

等离子体不稳定性 和非线性效应

A. 哈瑟加瓦 著

王 水 译

方励之 校

科 学 出 版 社

1981

内 容 简 介

本书系统地介绍了等离子体不稳定性的主要特征及其相关的非线性效应,还结合空间等离子体中发生的物理现象,阐述了等离子体不稳定性的广泛应用。全书共分四章,第一章介绍等离子体不稳定性的基本概念,第二章和第三章分别讲述微观不稳定性 and 宏观不稳定性,第四章讨论有关的非线性过程。

本书可供从事空间物理、磁流体力学和等离子体物理、受控热核反应等方面研究、教学和工程部门有关科技人员参考,也可作为以上专业研究生专门课程的教材。

A. Hasegawa

PLASMA INSTABILITIES AND NONLINEAR EFFECTS

Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York 1975

等离子体不稳定性 and 非线性效应

A. 哈瑟加瓦 著

王 水 译

方励之 校

责任编辑 侯建勤

科 学 出 版 社 出 版

北京朝阳门内大街 137 号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1981 年 9 月第 一 版 开本: 787×1092 1/32

1981 年 9 月第一次印刷 印张: 7 7/8

印数: 0001—3,570 字数: 175,000

统一书号: 13031·1669

本社书号: 2293·13—3

定 价: 1.25 元

译 者 的 话

近年来,随着空间探测的迅速发展,观测到大量新的空间物理现象。为了解释这些观测结果,等离子体不稳定性问题越来越受到人们的重视。同时,在受控热核反应领域中,等离子体不稳定性非线性效应也具有重要的意义。

本书系统地介绍了等离子体不稳定性主要特征及其有关的非线性效应,既侧重于基本概念,又结合空间物理中的具体问题,取材较新,每章还都附有大量的参考文献,是一本较好的专著。为了满足国内广大读者的需要,我们译出此书。由于译者水平所限,时间也比较仓促,错误疏漏之处在所难免,欢迎读者批评指正。

序*

近年来,利用卫星对空间中等离子体和相关电磁现象进行观测的重大进展,已经积累了有关各种等离子体不稳定性的大量证据。目前人们相信,对于空间中的电磁辐射以及很多宏观的动力学过程来讲,等离子体不稳定性是十分重要的。

大多数开始学习等离子体物理的学生,总是会对等离子体的不稳定性着迷。然而,因为不稳定性如此之多,常常会使他们陷于困境。这一方面是由于没有专门讨论这些课题的教科书,用系统的方法讲述等离子体不稳定性并不是容易的事,而且还需要不懈的努力。本书试图为这一课题提供一个基础的入门,其中涉及到大多数重要的不稳定性。然而,作者应当表示歉意,因为一些具有特色的参考文献未能完全引入。

我们假定读者已经具备大学课程中等离子体物理的一般知识,本书打算作为大学水平的等离子体不稳定性课程的参考书,或作为研究生的专门课程的教材。因为此书是《空间中的物理学和化学》丛书中的一册,故比较强调有关空间等离子体中的不稳定性。然而,这里所讨论的大多数不稳定性,也同样适用于实验室等离子体,因此本书也可作为对受控热核反应感兴趣的科学家的一本入门教科书。实际上,书中介绍的大多数不稳定性,乃是在研究实验室等离子体时发现的。

全书共分四章。第一章是等离子体不稳定性引论,介绍等离子体不稳定性的基本概念和物理起源。它们可以按标准

* 本序略有删节。——译者注

方式分为微观不稳定性(与速度空间的非平衡有关)和宏观不稳定性(与坐标空间的非平衡有关)两类,这些在第二章和第三章中讲述。在理论推导之后,我们尽可能地介绍卫星观测资料以及与不稳定性有关的问题。为了探讨一些不稳定性的可能后果,第四章讨论了有关的非线性过程。

全书采用 MKS 单位制。

A. 哈瑟加瓦 1975 年, 新泽西

目 录

译者的话	i
序	iii
第一章 等离子体不稳定性引论	1
1.1 引言	1
1.2 基本方程	4
1.3 色散关系	13
1.4 不稳定性分析	18
参考文献	27
第二章 微观不稳定性——源于速度空间非平衡的不稳定性	29
2.1 引言	29
2.2 由于双峰速度分布引起的不稳定性	30
2.2.1 静电不稳定性	30
2.2.2 电磁不稳定性	48
2.2.3 磁镜效应	57
2.2.4 对按场排列电流的应用——反常电阻	67
2.3 由于各向异性速度分布引起的不稳定性	73
2.3.1 静电不稳定性	74
2.3.2 电磁不稳定性	84
2.3.3 非均匀性对各向异性分布的影响	90
2.3.4 速度空间中的准线性扩散	95
2.4 磁流体不稳定性	99
2.4.1 引言	99
2.4.2 磁镜不稳定性	102
2.4.3 火蛇管不稳定性	107

