)$称为概率空间。

5. **条件概率、概率的乘法公式**

设A、B是两事件，$P(B)>0$，称

$$P(A|B)=P(AB)/P(B)$$

为在事件B已发生的条件下，事件A的条件概率。

由上述等式可得

$$P(AB)=P(B)P(A|B),\quad P(B)>0$$

称为概率的乘法公式。

6. 相互独立事件

若事件A、B满足$P(AB)=P(A)P(B)$，则称A、B相互独立。

若A、B独立，则$\overline{A}$与B；A与$\overline{B}$；$\overline{A}$与$\overline{B}$均相互独立。

若事件A_1，A_2，…，A_n，对任意s，$1\leqslant s\leqslant n$，任意的i_s，$1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_s\leqslant n$，有

$$P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_s})=P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_s})$$

则称A_1，A_2，…，A_n相互独立。

7. 全概公式与贝叶斯公式

（1）全概公式　若事件A_1，A_2，…，A_n互斥(即两两互斥)，$P(A_i)>0$（$i=1,2,\cdots,n$），且$\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i=\Omega$，则任意的$B\subset\Omega$，有

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)\cdot P(B|A_i)$$

（2）贝叶斯（Bayes）公式　若事件A_1，A_2，…，A_n互斥，$P(A_i)>0$（$i=1,2,\cdots n$），且$\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i=\Omega$，则对任意$B\subset\Omega$，$P(B)>0$，有

$$P(A_k|B)=\frac{P(A_k)P(B|A_k)}{\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B|A_i)}$$

$$(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

8．贝努里（Bernoulli）概型

设一次试验的结果只有A与$\overline{A}$两个，且$P(A)=p$（$0<p<1$）做n次重复独立试验，称为贝努里概型。n次试验中A恰发生k次的概率为$P_n(k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$，$k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,n$。

二、是 非 题

判断下列命题或运算正确与否。

（一）概率的定义

1．"随机试验"是指试验的结果都具有同等发生的可能性。

2．既然所有随机事件都简称事件，因此不存在不是随机的事件。

3．概率的定义有很多，如统计定义，古典定义，几何定义，描述性定义及公理化定义，它们都是相互等价的。

4．样本空间Ω的一切子集所成的集类（记作2^Ω）是一个σ-代数，因此在概率的公理化定义中，不必规定$\mathscr{F}$是由Ω的某些子集所构成。

5．由可测空间（Ω，$\mathscr{F}$）的定义知，σ-代数$\mathscr{F}$是由Ω的一些子集所构成，因此决不会有Ω的所有子集都是$\mathscr{F}$的元素的情况。

6．样本空间Ω的任何子集都是事件。

7．采取公理化的定义，则基本事件不一定是事件。

8．概率的有限可加性与概率的可列可加性是等价的（即相互可以推出）。

9．作 n 次随机试验，事件 A 发生 m 次，则事件 A 发生的频率 m/n 就是事件 A 发生的概率。

10．百分率就是频率，但不是概率。

11．经济学家约翰·凯恩斯在他著名的《概率论》一书中提出了一个"中立原理"：如果我们没有充足理由说明某事物的真伪，我们选对等的概率来定每一事物的真实值。

（二）事件的运算

12．A、B、C 为任意三事件，则

$$(A+B)-C=A+(B-C)。$$

13．A、B 为任意二事件，则 $A+B-A=B$。

14．事件的和、差运算可以"去括号"或交换运算次序，？如 $B+(A-B)=B+A-B=B-B+A=\Phi+A=A$。

15．事件的运算可以"移项"，如由

$B+(A-B)=A+B$，移项得 $B+(A-B)-B=A$，得 $A-B=A$。

16．"A、B 至少发生一个"可表为 $A\cup B$ 或 $B+A\overline{B}$，或 $A\overline{B}+\overline{A}B+AB$。

