流体力学理论例题与习题

朱之墀　王希麟

清华大学出版社

流体力学
理论例题与习题

朱之墀　　王希麟

清华大学出版社

内容简介

本书包括理论概述、例题（183题）和习题（418题）三部分。主要内容为场论与正交曲线坐标、流体静力学、流体运动学、流体动力学基本方程、理想流动的基本定理、不可压流体一维不定常流动和平面无旋流动、气体动力学基础、粘性流体动力学基础、边界层理论、水表面波动力学基础、相似与量纲分析等。书末附有全部习题答案及计算用表。

本书可作为高等院校力学、热工、机械、能源、航空、船舶、化工、水利、环保工程、海洋工程、应用数学、土建、仪器仪表等有关专业大学生和研究生的教学参考书，并可供有关教师及科技人员参考。

流体力学理论例题与习题

朱之墀　王希麟

★

清华大学出版社出版

北京　清华园

煤炭工业出版社印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行・各地新华书店经售

★

开本：787×1092 $^1/_{16}$　印张：22.5　字数：556千字

1986年12月第1版　1986年12月第1次印刷

印数：00001～8000

统一书号：15235・249　定价：3.25元

前　言

本书内容由三部分组成：理论概述，例题（183题）和习题（418题）。在理论概述部分，我们力图保持流体力学基本内容的系统性和完整性，并阐明应用理论时的注意点及解题技巧，以便为求解例题和习题提供足够的理论基础。在例题部分，通过典型题目的剖析，使读者进一步加深对流体力学基本内容的理解，并为解决工程实际问题和求解习题起桥梁作用。在习题部分，我们力图使习题涉及面宽，类型多并具有典型性。习题内容有浅有深，以基本题为主，少数难题附有提示。习题中包括理论推导题，证明题和工程应用题，以后者为主。重点内容的题目有一定的重复性，书末统一列出全部习题答案，以供核对参考。

本书正文共十二章，第一章前是预备知识——“场论及正交曲线坐标”，第十三章是“相似与量纲分析”。预备知识主要是为非力学专业学生写的，它是学习流体力学必要的一种数学工具，这部分内容不难理解，但要反复应用。熟练掌握则对于学习后面几章数学较多的流体力学内容是十分有益的。“相似与量纲分析”是对流体力学也是对其它一些学科进行理论分析与实验研究的一种有力工具，本书中主要结合流体力学编写。

本书可作为高等院校力学、机械、热工、能源、航空、船舶、化工、水利、环境工程、海洋工程、应用数学、仪器仪表、土建等有关专业大学生和研究生的教学参考书，并供有关教师及科技人员参考。

我们曾听到不少反映，认为流体力学“抽象难学”，“解题困难”。本书如能在这方面起到一点“引路”作用，将使我们感到莫大欣慰。这也正是本书编写的目的。

本书由朱之墀，王希麟共同编写，朱之墀主编。主要根据作者多年来讲授流体力学课程的教学实践，并参照国内外一些流体力学教材编写而成。作者特别感谢清华大学流体力学教研组的同志们，他们编写的教材及教学工作的丰富经验给了我们很大的启发和帮助，并感谢他们对本书编写和出版工作的关怀和大力支持。

由于作者学识有限，加以编写时间仓促，谬误或不妥之处在所难免，恳请读者批评指正。

朱之墀　王希麟

1984年9月

符 号 表

符号	名称
A	面积
a	拉格朗日变量，声速
$\boldsymbol{a}$	加速度向量，任意向量
B	任意物理量（标量）
$\boldsymbol{B}$	任意物理量（向量），任意二阶张量
b	拉格朗日变量
$\boldsymbol{b}$	向量势
C	拉格朗日变量，水波波速，比热
C_g	群速度
C_p	定压比热
C_v	定容比热
C_f	当地阻力系数
C_D，C_X	阻力系数
C_L，C_Y	升力系数
D	阻力，直径
$\boldsymbol{D}$	阻力（向量）
E	动能，弹性模数，内能
$E\lambda$	一个波长的水波总能量
E_1	单位长度水波的总能量
Ec	埃克特数
e	单位质量的内能
$\boldsymbol{e}_i$	单位向量（$i=1, 2, 3$）
F	力
$\boldsymbol{F}$	力（向量）
Fr	弗劳特数
f	单位质量的体积力，函数，振动频率
$\boldsymbol{f}$	单位质量的体积力（向量）
g	重力加速度
$\boldsymbol{g}$	重力加速度（向量）
H	高度
h	水深、高度
h_i	拉梅系数（$i=1, 2, 3$）
I_m	复数的虚部
i	单位质量的焓
$\boldsymbol{i}$	x轴方向的单位向量
$\boldsymbol{j}$	y轴方向的单位向量
$\boldsymbol{k}$	z轴方向的单位向量
L	升力，曲线长度

