高等学校教材

高等数学

第四版　上册

同济大学数学教研室　主编

高等教育出版社

高等教育出版社

高等学校教材

高等数学

第四版 上册

同济大学数学教研室 主编

高等教育出版社

（京）112 号

图书在版编目(CIP)数据

高等数学　上册/同济大学数学教研室主编. —4 版.
—北京：高等教育出版社，1996

ISBN 7—04—005803—0

Ⅰ.高…　Ⅱ.同…　Ⅲ.高等数学　Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(96)第 09305 号

*

高等教育出版社出版

北京沙滩后街 55 号

邮政编码：100009　传真：64014048　电话：64054588

新华书店总店北京发行所发行

北京地质印刷厂印装

*

开本 850×1168 1/32　印张 16.25　字数 410 000

1978 年 3 月第 1 版

1996 年 12 月　第 4 版　1997 年 7 月第 2 次印刷

印数 40 119—190 128

定价 14.50 元

内容提要

本书第四版是在全国高校工科数学课程教学指导委员会指导下，遵照国家教委“对质量较高，基础较好，使用面较广的教材要进行锤炼”的精神，并结合修订的《高等数学课程教学基本要求》在第三版的基础上修改成的。这次修改广泛吸取了全国同行的意见，从教学角度出发进行仔细推敲，改写了一些重要概念的论述，调整了习题的配置，每章增加总习题，使内容和系统更加完整，也便于教学。

本书分上、下两册出版。上册内容为函数与极限、导数与微分、中值定理与导数的应用、不定积分、定积分、定积分的应用、空间解析几何与向量代数等七章，书末还附有二、三阶行列式简介、几种常用的曲线、积分表、习题答案与提示。

本书仍保持了第三版结构严谨、逻辑清晰、叙述详细、通俗浅显、例题较多、便于自学等优点，又在保证教学基本要求的前提下，扩大了适应面，增强了伸缩性，供高等工科院校不同专业的学生使用。

第四版前言

关于本书的修订问题，全国高校工科数学课程教学指导委员会曾于1992年5月的工作会议上进行了讨论，与会代表们希望本书修改后能更加适应大多数院校的需要，这也正是我们的愿望.因此，我们在修订时，对不标*号的部分，注意控制其深广度，以期使它尽量符合高等工业院校的《高等数学课程教学基本要求》；同时仍保留标*号的内容，这些内容都是超出《基本要求》的，可供对数学要求稍高的专业采用.

兄弟院校的同行，对本书此次修订也提出了不少具体意见，修订时我们都作了认真考虑.在此，我们对课委会及同行们表示衷心的谢意.齐植兰、赵中时、谢树艺三位教授审阅了本书第四版稿，并提出不少宝贵意见，对此我们表示感谢.

本版在每章末增加了总习题，希望这些总习题在检查学习效果以及复习方面能发挥作用.

本书中用到二、三阶行列式的一些知识，部分读者由于阅读本书前尚未学过这方面的内容，因而产生学习上的困难.为此，本版上册增加了一个附录，用尽可能少的篇幅介绍有关二、三阶行列式的一些简单知识.

本书从第二版起的修订工作均由同济大学承担.第二版修订工作的正文部分由王福楹、邱伯驺完成，习题部分由宣耀焕、郭镜明、黄忠湛、王章炎完成.参加第三版修订工作的有王福楹、邱伯驺、骆承钦、王章炎.参加第四版修订工作的有王福楹、邱伯驺、骆承钦.

编　者

一九九三年十二月

第一版前言

本书分上、下两册.上册包括一元函数微积分学、空间解析几何与向量代数,下册包括多元函数微积分学、级数、微分方程、线性代数和概率论.各章配有习题,书末附有习题答案.

本书可作为高等学校工科高等数学课程的试用教材或教学参考书.

参加本书编写工作的有同济大学王福楹、王福保、蔡森甫、邱伯驺,上海交通大学王嘉善,上海纺织工学院巫锡禾,上海科技大学蔡天亮,上海机械学院王敦珊、周继高,上海铁道学院李鸿祥等同志.

本书由上海海运学院陆子芬教授主审.参加审稿的还有大连工学院刘锡琛,合肥工业大学万迪生、何继文,成都电讯工程学院冯潮清,西北工业大学王德如,浙江大学盛骤、孙玉麟,太原工学院徐永源、张宝玉,上海海运学院朱幼文、卢启兴等同志.

审稿同志都认真审阅了原稿,并提出了不少改进意见,对此我们表示衷心感谢.

限于编者水平,同时编写时间也比较仓促,因而教材中一定存在不妥之处,希望广大读者提出批评和指正.