2.5	部分电离等离子体中的不稳定性	108
2.5.1	引言	108
2.5.2	不稳定性的一般特性	108
2.5.3	对电离层等离子体不稳定性应用	112
	参考文献	115
第三章	宏观不稳定性——源于坐标空间非平衡的不稳定性	121
3.1	引言	121
3.2	漂移波不稳定性	121
3.2.1	低 β 情况	122
3.2.2	中 β 情况	124
3.2.3	高 β 情况	129
3.2.4	应用漂移波不稳定性注意事项	132
3.3	Rayleigh-Taylor不稳定性	134
3.4	Kelvin-Helmholtz不稳定性	137
3.4.1	磁流体不稳定性	138
3.4.2	静电不稳定性	141
3.5	电流箍缩不稳定性	145
3.5.1	具有无限大电导率的柱电流的不稳定性	145
3.5.2	具有有限电阻的电流的不稳定性: 撕裂模式不稳定性	151
	参考文献	156
第四章	与等离子体不稳定性有关的非线性效应	159
4.1.1	引言	159
4.1.2	逼近法	160
4.2	对粒子的非线性效应	162
4.2.1	引言	162
4.2.2	准线性理论	162
4.2.3	共振展宽	168
4.2.4	粒子捕获和波动追逐	175

4.3 对波的非线性效应	181
4.3.1 引言	181
4.3.2 相干的三波相互作用	182
4.3.3 具有无规相位的三波相互作用	191
4.3.4 由于粒子散射引起的非线性两波相互作用—— 非线性 Landau 阻尼	200
4.4 非线性波和波包	208
4.4.1 引言	208
4.4.2 非线性波——孤波和激波	209
4.4.3 非线性波包——波包孤波、波包激波和波包穴 ...	211
4.4.4 调制不稳定性	219
参考文献	223
附录 等离子体不稳定性必要条件摘要	226
一般参考书	229
符号目录	231
内容索引	235

第一章 等离子体不稳定性引论

1.1 引言

空间等离子体中的粒子，在相邻碰撞之间一般具有长的平均自由程。例如，我们知道，地球附近太阳风电子的平均自由程约为一个天文单位(1AU)；从平均自由时间来说，这意味着，这些粒子每隔几天才碰撞一次。而且，如果注意到，由于质子与电子的质量比很大，能量平衡的时间比粒子间碰撞时间长，故可以预料，无论是行星际空间中还是磁层空间中的等离子体，都不处于热力学平衡。然而在大多数情况下，可以假设这些等离子体处于动力学平衡：作用在等离子体微团上的力平衡为零。这是因为等离子体动力学响应的时间尺度为 $\sim \omega_p^{-1}$ 或 $\sim \omega_c^{-1}$ ， ω_p 和 ω_c 分别是等离子体频率和回旋频率。例如在太阳风中，对于电子，这些参数近似为 10^{-5} 秒和 10^{-3} 秒；对于质子，近似为 10^{-2} 秒和1秒。

等离子体不处于热力学平衡的事实，意味着在等离子体中储存有一定数量的自由能；这些能量可以转化为等离子体的剧烈运动或转化为电磁波的辐射。等离子体不稳定性，就是以集体方式发生的一些能量转化过程：这些过程使得对动力学平衡的一个小偏离将引起更进一步的偏离。用数学语言来说，如果将这种偏离写为 x ，上述情况意味着， x 随时间的变化率 $\frac{dx}{dt}$ 是正比于 x 本身的，即 $\frac{dx}{dt} = \gamma x$ 。求解这个方程，得到 $x = e^{\gamma t}$ ，即表明偏离将指数比增长，常数 γ 称为不稳定性

的增长率。

等离子体偏离其热力学平衡的方式基本上有两种。一种方式是局限于空间中具有局部较高(或较低)的密度、温度、压力或其它热力学参量;另一种方式是存在不同于 Maxwell-Boltzmann 分布的速度分布。当由前种原因引起不稳定性时,整个等离子体的形状将发生改变,这是一种外部的过程,因此称为宏观不稳定性。后种原因引起的不稳定性,是一种内部的过程,称为微观不稳定性。

