现代数学基础丛书

拟共形映射及其在黎曼曲面论中的应用

李 忠 著

科 学 出 版 社

现代数学基础丛书

拟共形映射
及其在黎曼曲面论中的应用

李 忠 著

科 学 出 版 社
1988

内 容 简 介

本书阐述有关平面拟共形映射的基本理论及其在 Riemann 曲面论中的应用，尤其是在模问题中的应用．全书共分十二章，内容包括拟共形映射的基本性质、存在定理与表示定理、偏差定理与拟圆周、具有拟共形扩张的单叶函数、Teichmüller 空间与 Teichmüller 极值问题、Teichmüller 空间的 Bers 嵌入等等．本书的特点是在取材上反映最新研究成果，全书系统而完整，读者不需过多的预备知识即可阅读．

本书可供大学数学系高年级学生、研究生、教师以及数学工作者阅读和参考．

现代数学基础丛书

拟共形映射
及其在黎曼曲面论中的应用

李 忠 著

责任编辑 苏芳霞

科学出版社出版
北京朝阳门内大街 137 号

中国科学院印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1988年1月第一版 开本：850×1168 1/32
1988年1月第一次印刷 印张：$10\frac{3}{8}$
印数：0001—1,950 字数：254,000

ISBN 7-03-000124-9/O·35

定价：2.90 元

序　言

拟共形映射的理论已有五十多年的历史了. 它的创始人 Lavrenti'ev 与 Ahlfors 分别在研究空气动力学问题与 Nevanlinna 值分布的几何意义时推广了共形映射的概念，开始探讨拟共形映射理论. 起初人们的注意力集中在拟共形映射的基本概念与基本性质上，后来转向它的应用，尤其是它在 Riemann 曲面论中的应用. 实际上，早在三十年代末与四十年代初，Teichmüller 就应用拟共形映射研究了经典的 Riemann 曲面模问题. 不过他的深奥的思想当时未被普遍接受，直到五十年代 Ahlfors 重新提出这个问题后才得到广泛的注意. 在 Ahlfors 与 Bers 等人的影响下，Teichmüller 空间（即紧致曲面或有限型曲面上附带一定拓扑条件的复解析结构所组成的空间）被广泛深入地进行了研究，并取得了令人注目的进展，成为单复函数论中一个十分活跃的分支. 这种研究不仅影响到经典函数论的许多其它问题（如单值化与 Klein 群），而且与其它数学分支建立了联系. 例如，拟共形映射与 Teichmüller 空间理论在 Thurston 关于三维流形的几何与拓扑及 Sullivan 关于复解析动力体系的著名研究中得到了重要应用.

本书的前身是北京大学的两本油印讲义：《拟共形映射》与《Teichmüller 空间引论》. 作者在 1982 年至 1986 年间曾两度在北京大学为研究生讲授这两门课程，并在另外的三所大学作过短期讲学. 这次编写中，除删去了原讲义的部分内容外，主要是结合教学经验对于某些章节进行了改写.

这本书的主要目的是介绍平面拟共形映射的基本理论及其在 Riemann 曲面论中的应用，尤其是在模问题中的应用. 全书共有十二章，这两部分内容各占六章. 这里我们将不涉及高维空间的拟共形映射理论.

第一章叙述了两种共形不变量：共形模与极值长度，并讨论了模的三种极值问题. 虽然这些内容属经典解析函数的范畴，但是对于拟共形映射理论与方法而言，它们是极为重要的基础.

在第二章中，在给出了拟共形映射的几何定义之后，主要讨论了拟共形映射的分析性质，并在最后给出了与几何定义等价的分析定义. 从拟共形映射的发展历史上看，曾经出现过各式各样的定义，最后统一为几何的定义与分析的定义，并且证明了它们等价. 这是五十年代许多人共同努力的结果.

拟共形映射的一个基本问题就是给定复特征之后拟共形映射的存在性问题. 这个问题跟许多问题有关，如曲面等温坐标系的问题以及椭圆型偏微方程化标准形问题等. 在第三章中给出这个基本问题的一种解法，这种解法主要是基于 Hilbert 变换及 Zygmunt-Caldéron 不等式.

