计算数学丛书

外推法及其应用

邓建中

上海科学技术出版社

计算数学丛书

外推法及其应用

邓 建 中

上海科学技术出版社出版

(上海瑞金二路 450 号)

新华书店上海发行所发行 无锡县人民印刷厂印刷

开本 787×1092 1/32 印张 5.25 字数 114,000

1984 年 3 月第 1 版 1984 年 3 月第 1 次印刷

印数：1—8,200

统一书号：13119·1124 定价：(科五) 0.63 元

出 版 说 明

《计算数学丛书》是为了适应计算数学和计算机科学的发展，配合高等院校计算数学教学的需要而组织的一套参考读物。读者对象主要是高等院校数学系和计算机科学系的学生、研究生，亦可供高等院校数学系和计算机科学系的教师以及工矿企业、科研单位从事计算工作的技术人员参考。

本丛书向读者介绍近代计算方法的一些主要进展及其适用范围和实用效果。每种书集中介绍一个专题，针对本专题的近代发展作综合性的介绍，内容简明扼要，重点突出，有分析，有评价，力图使读者对该专题的动向和发展趋势得到一个完整的了解。

本丛书已拟定的选题计有：《线性代数与多项式的快速算法》、《数论变换》、《数值有理逼近》、《矩阵特征值问题》、《索伯列夫空间引论》、《计算组合数学》、《样条与插值》、《有限条形法》、《广义逆矩阵及其计算方法》、《非线性方程迭代解法》、《奇异摄动中的边界层校正法》、《沃尔什函数理论与应用》、《多项式最佳逼近的实现》、《坏条件常微分方程数值解》、《误差分析》、《最小二乘问题的数值解法》、《板壳问题非协调方法》、《外推法及其应用》、《Monte Carlo 方法》、《差分格式理论》、《高维偏微分方程数值解》等二十余种，于一九八〇年初起陆续出版。

引　言

外推法，即外推极限法(Extrapolation to the limit)或延伸趋限法(Deferred approach to the limit)，是最近二十年迅速发展的一种计算方法，目前已应用到数值计算的各个方面．数值积分中广泛使用的 Romberg 积分法，常微分方程数值解法中通常最有效的 GBS 算法，就是外推法．1971 年 D. J. Joyce 的综合报告，全面、系统地叙述了外推法的发展情况，是一篇难得的好文章．

本书的目的，是以 Joyce 的报告为线索，参照近年来发表的文献，结合作者学习外推法的体会，对外推法的理论基础及应用，作比较系统的介绍．全书共分三部分．第一部分，即第 1 章，以 Romberg 外推算法为例，介绍了外推法的一般概念、计算步骤和历史．第二部分，即第 2、3、4 章，分别对多项式外推法、有理式外推法和 ε 算法的计算格式，作了比较详细的推导；并讨论了格式的收敛性与稳定性．第三部分，即第 5、6、7 章，介绍了外推法的应用．由于作者水平有限，资料缺乏，难免有不少错误与不足，敬请读者批评指正．

在本书编写过程中，西安交通大学游兆永教授和上海科学技术出版社理科编辑室，给予了热情的鼓励和帮助．借此机会，作者谨向他们表示衷心的感谢．

邓建中
于西安交通大学
1980.5.

目　　录

第 1 章

什么叫外推法

§1 数学史上的一个疑案

为了说明什么叫外推法，我们先从数学史上的一个疑案谈起.

《隋书·律历志》记载，我国南北朝时代数学家祖冲之(公元 429—500 年)算出了圆周率

$$3.1415926<\pi<3.1415927.$$

这是一个光辉的成就. 这样精确的结果，比西方早了一千多年，直到十五世纪中期阿拉伯数学家 al-Kashi 和十六世纪法国数学家 Vieta 才打破了这一记录. 祖冲之是怎样算出来的呢？由于古书失传，现在还未考证清楚.