17．若 $A=B$，则 A、B 为同一事件。

18．若 $A=B$，则 A、B 同时发生或 A、B 同时不发生。

19．$P(A)=P(B)$ 的充要条件是 $A=B$。

（三）事件的互斥性与独立性

20．事件 A、B 互斥就是 A、B 互不相干。

21．若 $A_1A_2\cdots A_n=\Phi$，则 A_1，A_2，…，A_n 互斥

22．若 A_1，A_2，…，A_n 互斥，则其中任意 K 个事件互斥（$2\leqslant K\leqslant n$）

23. A、B互斥是A、B互逆的必要条件，但非充分条件。

24. “A、B都发生”与“A、B都不发生”是对立事件。 X

25. 事件“A、B都发生”与“A、B不都发生”是对立事件。 ✓

26. 事件“A、B至少发生一个”与“A、B最多发生一个”是对立事件。 X

27. 若A、B为对立事件，则A、B构成等概完备事件组[●]。

28. A_1，A_2，…，A_n构成完备事件组，当且仅当同时满足

(i) $A_1+A_2+\cdots+A_n=\Omega$

(ii) $A_1A_2\cdots A_n=\Phi$。

√ 29. A、B独立就是A、B互不相干。 非

30. 设$P(A)\neq 0$，$P(B)\neq 0$，若A、B互斥，则A、B不独立。 是

31. 下面证明的推导过程是否正确？

设$P(A)\neq 0$，$P(B)\neq 0$，A、B不独立$\Longrightarrow P(AB)\neq P(A)P(B)\neq 0 \Longrightarrow P(AB)\neq 0 \Longrightarrow AB\neq\Phi \Longrightarrow A$、$B$不互斥，从而有结论：

若$P(A)\neq 0$，$P(B)\neq 0$，A、B不独立，则A、B不互斥。 非

32. 设$P(A)\neq 0$，$P(B)\neq 0$，因为有

(1) 若A、B互斥，则A、B一定不独立。

(2) 若A、B独立，则A、B一定不互斥

● 等概完备事件组的定义见第7题解答。

故既不互斥又不独立的事件组是不存在的。

33. 若$A=\Phi$，则A与任何事件既互斥又互相独立。

34. 事件的独立具有传递性，即：如果A与B独立，又B与C独立，则A与C独立。非

35. 因为只要事件A发生与否不影响事件B发生的概率，就知A、B相互独立，因此事件的独立性都可以凭直观判断，如有放回抽样是独立的，无放回抽样是不独立的。

36. 掷两颗骰子，观察朝上的点数，记

A＝{第一颗点数为 4 }

B＝{两颗点数之和为 7 }

因为$7=4+3$，可见A发生与否（即第一颗骰子出现 4 或是不出现 4 ）必将影响B发生的概率，故A、B相互不独立。

37. 假如每人血清中含有肝炎病毒的概率为0.4%，设事件A_i＝“第i人的血清中含有肝炎病毒”，那么由 100 人的血清混合后的血清中含有肝炎病毒的概率为

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_{100})=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_{100})$$
$$=0.004\times100=0.4。$$

38. 数人排队抓阄，其中只有一阄为有物之阄，则抓中的概率与抓阄的先后次序有关，先抓的人抓中的概率要大些。

39. 数人排队抓阄，其中只有一阄为有物之阄，若第一人未抓中，则第二人抓中的概率将增大。

40. 数人排队抓阄，其中只有一阄为有物之阄，抓中与否与前后次序无关，因此各人是相互独立的。

41. 任何一种概型的条件概率$P(A|B)$可以由以下公式计算

$$P(A|B)=\frac{B\text{发生的前提下}A\text{包含的基本事件数}}{B\text{发生的前提下基本事件总数}}$$

42. 对任何两事件，恒有$P(A)\geqslant P(A|B)$

43. 以下两个定义是等价的。

定义Ⅰ 若事件A、B满足$P(AB)=P(A)P(B)$，则称A、B相互独立。

定义Ⅱ 若事件A、B满足$P(A|B)=P(A)$，或$P(B|A)=P(B)$，则称A、B相互独立。

44. 事件 $(A|B)$ 表示B发生的前提下A发生，既然有B发生为前提，即B已发生，现A又发生，因此A、B同时发生，故 $(A|B)=(AB)$，所以$P(A|B)=P(AB)$。

45. 对于题："100 个产品中，次品率为 10%，接连从中抽取两个（不放回抽样），求第二次才取到正品的概率"，下列解法正确与否？

$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{10\%\cdot 90\%}{10\%}$

解：设$A=\{$第一次取到次品$\}$

$B=\{$第二次取到正品$\}$

$C=\{$第二次才取到正品$\}$

C的发生必须是在第一次取到次品的条件下，第二次取到正品，故$P(C)=P(B|A)=\frac{90}{99}=\frac{10}{11}$。

46. 若$P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$，则A、B、C相互独立。 非

47. 若n个事件两两独立，则这n个事件相互独立。

48. n个事件相互独立的定义可叙述为：对n个事件，若任意两个独立，任意三个独立，…，任意n个独立，则称这n个事件独立。

49. 若A、B独立，则求A、B至少发生一个的概率可用公式：$P(A\cup B)=1-P(\overline{A})P(\overline{B})$。

50. 若A、B互斥，则求A、B同时发生的概率可用公