等离子体不稳定性,常可用一个位于小山顶上的球来加以说明,我们将利用这些模型来解释不稳定性的各种可能的发展方式。通常图 1 a 和 1 d 表示不稳定态和稳定态。应注意到,随便那种情况,球都是处于动力学平衡的。

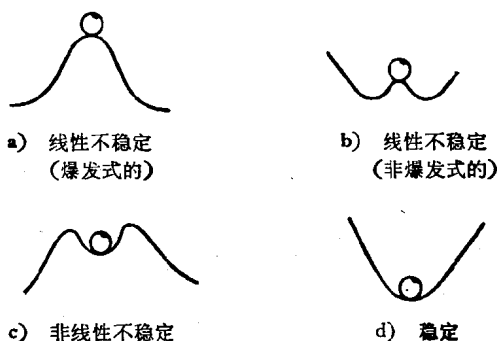


图 1 a—d 各种稳定性条件的模型

图 1a 表示线性不稳定情况,因为一个无限小的扰动就能使图 1a 中的球滚下来。情况 a 可以称为爆发式不稳定,由于小球位置的一个有限位移并不导致一种稳定状态。而与此相反,在情况 b 中,球到达邻近的山包就再返回,这样,对于一个有限(非零)尺度的扰动(位移),它将是稳定的。另一方面,情况 c 看起来是稳定的,但假如一个足够大的扰动作用到

该球上，它就变成不稳定的了，这种情况一般称为非线性不稳定。情况 d 表示一种绝对的稳定。

细心的读者有理由指出，以上仅是一个模型，而严格地讲，图 1a 并不表示线性不稳定。根据定义，对于线性不稳定性，球位置位移随时间的变化率必须是增长的，且正比于位移自身。因此，我们需要考虑作为位移函数的重力的变化。

以上所定义的爆发式不稳定性，其增长率 γ 是时间的递增函数；换句话说，随着位移的进一步增加，它的随时间的变化率也增长。至于在什么条件下，可以把图 1a 认为是正确地表达爆发式不稳定情况，这一问题留给读者去推断。我们将在第四章中更为详细地讨论爆发式不稳定性。

现在让我们问：为什么在空间物理学中等离子体不稳定性是重要而有趣的问题？正如前面论述所谈到的，等离子体通过不稳定性可以释放它的自由能，并将试图达到热力学平衡。这些变化的速率，通常由动力学时间尺度所确定，这种变化率比由于碰撞过程所引起的变化率要快得多。因此，由其集体效应所引起的等离子体不稳定性，能产生非常大的热力学参量（诸如粒子数、温度、压力或电阻）的输运系数（与无碰撞过程相比）。实际上，几乎任何形式的热力学非平衡都可能引起等离子体不稳定性。“反常的”输运效应是十分普遍的；而由于碰撞效应所产生的经典输运，则是相当稀少的。

等离子体不稳定性的另一重要方面，是有关各种类型波动的产生。除了特殊情况（如图 1a 所示的情况）以外，由扰动引起的等离子体不稳定性，要在一些特殊频率范围附近引起振荡；在这些情况中，不稳定性发射波。由于不稳定性的特性，波动振幅的增长率正比于它的瞬时振幅，这种辐射过程远比单个粒子的辐射过程——如象 Cherenkov 辐射或同步加速辐射——更为有效。

现在我们基本上知道了什么是等离子体不稳定性，以及为什么会有兴趣去研究它。我们将在本章的以下篇幅中讨论如何去寻找不稳定性。为此，我们需要一些描述等离子体行为动力学的物理和数学工具。因此，第 1.2 节将专门介绍一下用来描述等离子体动力学的基本方程；第 1.3 节中，我们将利用二流不稳定性的简单例子，来引入色散关系的概念，并介绍它对于等离子体不稳定性的意义；第 1.4 节，我们将讨论各种不稳定性的分类，以及利用色散关系寻找等离子体不稳定性的一般方法。