像单叶解析函数论一样，对于拟共形映射来说也存在形形色色的偏差定理. 在本书中我们不可能对于各种偏差定理作出介绍，只挑选了与我们今后讨论有直接联系的几个偏差定理（一个是著名的 Mori（森）定理，另外两个是 Teichmüller 的偏差定理），在第四章中作了论述.

单位圆周在全平面拟共形同胚下的像被称为拟圆周. 这类曲线是介于圆周与一般 Jordan 闭曲线之间的一类曲线，它可以是不可求长的，其 Hausdorff 维数可以是 $[1,2)$ 中的任意值. 这类曲线及其所围成的区域有许多特殊的函数论性质. 第五章中讨论了这类曲线的几何特征与分析特征.

第六章用来讨论解析函数的单叶性问题. 经典的 Nehari 定理被推广到拟圆周所围成的区域. 这是拟共形映射在经典函数论中的一个重要应用.

自第七章开始讨论 Riemann 曲面上的拟共形映射. 第七章本身除了叙述 Riemann 曲面上拟共形映射的基本概念之外，还证明了 Bers 同时单值化定理. 我们可以从中看到拟共形映射在研究 Riemann 曲面及单值化问题时所起的特殊作用.

闭 Riemann 曲面之间的拟共形映射的极值问题在 Teichmüller 研究 Riemann 曲面模问题时占有特殊的地位. 第八章中叙述了 Teichmüller 关于这种极值问题的经典结果. 全纯二次微分在描述极值映射的特征上起着重要的作用，因此这一章开头就讨论了这种微分所诱导的度量的种种性质. 此外，在这一章中引进了 Teichmüller 空间 $T_g(g>1)$ 的定义，并证明了它同胚于 $\boldsymbol{R}^{6g-6}$ 中的单位球内部.

第九章讨论了 Riemann 曲面的模空间与上述 Teichmüller 空间之间的关系，并且证明了模群作用的间断性，从而将第八章的结果解释为关于 Riemann 曲面模问题的结果.

第十章将上述结果推广到有限型 Riemann 曲面的情况.

Ahlfors 首先给出了 Teichmüller 空间以自然的复结构，Bers 进一步证明了 $T_g(g>1)$ 可以全纯嵌入到 $\boldsymbol{C}^{3g-3}$ 中的一个有界域. 第十一章叙述 Bers 的这个嵌入定理，以及 Bers 纤维空间的概念.

最后一章讨论了有关开 Riemann 曲面上的拟共形映射的极值问题，其中主要叙述了 Hamilton, Reich 与 Strebel 等人的结果.

这本书在编写过程中，有关拟共形映射的某些基本定理，参考了 Ahlfors 的书及 Lehto 的书. 但大多数材料直接取材于现代文献. 为了把这些材料组织成为一本可读的书，作者不得不用一种统一的形式加以改写和简化. 当然这样做可能会有考虑不周或处理不当之处，作者恳切希望读者给予批评指正.

这本书付印前曾由复旦大学何成奇教授与南京师范大学陈怀惠教授审阅，他们分别审阅前六章与后六章，提出了许多宝贵的意见，并改正了若干错误. 作者在此对他们表示衷心的感谢.

作　者

1986 年 8 月于北京

目　　录

第一章　共形模与极值长度

拟共形映射是使得某些共形不变量具有某种拟不变性的映射. 因此,在我们正式讨论拟共形映射理论之前,先来讨论两个重要的共形不变量——拓扑四边形及双连通域的共形模和曲线族的极值长度. 此外,本章中还将讨论某些极值问题. 虽然本章的内容都属于经典解析函数论的范畴,但是它们对拟共形映射的理论而言,是必不可少的.

§1　拓扑四边形的共形模

1.1　拓扑四边形的概念

在扩充复平面 $\bar{C}=C\cup\{\infty\}$ 上任意一条 Jordan 闭曲线所围成的区域,我们称之为 Jordan 区域. 我们约定一个 Jordan 区域的边界的正向是指使得区域局部地落在左侧的回转方向. 尽管这个直观的说法不甚严格,但对我们今后的讨论已经足够了.