毫无疑问，祖冲之一定会受到魏晋时代数学家刘徽的影响. 刘徽在公元 263 年注的《九章算术》中，算出了当时世界上最精确的圆周率 $\pi=3.1416$. 他的方法是从半径为 10 的圆内接正六边形出发，逐步算出正 12、24、48、96 和192 边形的面积. 他指出，正多边形的边数越多，其面积就越接近于圆的面积 100π. 值得注意的是，他算出 $\pi=3.1416$，并不是计算 3072 边形得出来的. 他的算法是：先算出圆内接正 96、192 边形的面积

$$S(96)=313\frac{584}{625},\qquad S(192)=314\frac{64}{625},$$

求出两者的差

$$S(192)-S(96)=\frac{105}{625},$$

然后"以十二觚之幂为率消息"，"取此分寸之三十六"，即$\frac{36}{625}$，加到$S(192)$，得

$$100\pi\approx 314\frac{64}{625}+\frac{36}{625}=314\frac{4}{25}=314.16. \qquad (1.1)$$

这里引号内的话，是刘徽的原话，现在怎样解释，则众说纷纭，没有定论。不过从他的计算过程来看，他是利用了某种方法，根据几个内接正多边形的面积，来推算这种多边形边数无限增加时面积的极限值。这"某种方法"，可能就是现在的 Romberg 外推法；而祖冲之算出他的圆周率，也可能是现在的 Romberg 外推法。

§2 Romberg 外推算法

利用 Romberg 外推算法，可以根据圆内接正二、三、四、六、八边形的周长，算出跟祖冲之差不多的结果。事实上，设圆的直径为 1，记其内接正 n 边形的周长为 $L(n)$，则

$$L(2)=2,$$

$$L(3)=\frac{\sqrt{9}}{2}\approx 2.598076211,$$

$$L(4)=\sqrt{8}\approx 2.828427125,$$

$$L(6)=3,$$

$$L(8)=4\sqrt{2-\sqrt{2}}\approx 3.061467459.$$

设$h=\frac{1}{n}$，$T(h)=L(n)$，令

$$T_0^{(i)}=T(h_i),\ i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots, \qquad (1.2)$$

$$T_m^{(i)}=\frac{h_i^2T_{m-1}^{(i+1)}-h_{i+m}^2T_{m-1}^{(i)}}{h_i^2-h_{i+m}^2}=T_{m-1}^{(i+1)}+\frac{T_{m-1}^{(i+1)}-T_{m-1}^{(i)}}{(h_i/h_{i+m})^2-1},\tag{1.3}$$

则按表 1 可得表 2.

表 1　外推表的一般形式

$T_0^{(0)}$				
$T_0^{(1)}$	$T_1^{(0)}$			
$T_0^{(2)}$	$T_1^{(1)}$	$T_2^{(0)}$		
$T_0^{(3)}$	$T_1^{(2)}$	$T_2^{(1)}$	$T_3^{(0)}$	
$T_0^{(4)}$	$T_1^{(3)}$	$T_2^{(2)}$	$T_3^{(1)}$	$T_4^{(0)}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

表 2　计算 π 的外推表

2.000000000				
2.589076211	3.076537180			
2.828427125	3.124592586	3.140611055		
3.000000000	3.137258300	3.141480205	3.141588849	
3.061467459	3.140497049	3.141576632	3.141592411	3.141592648

这里 $T_m^{(i)}$ 为表中第 m 列的第 i 行元素，而 m 和 i 的编号从 0 算起. 例如表 2 中

$$\begin{aligned}T_2^{(2)}&=3.141576632=T_1^{(3)}+\frac{T_1^{(3)}-T_1^{(2)}}{(h_2/h_4)^2-1}\\&=3.140497049\\&\quad+\frac{3.140497049-3.137258300}{\left(\frac{1}{4}\Big/\frac{1}{8}\right)^2-1}.\end{aligned}$$

从表 2 可见，表中各列 $(T_m^{(0)}, T_m^{(1)}, T_m^{(2)}, \cdots)$、各行 $(T_0^{(i)}, T_1^{(i-1)}, T_2^{(i-2)}, \cdots, T_i^{(0)})$ 以及各对角线 $(T_0^{(i)}, T_1^{(i)}, T_2^{(i)}, \cdots)$ 上的元素，都单调地趋于 $\{T(h_i)\}$ 的极限值 π；且右列比左列，下行比上

行，下一对角线比上一对角线，收敛速度越来越快；$T_4^{(0)}=3.141592648$ 相当于祖冲之的圆周率近似值.