1.2 基本方程

正如第 1.1 节中所指出的，空间中的等离子体可以视为无碰撞的（除电离层中或太阳表面处以外）。为了便于证实这个事实，我们引用碰撞频率的概念。由基础教科书我们知道，碰撞的时间比率，称为碰撞频率 ν ，由下式给出：

$$\nu = n\nu\sigma \quad (1.1)$$

式中 ν 是碰撞粒子的速率， σ 是受碰粒子的截面， n 是受碰粒子的浓度。就带电粒子之间的碰撞而论，可由下述方法得到截面 σ 。对于电子，可采用经典的电子半径 $[e^2/(4\pi\epsilon_0 m_e c^2)]$ ，但是由于 Coulomb 力作用，它们通常不能达到如此邻近的程度。让我们来看一看，两个电荷为 e （库仑）、质量为 m_1 和 m_2 （公斤）的粒子，在由于 Coulomb 力而偏斜之前它们能靠得多近。在距离 r_0 （米）处，相对动能 $\bar{m}\bar{v}^2/2$ （总动能减去重心的动能）可与 Coulomb 势 $e^2/(4\pi\epsilon_0 r_0)$ 相比，其中 $\bar{m}$ 是有效质量 $\bar{m} = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ ， ϵ_0 是自由空间中的介电常数（ 8.854×10^{-12} 法拉/米）， $\bar{v}$ 是碰撞粒子的相对速率， e 是电子电荷

(1.602×10^{-19} 库仑)。 r_0 是两带电粒子所能达到的最近距离，它由下式给出：

$$r_0 = \frac{e^2}{2\pi\epsilon_0 m v^2} \text{ (米)}. \quad (1.2)$$

因此，可由 r_0 得到碰撞截面 σ 为 $\sigma = \pi r_0^2$ ，或者

$$\sigma = \frac{e^4}{4\pi\epsilon_0^2 m^2 v^4} \text{ (米}^2\text{)}. \quad (1.3)$$

现将方程 (1.3) 代入方程 (1.1)，即求得碰撞频率

$$\nu = \frac{\nu e^4 n}{4\pi\epsilon_0^2 m^2 v^4} \text{ (秒}^{-1}\text{)}. \quad (1.4)$$

对于电子-电子碰撞的情况，方程 (1.4) 可以简化。暂且不管数值因子 $1/\pi$ ，即得

$$\nu_{ee} = \omega_{pe} / (n \lambda_{De}^3) \text{ (秒}^{-1}\text{)}, \quad (1.5)^{1)}$$

式中 ω_{pe} 是等离子体频率：

$$\omega_{pe} = \left(\frac{e^2 n}{\epsilon_0 m_e} \right)^{1/2} = 56.4 \sqrt{n \text{ (米}^{-3}\text{)}} \text{ (秒}^{-1}\text{)}. \quad (1.6)$$

λ_{De} 称为 **Debye 长度**，

$$\lambda_{De} = v_{Te} / \omega_{pe} \text{ (米)}, \quad (1.7)$$

v_{Te} 和 m_e 是电子的热速率和电子质量。方程 (1.5) 中的 $n \lambda_{De}^3$ 表示一个尺度为 Debye 长度 λ_{De} 的体元中的电子数，而 λ_{De} 表示在此距离以外 Coulomb 力被屏蔽。由于等离子体的行为象一个集体，而不是一些无关联的粒子团，故 $n \lambda_{De}^3$ 必定远大于 1；而小量 $1/(n \lambda_{De}^3)$ 通常称为等离子体参数。因此，一般可以认为 $\nu_{ee} \ll \omega_{pe}$ 。利用表达式 (1.4)，还可导出不同粒子间的碰撞频率。电子-离子碰撞频率 ν_{ei} 可与 ν_{ee} 相比拟

1) 由于 Coulomb 力至少延伸到 Debye 长度，故即使粒子在距离受碰粒子远大于 r_0 处通过，它也会受到某一角度偏转。为了引入这一效应的修正，方程 (1.5) 中的 ν_{ee} 必须乘以参数 $\ln \Lambda$ ，其中 $\Lambda = \lambda_{De} / r_0 = 4\pi n \lambda_{De}^3$ ，这是等离子体参数的倒数，通常 $\ln \Lambda \sim 20$ 。

($v_{ei} = v_{ce}/2\sqrt{2}$), 而离子-离子碰撞频率 ν_{ii} 为

$$\nu_{ii} = \omega_{pi}/(n\lambda_{Di}^3) = v_{ce}(m_e T_e^3/m_i T_i^3)^{1/2}, \quad (1.8)$$