编　者

一九七八年三月

目　录

第一章　函数与极限

初等数学的研究对象基本上是不变的量，而高等数学则以变量为研究对象．所谓函数关系就是变量之间的依赖关系．极限方法则是研究变量的一种基本方法．本章将介绍变量、函数、极限和函数的连续性等基本概念，以及它们的一些性质．

第一节　函　　数

一、集合　常量与变量

1．集合　集合是数学中的一个基本概念，我们通过例子说明这个概念．比方说，一个书柜中的书构成一个集合，一个教室里的学生构成一个集合，全体实数构成一个集合等等．一般地，所谓集合（或简称集）是指具有某种特定性质的事物的总体．组成这个集合的事物称为该集合的元素．凡事物 a 是集合 M 的元素记作 $a\in M$（读作 a 属于 M）；事物 a 不是集合 M 的元素记作 $a\notin M$（读作 a 不属于 M）．

一个集合认为已经给定，如果对于任何事物能够判定它是否属于这个集合．由有限个元素组成的集合，可用列举出它的全体元素的方法来表示．例如，由元素 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 组成的集合 A，可记作

$$A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}.$$

由无穷多个元素组成的集合，通常用如下记号表示：设 M 是具有某种特征的元素 x 的全体所组成的集合，就记作

$$M=\{x\mid x\text{ 所具有的特征}\}.$$

这里所谓 x 所具有的特征，实际上就是 x 作为 M 的元素应适合的充分必要条件：适合这条件的任何事物都是集合 M 的元素；反之，

集合 M 的元素都必须适合这条件.

例如,xOy 平面上坐标适合方程 $x^2+y^2=1$ 的点 (x,y) 的全体组成的集合 M,可记作

$$M=\{(x,y)\mid x,y\text{ 为实数},x^2+y^2=1\}.$$

这个集合 M 实际上就是 xOy 平面上以原点 O 为中心、半径等于 1 的圆周上的点的全体组成的集合.

以后用到的集合主要是数集,即元素都是数的集合. 如果没有特别声明,以后提到的数都是实数.

全体自然数的集合记作$\mathbb{N}$. 全体整数的集合记作$\mathbb{Z}$. 全体有理数的集合记作$\mathbb{Q}$. 全体实数的集合记作$\mathbb{R}$.

如果集合 A 的元素都是集合 B 的元素,即若 $x\in A$,则必 $x\in B$,就说 A 是 B 的子集,记作 $A\subset B$(读作 A 包含于 B)或 $B\supset A$(读作 B 包含 A). 例如,$\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}$,$\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}$,$\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}$.

如果 $A\subset B$,且 $B\subset A$,就称集合 A 与 B 相等,记作 $A=B$. 例如,设

$$A=\{1,2\},\ B=\{2,1\},\ C=\{x\mid x^2-3x+2=0\},$$

则 $A=B=C$.

不含任何元素的集合称为空集. 例如

$$\{x\mid x\in\mathbb{R},x^2+1=0\}$$

是空集,因为适合条件 $x^2+1=0$ 的实数是不存在的. 空集记作 $\varnothing$,且规定空集为任何集合的子集.

区间是用得较多的一类数集. 设 a 和 b 都是实数,且 $a<b$. 数集

$$\{x\mid a<x<b\}$$

称为开区间,记作 (a,b),即

$$(a,b)=\{x\mid a<x<b\}.$$

a 和 b 称为开区间 (a,b) 的端点,这里 $a\notin(a,b)$,$b\notin(a,b)$. 数集

$$\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$$

称为闭区间,记作 $[a,b]$,即

$$[a,b]=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}.$$

a 和 b 也称为闭区间 $[a,b]$ 的端点，这里 $a\in[a,b]$，$b\in[a,b]$.

类似地可说明：

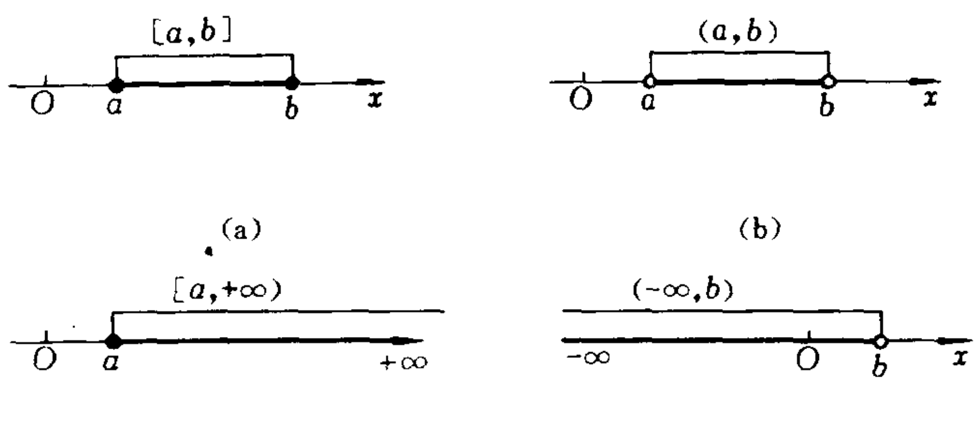
$$[a,b)=\{x\mid a\leqslant x<b\},$$
$$(a,b]=\{x\mid a<x\leqslant b\}.$$

$[a,b)$ 和 $(a,b]$ 都称为半开区间.