像表 2 那样，利用公式(1.2)和(1.3)，按照表 1 计算 $T_m^{(i)}$，用来近似 $T(h)$ 当 $h\to 0$ 时极限值 τ_0 的方法，称为 **Romberg 外推算法**. $T(h)$ 的极限值 τ_0 往往不可能通过有限次算术运算求出来；但对 h 的某些离散数值 h_i，$h_i\neq 0$，$T(h_i)$ 却常常可通过有限次、比较复杂的过程计算出来，而且可用来近似 τ_0，只是误差较大. 当 $m>0$ 时，由(1.3)可见，$T_m^{(i)}$ 是 $T_{m-1}^{(i+1)}$ 与 $T_{m-1}^{(i)}$ 的线性组合，而 $T_{m-1}^{(i+1)}$ 与 $T_{m-1}^{(i)}$ 又分别是 $T_{m-2}^{(i+2)}$、$T_{m-2}^{(i+1)}$ 与 $T_{m-2}^{(i+1)}$、$T_{m-2}^{(i)}$ 的线性组合，……，如此可知 $T_m^{(i)}$ 是 $T_0^{(i)}$，$T_0^{(i+1)}$，…，$T_0^{(i+m)}$ 的线性组合，或 $T(h_i)$，$T(h_{i+1})$，…，$T(h_{i+m})$ 的线性组合. $T_m^{(i)}$ 近似 τ_0 的误差往往比 $T(h_i)$、$T(h_{i+1})$、…、$T(h_{i+m})$ 的都小. 因此，Romberg 外推法，实质上是通过 τ_0 的若干离散化近似值 $T(h_k)$ 的适当组合，来推算极限值 τ_0，即用 $T_m^{(i)}$ 来近似 τ_0.

如果把 Romberg 外推法应用于刘徽的数据，令 $h_0=\dfrac{1}{96}$，$h_1=\dfrac{1}{192}$，$T(h_0)=313\dfrac{584}{625}$，$T(h_1)=314\dfrac{64}{625}$，则按(1.2)、(1.3)有

$$T_0^{(0)}=313\frac{584}{625},\qquad T_0^{(1)}=314\frac{64}{625},$$

$$\begin{aligned}T_1^{(0)}&=T_0^{(1)}+\frac{T_0^{(1)}-T_0^{(0)}}{(h_0/h_1)^2-1}\\&=314\frac{64}{625}+\frac{314\dfrac{64}{625}-313\dfrac{584}{625}}{\left(\dfrac{1}{96}\Big/\dfrac{1}{192}\right)^2-1}\\&=314\frac{64}{625}+\frac{105/625}{3}=314\frac{64}{625}+\frac{35}{625}.\end{aligned}\qquad(1.4)$$

比较(1.1)，可见这里的修正项 $\frac{35}{625}$ 跟刘徽的修正项 $\frac{36}{625}$ 十分接近，这说明刘徽有可能使用Romberg外推法，按公式(1.3)算了一步．祖冲之生在刘徽之后一百多年，很可能进一步使用Romberg外推法，按公式(1.3)算了好几步．

然而刘徽的修正项毕竟与Romberg外推法的修正项不同．也许刘徽不是用的公式(1.3)，而是用的别的公式．但无论如何，他总是利用若干 $T(h_k)$ 的某种组合，来推算序列 $\{T(h_k)\}$ 的极限 τ_0 的精确近似值，只是计算 $T_m^{(i)}$ 不一定按公式(1.3)而已．现代各种各样的外推法，其实也是利用

$$T(h_i)、T(h_{i+1})、\cdots、T(h_{i+m})$$

的适当组合来推算极限 τ_0 的精确近似值，只是采用了各种各样的公式来计算 $T_m^{(i)}$．所以外推法全称**外推极限法**，或称**延伸趋限法**，又称**加速收敛法**．看来刘徽或祖冲之也可能采用了另外一种外推法．当然，这些都只是猜测，实际情况究竟如何，还需留待考古新发现和数学史专家的考证．