式中 $T_e (= m_e v_{Te}^2)$ 和 $T_i (= m_i v_{Ti}^2)$ 是电子和离子的温度, m_i 和 v_{Ti} 是离子质量和离子的热速率。由于质量比 (m_e/m_i) 很小, 故离子-电子碰撞频率 ν_{ie} 小于电子-离子碰撞频率 (因为离子难以被电子偏转), 所以在大多数情况中它被略去。

有了这些准备, 我们现在将推导表征具有小等离子体参数 $1/(n\lambda_D^3)$ 的等离子体动力学的基本方程。考察 n 个电子和离子的运动, 这与纽约城里的人不同, 即使有上亿个粒子, 它们仅遵从一种由运动方程所决定的运动规律。在运动方程中, 电磁力 (Lorentz 力) 支配着加速度:

$$m_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = q_i [\mathbf{E}(\mathbf{x}_i, t) + \mathbf{v}_i \times \mathbf{B}(\mathbf{x}_i, t)], \quad (1.9)$$

式中角标 i 表示在时间 t 、位于 $\mathbf{x}_i$ 处、电荷为 q_i 、质量为 m_i 的 i 粒子。注意电场 $\mathbf{E}$ 和磁场 $\mathbf{B}$ 是在 i 粒子位置处的值, 而且它是由其它所有粒子、也可能由某些外源所产生的。

现在假设电场和磁场是已知的空间和时间的连续函数。这样, 倘若我们知道初速度 $\mathbf{v}_i(0)$, 就可以积分方程 (1.9) 得到 $\mathbf{x}_i(t)$ (联立 $\dot{\mathbf{x}}_i = \mathbf{v}_i$)。然而, 要想知道大量粒子的初速度是不可能的, 因此方便的方法是引进一个初速度的几率分布函数。用 $F_i(\mathbf{x}, \mathbf{v})$ 表示在 $\mathbf{x}$ 点找到初速度在范围 $-\infty < \mathbf{v}(0) < \mathbf{v}$ 中 i 粒子的几率, 且 $0 \leq F_i(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \leq 1$ 。由下式得出几率密度函数:

$$f_i(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = \frac{\partial^3 F_i}{\partial v_x \partial v_y \partial v_z}. \quad (1.10)$$

因为我们并不准确知道第 i 个粒子的位置, 故 (1.10) 式中的 $\mathbf{x}$ 不再是粒子的位置 $\mathbf{x}_i$ 。这样, 在上式中 $\mathbf{x}$ 和 $\mathbf{v}$ 是独立变数。现在让我们考察由方程 (1.10) 所定义的几率密度函数如何随

时间变化。它随时间变化是由于 Lorentz 力作用,故可由相空间 $\mathbf{x}, \mathbf{v}, t$ 中 f_i 的守恒方程得到

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} + \dot{\mathbf{x}} \cdot \frac{\partial f_i}{\partial \mathbf{x}} + \dot{\mathbf{v}} \cdot \frac{\partial f_i}{\partial \mathbf{v}} = 0, \quad (1.11)$$

式中 $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}$, 又 $\dot{\mathbf{x}} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} = v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z} = \mathbf{v} \cdot \nabla$.

加速度 $\dot{\mathbf{v}}$ 由 Lorentz 力给定。作用于该粒子上的 Lorentz 力包含两种场,一种是由于所有其它粒子的集体运动所产生的电磁场;另一种是由位于我们所考查的粒子碰撞距离之内的一些粒子所产生的场。然而,如果等离子体参数 $(n\lambda_D^3)^{-1}$ 是小量,我们就可以指出,碰撞粒子所产生的影响是可忽略的。证明这点的一种方法,是估计近邻粒子位于碰撞距离 r_0 [由方程(1.2)定义] 之内的可能性。粒子的平均间隔是 $n^{-1/3}$, 那么,该种可能性可以用 nr_0^3 来估计;而由方程(1.2)得到,它是 $1/(n\lambda_D^3)^2$ 。因此,若 $n\lambda_D^3 \gg 1$, 则近邻粒子位于碰撞距离之内的可能性是不大的。在这种情况下,可以不考虑碰撞粒子所引起的加速,故由 Lorentz 力表达式,方程(1.11)简化为

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)}{\partial \mathbf{x}} \\ + \frac{q}{m} [\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{v} \times \mathbf{B}(\mathbf{x}, t)] \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = 0, \quad (1.12) \end{aligned}$$

式中 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{B}$ 是由等离子体集体运动所产生的平均电场强度和平均磁通量密度(磁感应强度)。以上表达式称为 **Vlasov 方程**,它是我们在本节所要介绍的基本方程之一。