以上这些区间都称为有限区间. 数 $b-a$ 称为这些区间的长度. 从数轴上看，这些有限区间是长度为有限的线段. 闭区间 $[a,b]$ 与开区间 (a,b) 在数轴上表示出来，分别如图 1－1(a) 与 (b) 所示. 此外还有所谓无限区间. 引进记号 $+\infty$（读作正无穷大）及 $-\infty$（读作负无穷大），则可类似地表示无限区间，例如

$$[a,+\infty)=\{x\mid a\leqslant x\},$$
$$(-\infty,b)=\{x\mid x<b\}.$$

这两个无限区间在数轴上如图 1－1(c).(d) 所示.



(a) (b) (c) (d)

图 1－1

全体实数的集合 $\mathbb{R}$ 也可记作 $(-\infty,+\infty)$，它也是无限区间.

以后在不需要辨明所论区间是否包含端点，以及是有限区间还是无限区间的场合，我们就简单地称它为“区间”，且常用 I 表示.

邻域也是一个经常用到的概念. 以点 a 为中心的任何开区间称为点 a 的邻域，记作 $U(a)$.

设 δ 是任一正数，则开区间 $(a-\delta,a+\delta)$ 就是点 a 的一个邻域，这个邻域称为点 a 的 δ 邻域，记作 $U(a,\delta)$，即

$$U(a,\delta)=\{x \mid a-\delta<x<a+\delta\}.$$

点 a 称为这邻域的中心，δ 称为这邻域的半径（图 1－2）.

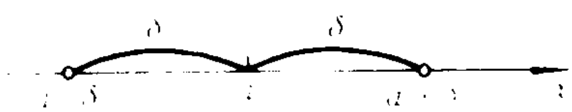


图 1－2

由于 $a-\delta<x<a+\delta$ 相当于 $|x-a|<\delta$，因此

$$U(a,\delta)=\{x \mid |x-a|<\delta\}.$$

因为 $|x-a|$ 表示点 x 与点 a 间的距离，所以 $U(a,\delta)$ 表示：与点 a 距离小于 δ 的一切点 x 的全体.

有时用到的邻域需要把邻域中心去掉. 点 a 的 δ 邻域去掉中心 a 后，称为点 a 的去心的 δ 邻域，记作 $\mathring{U}(a,\delta)$，即

$$\mathring{U}(a,\delta)=\{x \mid 0<|x-a|<\delta\}.$$

这里 $0<|x-a|$ 就表示 $x\neq a$.

2. **常量与变量** 在观察自然现象或技术过程时，常常会遇到各种不同的量，其中有的量在过程中不起变化，也就是保持一定的数值，这种量叫做常量；还有一些量在过程中是变化着的，也就是可以取不同的数值，这种量叫做变量.

例如，把一个密闭容器内的气体加热时，气体的体积和气体的分子个数保持一定，它们是常量；而气体的温度和压力在变化，则是变量，它们取得越来越大的数值.

一个量是常量还是变量，要根据具体情况作出具体分析. 例如，就小范围地区来说，重力加速度可以看作常量，但就广大地区来说，重力加速度则是变量.

通常用字母 a、b、c 等表示常量，用字母 x、y、t 等表示变量.

设变量 x 所取数值的全体组成数集 M，那末变量 x 也可看作

表示数集 M 中任何元素的符号. 例如,设变量 x 所取数值全体组成开区间(a,b),那末 x 就表示数集

$$(a,b)=\{x\,|\,a<x<b\}$$

中任何元素的符号. 如果特殊地,数集 $M=\{x\,|\,x=a\}$ 只含一个元素,那末表示数集元素的符号 x 就是常量. 在这个意义上,常量可看作变量的特殊情形.

二、函数概念

在同一个自然现象或技术过程中,往往同时有几个变量在变化着. 这几个变量并不是孤立地在变,而是相互联系并遵循着一定的变化规律. 现在我们先就两个变量的情形(多于两个变量的情形以后在第八章再讲)举几个例子.

例 1 考虑圆的面积 A 与它的半径 r 之间的相依关系. 大家知道,它们之间的关系由公式

$$A=\pi r^2$$

给定. 当半径 r 在区间$(0,+\infty)$内任意取定一个数值时,由上式就可以确定圆面积 A 的相应数值.

例 2 自由落体运动. 设物体下落的时间为 t,落下的距离为 s. 假定开始下落的时刻为 $t=0$,那末 s 与 t 之间的相依关系由公式

$$s=\frac{1}{2}gt^2$$

给定,其中 g 是重力加速度. 假定物体着地的时刻为 $t=T$,那末当时间 t 在闭区间$[0,T]$上任意取定一个数值时,由上式就可以确定下落距离 s 的相应数值.

例 3 设有半径为 r 的圆,考虑内接于该圆的正 n 边形的周长 S_n. 由图 1－3 容易看出,$S_n=2nr\sin\alpha_n$,其中 $\alpha_n=\pi/n$. 所以内接正 n 边形的周长 S_n 与边数 n 之间的相依关系由公式

$$S_n=2nr\sin\frac{\pi}{n}$$