§3 Romberg算法的理论根据

前面我们看到，从 π 的几个粗略近似值出发，利用Romberg算法便能得出 π 的精确近似值．这是什么道理呢？下面来回答这个问题．

设圆的直径为1，则其内接正 n 边形的周长

$$L(n)=n\sin\frac{\pi}{n}.$$

按照Taylor公式

$$L(n)=n\left[\frac{\pi}{n}-\frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{n}\right)^3+\frac{1}{5!}\left(\frac{\pi}{n}\right)^5-\frac{1}{7!}\left(\frac{\pi}{n}\right)^7+\cdots\right]$$
$$=\pi-\frac{\pi^3}{3!}\left(\frac{1}{n}\right)^2+\frac{\pi^5}{5!}\left(\frac{1}{n}\right)^4-\frac{n^7}{7!}\left(\frac{1}{n}\right)^6+\cdots.$$

令 $h=\frac{1}{n}$, $T(h)=L(n)$, $\tau_k=(-1)^k\pi^{2k+1}/(2k+1)!$, $k=1$, 2, …, 则

$$T(h)=\pi+\tau_1h^2+\tau_2h^4+\tau_3h^6+\cdots. \qquad (1.5)$$

于是

$$T(h_i)-\pi=\tau_1h_i^2+\tau_2h_i^4+\tau_3h_i^6+\cdots, \qquad (1.6)$$
$$T(h_{i+1})-\pi=\tau_1h_{i+1}^2+\tau_2h_{i+1}^4+\tau_3h_{i+1}^6+\cdots. \qquad (1.7)$$

这里 $T(h_i)-\pi=L(n_i)-\pi$ 是用圆内接正 n_i 边形的周长近似 π 的误差, 即用离散近似值 $T(h_i)$ 近似极限值 $\tau_0=\pi$ 的误差, 称为**离散化误差**. 公式(1.6)称为 $T(h_i)$ 的**离散化误差渐近展开式**. 由于外推表中 $T_0^{(i)}=T(h_i)$, 公式(1.6)表示, 用外推表中 0 列元素 $T_0^{(i)}$ 近似 π, 其误差为 $O(h_i^2)$.

将(1.6)、(1.7)分别乘 h_{i+1}^2、h_i^2, 然后相减, 除以 $h_{i+1}^2-h_i^2$, 并注意公式(1.3), 则得

$$T_1^{(i)}-\pi=\frac{h_i^2T_0^{(i+1)}-h_{i+1}^2T_0^{(i)}}{h_i^2-h_{i+1}^2}-\pi$$
$$=-h_i^2h_{i+1}^2[\tau_2+\tau_3(h_i^2+h_{i+1}^2)$$
$$+\tau_4(h_i^4+h_i^2h_{i+1}^2+h_{i+1}^4)$$
$$+\tau_5(h_i^6+h_i^4h_{i+1}^2+h_i^2h_{i+1}^4+h_{i+1}^6)+\cdots].$$

这说明, 用外推表中第 1 列元素 $T_1^{(i)}$ 近似 π, 其误差比 0 列小, 为 $O(h_i^2h_{i+1}^2)$. 类似地可得

$$T_2^{(i)}-\pi=\frac{h_i^2T_1^{(i+1)}-h_{i+2}^2T_1^{(i)}}{h_i^2-h_{i+2}^2}-\pi$$
$$=h_i^2h_{i+1}^2h_{i+2}^2[\tau_3+\tau_4(h_i^2+h_{i+1}^2+h_{i+2}^2)$$
$$+\tau_5(h_i^4+h_i^2h_{i+1}^2+h_i^2h_{i+2}^2+h_{i+1}^2h_{i+2}^2+h_{i+1}^4+h_{i+2}^4)+\cdots],$$

$$T_3^{(i)}-\pi=\frac{h_i^2T_2^{(i+1)}-h_{i+3}^2T_2^{(i)}}{h_i^2-h_{i+3}^2}-\pi$$

$$=-h_i^2h_{i+1}^2h_{i+2}^2h_{i+3}^2[\tau_4+\tau_5$$

$$\times(h_i^2+h_{i+1}^2+h_{i+2}^2+h_{i+3}^2)+\cdots],$$

$$T_4^{(i)}-\pi=\frac{h_i^2T_3^{(i+1)}-h_{i+4}^2T_3^{(i)}}{h_i^2-h_{i+4}^2}-\pi$$

$$=\pi+h_i^2h_{i+1}^2h_{i+2}^2h_{i+3}^2h_{i+4}^2$$

$$\times[\tau_5+\tau_6(h_i^2+h_{i+1}^2+h_{i+2}^2+h_{i+3}^2+h_{i+4}^2)+\cdots]. \tag{1.8}$$