注意这里坐标变数 $\mathbf{x}$ 不再是第 i 个粒子的位置,而是确定坐标空间的一个独立变数。现在还可看出,虽然我们是对特定粒子 i 导出方程(1.12),但无需区分等离子体中任一粒子的分布函数。所以,这里就省去了角标 i 。方程(1.12)描述由

于集体场所引起 f 的动力学变化, 该变化的时间尺度是 ω_i^{-1} 的量级。我们略去了时间尺度为 ν^{-1} 的碰撞所引起的变化, 这两个时间尺度的比值又是 $n\lambda_D^3$ 。由此也可看出, 略去碰撞效应是正确的。

由 **Maxwell** 方程可以求得方程 (1.12) 中的电磁场。

$\int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v}$ 表示在 $\mathbf{x}$ 和 t 处找到一个粒子的总几率, 若乘以空间平均数密度 n_0 , 就得到等离子体粒子的数密度, 即

$$n(\mathbf{x}, t) = n_0 \int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v}. \quad (1.13)$$

类似地, 可得到对于每种粒子的电流密度为

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}, t) = qn_0 \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{v} f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v}. \quad (1.14)$$

若利用角标 e 和 i 来区分电子和离子的分布函数, 则 **Maxwell** 方程 (在 MKS 单位制中) 可以写为

$$\nabla \times \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (1.15)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 e n_0 \left(\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{v} f_i d\mathbf{v} - \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{v} f_e d\mathbf{v} \right) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (1.16)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (1.17)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{en_0}{\epsilon_0} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f_i d\mathbf{v} - \int_{-\infty}^{\infty} f_e d\mathbf{v} \right), \quad (1.18)$$

式中 μ_0 是自由空间的导磁率 ($4\pi \times 10^{-7} = 1.257 \times 10^{-6}$ 亨利/米), c 是光速 (2.998×10^8 米/秒), 而 $\int d\mathbf{v}$ 表示速度空间中的体积分。

Maxwell 方程和 **Vlasov** 方程是描述等离子体动力学的最有力的方法。然而, 最有力的方法往往也是最难以应用的, 特别是 **Vlasov** 方程, 在复杂的位形时难以求解。但是, 在很多情况

中, 仅当涉及由于几何空间中非均匀性所产生的宏观不稳定性时, 复杂位形才是重要的。在这些情况中, 我们所关心的空间尺度通常远大于平均的质子 Larmor 半径 $\rho_i (= v_{Ti}/\omega_{ci})$, 因而该问题的时间尺度可看成远小于离子迴旋周期 ω_{ci}^{-1} 。在这种情况, 就可以简化 Vlasov 方程。

这种思想是把等离子体作为连续流体来处理, 得到的方程称为磁流体力学方程 (MHD 方程)。严格地讲, 仅当问题的时间尺度比平均自由时间 ν^{-1} 长、因而等离子体处于完全碰撞状态时, 这样处理才是可行的。然而实际上, 只要时间尺度比迴旋周期 ω_{ci}^{-1} (通常远比 ν^{-1} 短) 长, 它就可以是一种良好的近似。对此这里暂且不作证明, 而让我们简述怎样导出该方程。在推导中, 假设我们所关心的时间尺度远比平均自由时间长。在这种低频情况下, 可以假设电子和离子一起宏观地运动, 以至在等离子体中形成电中性 (准中性) 状态。这样, 我们可以用一个参量来表示电子和质子的密度¹⁾:

$$\begin{aligned} n(\mathbf{x}, t) &\sim n_0 \int_{-\infty}^{\infty} f_e(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v} \\ &\sim n_0 \int_{-\infty}^{\infty} f_i(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v}, \end{aligned} \quad (1.19)$$

式中 f_e 和 f_i 表示电子和质子的分布函数。

MHD 方程组的第一个方程表示质量守恒, 在速度空间对离子的 Vlasov 方程进行积分, 就得到

$$\frac{\partial n(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \nabla \cdot [n(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)] = 0, \quad (1.20)$$

$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ 是流体速度, 而不是粒子速度, 且可用平均离子速度表达为

$$n(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = n_0 \int \mathbf{v} f_i(\mathbf{v}, \mathbf{x}, t) d\mathbf{v}. \quad (1.21)$$

1) 还有一种二流模式, 用以描述电子和离子之间不同的动力学。然而为了简单起见, 我们沿用一流模式。