y　直角坐标系的一个坐标轴

z　直角坐标系和柱坐标系的一个坐标轴，xy轴组成的物理复平面的变量（$z=x+iy$）

α　攻角，绝对流动气流角、接触角

β　相对流动气流角，激波角

Γ　速度环量，环量

γ　比热比

γ_{ij}　角变形速率分量（i，$j=1$，2，3）

δ　气流转折角

ε　变形速率张量

ε　柱坐标系和球坐标系的一个坐标轴

ε_{ij}　变形速率张量的分量（i，$j=1$，2，3）

ζ　辅助的复平面的变量，曲线坐标系的一个坐标轴

η　曲线坐标系的一个坐标轴

Θ　关于θ的函数

θ　球坐标系的一个坐标轴

λ　热传导系数，水波波长

μ　动力粘性系数，马赫角

ν　运动粘性系数，普朗特-迈耶尔函数

ξ　曲线坐标系的一个坐标轴

Π　压力冲量，相似律

ρ　密度

σ　距离　表面张力系数

τ　体积

Φ　耗散函数

φ　速度势

χ　复势

ψ　流函数

Ω　涡量值

$\boldsymbol{\Omega}$　涡量（向量）

ω　旋转角速度

$\boldsymbol{\omega}$　旋转角速度向量

目　录

预备知识　场论与正交曲线坐标

场是具有物理量的空间，场的研究方法是将物理量作为空间点位置$\boldsymbol{R}$和时间 t 的函数。但在场论分析中，t作为参变量处理，即分析t时刻的场的情况。

§0.1　向量及张量的基本运算

一、向量运算符号规定

1．爱因斯坦（Einstein）求和符号　数学式子任意一项中如出现一对符号相同的指标，称为爱因斯坦求和符号，它是哑指标，表示求和。例如：

$$a_i\boldsymbol{e}_i=a_1\boldsymbol{e}_1+a_2\boldsymbol{e}_2+a_3\boldsymbol{e}_3=\boldsymbol{a}$$

$$k_1a_ib_i+k_2\boldsymbol{e}_j\cdot\boldsymbol{e}_j=k_1(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)+3k_2$$

2．克罗内克尔（Kronecker）δ符号　任意两个正交单位向量点积用δ_{ij}表示，称为克罗内克尔δ，

$$\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_j=\delta_{ij}=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}\quad i,j=1,\ 2,\ 3 \tag{0.1}$$

式中i，j是自由指标，（0.1）式表示$\delta_{11}=\delta_{22}=\delta_{33}=1$，$\delta_{23}=\delta_{32}=\delta_{12}=\delta_{21}=\delta_{13}=\delta_{31}=0$

3．置换符号　任意两个正交单位向量叉积可表示为

$$\boldsymbol{e}_i\times\boldsymbol{e}_j=e_{ijk}\boldsymbol{e}_k \tag{0.2}$$

式中e_{ijk}称为置换符号，又称利西（Ricci）符号，其数值如下：

$$e_{ijk}=\begin{cases}0 & i,j,k\text{ 中有 2 个或 3 个自由指标值相同。}\\ 1 & i,j,k\text{ 中按12312顺序任取 3 个排列。}\\ -1 & i,j,k\text{ 中按13213顺序任取 3 个排列。}\end{cases}$$

上式表示$e_{123}=e_{312}=e_{231}=1$，$e_{132}=e_{213}=e_{321}=-1$，其余分量为零。由此可知，$e_{ijk}$中任意两个自由指标对换，对应分量值相差一个负号，如$e_{132}=-e_{123}$，故e_{ijk}称为置换符号。