定义 1.1　若 Q 是一个 Jordan 区域,并且在它的边界上按照边界的正向依次指定了四个不同点 z_1, z_2, z_3, z_4,则区域 Q 连同这四个有序的边界点一起被称作一个拓扑四边形(有时简称为四边形),记为 $Q(z_1, z_2, z_3, z_4)$. 所指定的四个边界点被称为这个拓扑四边形的顶点.

这里需要指出,在今后的讨论中,我们要把 $Q(z_1, z_2, z_3, z_4)$ 与 $Q(z_2, z_3, z_4, z_1)$ 看作是两个不同的拓扑四边形,虽然它们有相同的区域与顶点.

今后,我们把拓扑四边形 $Q(z_1, z_2, z_3, z_4)$ 的边界弧 (z_1, z_2) 与 (z_3, z_4) 称作第一组对边,而把边界弧 (z_2, z_3) 与 (z_4, z_1) 称作第二组对边.

1.2 拓扑四边形的共形等价类

设有两个拓扑四边形 $Q(z_1, z_2, z_3, z_4)$ 与 $\tilde{Q}(w_1, w_2, w_3, w_4)$. 若存在一个共形映射 f: $Q \to \tilde{Q}$, 使得 $\tilde{Q} = f(Q)$ 且有 $w_j = f(z_j)$, $j = 1, 2, 3, 4$; 则我们说这两个拓扑四边形是共形等价的. 将全体拓扑四边形按照共形等价关系加以分类就得到了拓扑四边形的共形等价类的概念.

在每一个拓扑四边形的共形等价类中都可以选择一个矩形作为代表. 换句话说, 每一个拓扑四边形都共形等价于某个矩形.

这个事实可以由下面的定理推出:

定理 1.1 对任意给定的一个拓扑四边形 $Q(z_1, z_2, z_3, z_4)$, 都存在一个矩形 $R(0, a, a+bi, bi)$ (其中 $R = \{x + iy: 0 < x < a, 0 < y < b\}$) 与它共形等价, 并且,所有的这种矩形之间仅相差一个相似变换.

证 根据 Riemann 映射定理,存在一个共形映射 φ 把区域 Q 映为上半平面 $U = \{z: \operatorname{Im} z > 0\}$. 因为 Q 是 Jordan 区域, 故由边界对应定理可知, φ 可以同胚扩充到 $\bar{Q} = Q \cup \partial Q$, 并建立了 ∂Q 与实轴的点的一一对应. 设 $x_j = \varphi(z_j)$, $j = 1,2,3,4$. 我们取一个 U 到自身的分式线性变换 ψ, 使得点 x_1, x_2, x_3, x_4 依次对应于实轴上的点

$$-\frac{1}{k},\ -1,\ 1,\ \frac{1}{k},$$

这里 $k < 1$ 是由点 x_1, x_2, x_3, x_4 的交比唯一确定的. 这样,复合映射 $\psi \circ \varphi$ 把 $Q(z_1, z_2, z_3, z_4)$ 共形映射为 $U(-1/k, -1, 1, 1/k)$ 并保持了顶点依次对应. 再由 Christoffel-Schwarz 公式, 函数

$$w = \int_{-\frac{1}{k}}^{z} \frac{d\zeta}{\sqrt{(1-\zeta^2)(1-k^2\zeta^2)}}$$

把 U 变成一个矩形 $R = \{x + yi: 0 < x < a, 0 < y < b\}$, 并把点 $-1/k$, -1, 1, $1/k$ 依次对应于0, a, $a+bi$, bi, 其中

$$a = \int_{-\frac{1}{k}}^{-1} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

$$b = \int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}.$$

这样，我们证明了 $Q(z_1, z_2, z_3, z_4)$ 共形等价于一个矩形 $R(0, a, a+bi, bi)$。

假定 $Q(z_1, z_2, z_3, z_4)$ 还共形等价于另外一个矩形 $R'(0, a', a'+b'i, b'i)$. 那么，矩形 $R(0, a, a+bi, bi)$ 与 $R'(0, a', a'+b'i, b'i)$ 共形等价. 设 g 是 R 到 R' 的共形映射，且把点 $0, a, a+bi, bi$ 依次对应于点 $0, a', a'+b'i, b'i$. 显然，由对称开拓原理，我们可以逐次地沿水平边解析开拓函数 g，最后使 g 成为带形域 $\{z=x+yi;\ 0<x<a\}$ 到带形域 $\{w=u+vi;\ 0<u<a'\}$ 的共形映射. 然后再沿纵边把 g 开拓为全平面，成为 $\boldsymbol{C}\to\boldsymbol{C}$ 的共形映射. 显然，这个共形映射是分式线性变换并使 0 与 ∞ 不变，因而只能是相似变换. 定理证毕.