这些式子表明，外推表中的列号越大，即 $T_m^{(i)}$ 的 m 越大，所含误差的阶数越高．因此，Romberg 算法的计算过程，实质上是逐列消去低次误差项、逐列提高误差阶数的过程，从而能逐步地使所得近似值越来越精确．

由公式(1.8)还可知，在表 2 中

$$3.141592648-\pi=T_4^{(1)}-\pi$$

$$\approx-\frac{\pi^{11}}{11!}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{1}{8}\right)^2$$

$$\approx-0.55\times10^{-8}.$$

π 准确到小数点后十位数字的近似值为 3.1415926535，它同 3.141592648 的差恰好是 0.55×10^{-8}，可见这里的误差估计是很精确的．

从上面公式的推导来看，如果把 π 改为另外某个量 τ_0，它是 $T(h)$ 当 $h\to0$ 时的极限值，而 $T(h)$ 具有形如(1.5)的渐近展开式，即

$$T(h)=\tau_0+\tau_1h^2+\tau_2h^4+\tau_3h^6+\cdots+\tau_Nh^{2N}+\tau_{N+1}(h)h^{2N+2}, \tag{1.9}$$

那么把 Romberg 外推法(1.3)应用于离散化近似值 $\{T(h_i)\}$，同样能逐列消去误差项，使所得近似值越来越精确．正是由

于这个原因，Romberg 外推法有着广泛的应用. Romberg 积分法就 Romberg 外推法在数值积分的应用. 在那里，需求的极限值 τ_0 是积分 $\int_a^b f(x)dx$，$T(h)$ 是将 $[a, b]$ 分成长 h 的小区间时，按梯形求积公式算出的积分近似值，而 $h_0=b-a$，$h_i=h_0 2^{-i}(i=1, 2, \cdots)$.

上述逐步消去近似值中误差项的思想，是 L. F. Richardson 1910 年提出来的，因而常称为 **Richardson 外推法**. 其实，他提出这算法的时候还不够一般化，只是通过二、三个离散化近似值消去低阶误差项，来推算精确近似值，即只按公式(1.3)计算外推表中的一、二列元素 $T_1^{(i)}$ 和 $T_2^{(i)}$，并称之为 $\boldsymbol{h^2}$ **外推**、$(\boldsymbol{h^2}$、$\boldsymbol{h^4})$ **外推**. 他的这种思想许多人早就用过，如 Huygens(1654)、Sheppard(1900)、Milne(1903) 以及刘徽. 用递推公式(1.3)不仅可以消去含 h^2、h^4 的误差项，而且还可以逐步消去含 h^6、h^8、$\cdots$ 等的误差项，这是 1955 年 Romberg 首先看出来的. Richardson 的功劳，在于他明确提出了 h^2 外推与 $(h^2$、$h^4)$ 外推；并且应用到多种问题，获得了成功.

§4 外推算法在计算机上的实现

在应用外推法(不仅 Romberg 算法)时，离散化参数数列 $\{h_i\}$ 通常取作单调趋于 0 的正数列，即

$$h_0>h_1>h_2>\cdots>0 \quad 且 \quad \lim_{i\to\infty} h_i=0.$$

在正常情况下，由于 $T_m^{(i)}$ 的首项误差 $(-1)^m\tau_{m+1}h_i^2h_{i+1}^2\cdots h_{i+m}^2$ (参见(1.6)～(1.8))在误差中起主要作用，当 i 增大时，$\{T_m^{(i)}\}$ 会单调地趋于极限值 τ_0，即外推表中每列的元素会单调地趋于极限值 τ_0. 每一行上的元素，由于逐列消去低次误

差项的结果，自然会更快地趋于极限值 τ_0. 这样，在只能用有限位数字表示数的计算机上，经过若干计算之后，可能会很快得到 τ_0 的足够精确的近似值，进一步计算的意义反而会被舍入误差的影响所淹没. 因此，通常一旦发现同行或同列相邻二元素相差很小时，或者外推的步数和次数(即外推表的列数和行数)太大时，例如超过事先规定的数 M_1、M_2 时，便停止计算. 在尾数为 8 位、12 位的机器上，M_1 分别取 6、10 较为适宜. 如果超过 M_1 或 M_2 仍不能求得满意的近似值，说明要求太苛刻，或者用过的 h_0、h_1、$\cdots$ 太大，或者形为(1.9)的展开式不存在，或者 m 超过了(1.9)中的 N.