二、向量运算的常用公式

$$\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}=a_i\boldsymbol{e}_i\pm b_i\boldsymbol{e}_i=(a_i\pm b_i)\boldsymbol{e}_i \tag{0.3}$$

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_i\boldsymbol{e}_i\cdot b_j\boldsymbol{e}_j=a_ib_j\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_j=a_ib_j\delta_{ij}=a_ib_i \tag{0.4}$$

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=a_i\boldsymbol{e}_i\times b_j\boldsymbol{e}_j=a_ib_j\boldsymbol{e}_i\times\boldsymbol{e}_j=a_ib_je_{ijk}\boldsymbol{e}_k=\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix} \tag{0.5}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})&=a_i\boldsymbol{e}_i\cdot(b_j\boldsymbol{e}_j\times c_k\boldsymbol{e}_k)=a_ib_jc_k\boldsymbol{e}_i\cdot(\boldsymbol{e}_j\times\boldsymbol{e}_k)\\ &=a_ib_jc_k\boldsymbol{e}_i\cdot e_{jkl}\boldsymbol{e}_l=a_ib_jc_ke_{jki}=a_ib_jc_ke_{ijk}\end{aligned}$$

$$=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \tag{0.6$_a$}$$

$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b} \tag{0.6$_b$}$$

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c} \tag{0.7}$$

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d})-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d}) \tag{0.8}$$

三、向量分量的坐标变换

按向量定义：

$$\boldsymbol{a}=a_i\boldsymbol{e}_i=a_{i'}\boldsymbol{e}_{i'} \tag{0.9}$$

式中a_i，$a_{i'}$和$\boldsymbol{e}_i$，$\boldsymbol{e}_{i'}$分别为$\boldsymbol{a}$在两个不同的正交坐标系中的分量和坐标轴单位向量. 各单位向量间的夹角的余弦（即方向余弦）为l_j，m_j，n_j（$j=1$，2，3）如表0.1所示，则对应的向量分量的坐标变换关系有：

$$\begin{aligned} a_{i'}&=a_i\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_{i'}=(\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_{i'})a_i \quad (i'=1,\ 2,\ 3) \\ a_i&=a_{i'}\boldsymbol{e}_{i'}\cdot\boldsymbol{e}_i=(\boldsymbol{e}_{i'}\cdot\boldsymbol{e}_i)a_{i'} \quad (i=1,\ 2,\ 3) \end{aligned} \tag{0.10}$$

例如：

$$a_{1'}=(\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_{1'})a_1+(\boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{e}_{1'})a_2+(\boldsymbol{e}_3\cdot\boldsymbol{e}_{1'})a_3=l_1a_1+l_2a_2+l_3a_3$$

$$a_2=(\boldsymbol{e}_{1'}\cdot\boldsymbol{e}_2)a_{1'}+(\boldsymbol{e}_{2'}\cdot\boldsymbol{e}_2)a_{2'}+(\boldsymbol{e}_{3'}\cdot\boldsymbol{e}_2)a_{3'}=l_2a_{1'}+m_2a_{2'}+n_2a_{3'}$$

四、二阶张量的基本运算

力学中最常用的张量是二阶张量. 二阶张量就是两个向量的并积，可表示为

$$\mathbf{B}=\boldsymbol{ac}=a_i\boldsymbol{e}_ic_j\boldsymbol{e}_j=a_ic_j\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j=b_{ij}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j \quad (i,\ j=1,\ 2,\ 3) \tag{0.11}$$

式中 b_{ij} 就是二阶张量在单位坐标轴向量为$\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{e}_3$的正交坐标系中的分量，共有九个. $\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j$是二阶张量的基,其分量也是九个. 注意$\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j\neq\boldsymbol{e}_j\boldsymbol{e}_i$

表 0.1　各坐标轴间方向余弦

	$\boldsymbol{e}_1$	$\boldsymbol{e}_2$	$\boldsymbol{e}_3$
$\boldsymbol{e}_1'$	l_1	l_2	l_3
$\boldsymbol{e}_2'$	m_1	m_2	m_3
$\boldsymbol{e}_3'$	n_1	n_2	n_3

1. 二阶张量的基本运算规则

$$\boldsymbol{ab}\pm\boldsymbol{cd}=(a_ib_j\pm c_id_j)\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j \tag{0.12}$$