1.3 拓扑四边形的共形模

从定理 1.1 可知，在拓扑四边形的同一个共形等价类中的矩形 $R(0, a, a+bi, bi)$ 所决定的比值 a/b 是唯一确定的. 因此，很自然地想到用这个比值来代表这个拓扑四边形的共形等价类.

定义 1.2 若拓扑四边形 $Q(z_1, z_2, z_3, z_4)$ 共形等价于矩形 $R(0, a, a+bi, bi)$，则称 a/b 为拓扑四边形 $Q(z_1, z_2, z_3, z_4)$ 的共形模(今后简称为模)并记之为 $M(Q(z_1, z_2, z_3, z_4))$.

根据这个定义，显然有

定理 1.2 $M(Q(z_1, z_2, z_3, z_4)) = 1/M(Q(z_2, z_3, z_4, z_1))$.

定理 1.3 拓扑四边形的模是共形不变量，即若 $Q(z_1, z_2, z_3, z_4)$ 共形等价于 $\widetilde{Q}(w_1, w_2, w_3, w_4)$，则 $M(Q(z_1, z_2, z_3, z_4)) = M(\widetilde{Q}(w_1, w_2, w_3, w_4))$.

定理 1.2 表明拓扑四边形的模不仅依赖于区域及其顶点，而

且还依赖于第一组对边的选取，这一点须提醒读者注意。

§2　双连通区域的共形模

2.1　双连通区域的典型区域

一个区域 B 被称为 n 连通的 $(n>1)$，如果它的补集 $\bar{\boldsymbol{C}}-B$ 有 n 个分支(最大连通闭集)．2 连通区域被称为双连通区域.

定理 2.1　设 B 是任意给定的一个双连通区域．则 B 可以被共形映射为下列三种典型区域之一:

i) $\boldsymbol{C}-\{0\}$，即 $\{z:0<|z|<\infty\}$;

ii) $\{z:\ 0<|z|<1\}$;

iii) $\{z:\ r_1<|z|<r_2\}$ (其中 $0<r_1<r_2<\infty$);

并且只能共形映射为这三种典型区域之一.

证．若 B 的补集 $\bar{\boldsymbol{C}}-B=\{a,b\}$ 由两个点 a 与 b 组成，则通过分式线性变换可以把 a 与 b 分别变为 0 与∞．这样的分式线性变换即把区域 B 共形映射为第一种典型区域.

若在 $\bar{\boldsymbol{C}}-B$ 的分支中只有一个分支由一个点 a 组成，则 $B\cup\{a\}$ 是一个单连通区域，并且其边界点多于一个点．应用 Riemann 映射定理，可将区域 $B\cup\{a\}$ 共形映射为单位圆．设点 a 在单位圆的像为 z_0．那么再通过分式线性变换

$$w=(z-z_0)/(1-\bar{z}_0z)$$

即把点 z_0 变成原点．这样 B 最后变成第二种典型区域.

现在讨论第三种情况: $\bar{\boldsymbol{C}}-B$ 的两个分支中每一个分支都多于一点．设 $\bar{\boldsymbol{C}}-B$ 的两分支分别是 C_1 与 C_2，那么 $B_1=B\cup C_2$ 是一个单连通区域．我们将 B_1 共形映射单位圆 $\{|w|<1\}$，其中 C_2 的像记为 C_2'，B 的像记为 B'．然后，我们再将 $\bar{\boldsymbol{C}}-C_2'$ 通过一个共形映射变成单位圆的外部 $\{|\zeta|>1\}$ 并保持∞不动．这样，单位圆周 $\{|w|=1\}$ 在这个映射下的像是 ζ 平面上的一条解析 Jordan 曲线，而 B' 的像是这条曲线与单位圆周 $\{|\zeta|=1\}$ 所围成的区域，记之为 B''.