在许多情况下，h_i 越小，离散化近似值 $T(h_i)$ 的计算工作量也越大. 为了少算 $T(h_i)$ 多作外推，常常采取如下计算顺序：

$$
\begin{array}{l}
\quad T_0^{(0)}\to \\
\to T_0^{(1)}\to T_1^{(0)}\to \\
\to T_0^{(2)}\to T_1^{(1)}\to T_2^{(0)}\to \\
\to T_0^{(3)}\to T_1^{(2)}\to T_2^{(1)}\to T_3^{(0)}\to \\
\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\to T_0^{(i)}\to T_1^{(i-1)}\to T_2^{(i-2)}\to\cdots\to T_i^{(0)}\,(\text{或 } T_{M_1}^{(i-M_1)}) \\
\to T_0^{(i+1)}\to T_1^{(i)}\to T_2^{(i-1)}\to\cdots\cdots
\end{array}
$$

这就是说，外推表常常采用一行一行地逐行构造的方法. 按照这种顺序计算，每行元素的误差阶数逐列提高，直到最后元素 $T_i^{(0)}$ 或 $T_{M_1}^{(i-M_1)}$ 仍不能满足误差要求时，才转入下行，缩小 h_i，另算 $T(h_i)$，继续外推. 这样既变阶又缩小 h_i，往往能很快满足误差要求，停止多余的计算. 但为了防止同列元素相差不大但仍远离极限值的现象，最好规定行数的下限，如 m_3.

在逐行构造外推表的过程中，任一元素 $T_m^{(i)}$ 算出之后，上

一行的前列元素 $T_{m-1}^{(i)}$ 一般不再使用. 因此,可用一个一维数组如 $A[0:M]$ 来存放同一行的元素, 算出 $T_m^{(i)}$ 后将原来存放 $T_{m-1}^{(i)}$ 的地方改存 $T_{m-1}^{(i+1)}$.

根据以上说明, Romberg 外推法可按如下"程序"执行:

1. 算 $T(h_0) \Rightarrow A[0]$;

2. 对 $i=1 \sim M_2$ 做:

(1) 算 $T(h_i) \Rightarrow D_1$;

(2) 对 $m=1\sim\min(i, M_1)$ 做:

$$(D_1 - A[m-1])/((h_{i-m}/h_i)^2 - 1) \Rightarrow D_0,$$

$$D_1 \Rightarrow A[m-1], \quad D_0 + D_1 \Rightarrow D_1;$$

(3) $D_1 \Rightarrow A[\min(i, M_1)]$;

(4) 当 $i > m_3$ 时检查 $|D_0|$ 是否很小? 若是, 打印结果 D_1, 转 4;

3. 打印失败标志;

4. 停止.

由此可见, 外推算法的程序是比较简单的.

在实际应用中, 参数数列 $\{h_i\}$ 常常使用以下三种:

H_1: $h_i = h_0 b^i \left(0<b<1, \text{ 通常 } b=\frac{1}{2}\right)$;

H_2: $\{h_i\} = \left\{h_0, \frac{h_0}{2}, \frac{h_0}{3}, \frac{h_0}{4}, \frac{h_0}{6}, \frac{h_0}{8}, \frac{h_0}{12}, \cdots\right\}$, 即 i 为奇数时 $h_i = h_0/2^{\frac{i+1}{2}}$, i 为偶数时 $h_i = h_0/(3\times 2^{\frac{i}{2}-1})$;

H_3: $h_i = h_0/(i+1)$.

使用第一种数列 H_1 时 h_i 按比例缩小, $T(h_i)$ 往往好算一些. 例如要算 π, 按刘徽的办法取 $n_0=6$, $n_1=12$, $n_2=24$, $\cdots$, 即取

$$h_0 = \frac{1}{6}, \quad h_i = h_0/2^i,$$