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{bc}=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{c}=\boldsymbol{c}(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}) \tag{0.13}$$

$$\boldsymbol{ab}\cdot\boldsymbol{cd}=\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{d}=(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{ad}=\boldsymbol{ad}(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b}) \tag{0.14}$$

$$\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{ab}\cdot\boldsymbol{d}=(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d})=(\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{b})(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})=(\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}) \tag{0.15}$$

$$\boldsymbol{ab}\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) \tag{0.16}$$

2. 二阶张量分量的坐标变换

按张量定义：

$$\mathbf{B}=b_{ij}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j=b_{i'j'}\boldsymbol{e}_{i'}\boldsymbol{e}_{j'} \tag{0.17}$$

式中b_{ij}与$b_{i'j'}$分别是对应于两个坐标系中的张量分量，则其对应的坐标变换为

$$\left.\begin{aligned} b_{i'j'} &= \boldsymbol{e}_{i'}\cdot(b_{ij}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j)\cdot\boldsymbol{e}_{j'} = b_{ij}(\boldsymbol{e}_{i'}\cdot\boldsymbol{e}_i)(\boldsymbol{e}_{j'}\cdot\boldsymbol{e}_j) \quad (i',\ j'=1,\ 2,\ 3) \\ b_{ij} &= \boldsymbol{e}_i\cdot(b_{i'j'}\boldsymbol{e}_{i'}\boldsymbol{e}_{j'})\cdot\boldsymbol{e}_j = b_{i'j'}(\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_{i'})(\boldsymbol{e}_j\cdot\boldsymbol{e}_{j'}) \quad (i,\ j=1,\ 2,\ 3) \end{aligned}\right\} \tag{0.18}$$

例如：（参见表0.1）

$$\begin{aligned} b_{1'2'} &= b_{11}(\boldsymbol{e}_{1'}\cdot\boldsymbol{e}_1)(\boldsymbol{e}_{2'}\cdot\boldsymbol{e}_1)+b_{12}(\boldsymbol{e}_{1'}\cdot\boldsymbol{e}_1)(\boldsymbol{e}_{2'}\cdot\boldsymbol{e}_2)+b_{13}(\boldsymbol{e}_{1'}\cdot\boldsymbol{e}_1)(\boldsymbol{e}_{2'}\cdot\boldsymbol{e}_3) \\ &\quad +b_{21}(\boldsymbol{e}_{1'}\cdot\boldsymbol{e}_2)(\boldsymbol{e}_{2'}\cdot\boldsymbol{e}_1)+b_{22}(\boldsymbol{e}_{1'}\cdot\boldsymbol{e}_2)(\boldsymbol{e}_{2'}\cdot\boldsymbol{e}_2)+b_{23}(\boldsymbol{e}_{1'}\cdot\boldsymbol{e}_2)(\boldsymbol{e}_{2'}\cdot\boldsymbol{e}_3) \\ &\quad +b_{31}(\boldsymbol{e}_{1'}\cdot\boldsymbol{e}_3)(\boldsymbol{e}_{2'}\cdot\boldsymbol{e}_1)+b_{32}(\boldsymbol{e}_{1'}\cdot\boldsymbol{e}_3)(\boldsymbol{e}_{2'}\cdot\boldsymbol{e}_2)+b_{33}(\boldsymbol{e}_{1'}\cdot\boldsymbol{e}_3)(\boldsymbol{e}_{2'}\cdot\boldsymbol{e}_3) \\ &= l_1m_1b_{11}+l_1m_2b_{12}+l_1m_3b_{13}+l_2m_1b_{21}+l_2m_2b_{22}+l_2m_3b_{23} \\ &\quad +l_3m_1b_{31}+l_3m_2b_{32}+l_3m_3b_{33} \end{aligned}$$

§0.2　物理量的梯度、散度与旋度

一、物理量的梯度

物理量的梯度可用来描述该物理量在一点邻域内的变化情况.

1. 标量梯度的定义、性质及其在直角坐标系中的表达式

如有一向量$\boldsymbol{a}$，处处满足$\boldsymbol{e}_l\cdot\boldsymbol{a}=\dfrac{\partial\varphi}{\partial l}$. 这里$\dfrac{\partial\varphi}{\partial l}$为标量$\varphi$沿$\boldsymbol{e}_l$方向的方向导数，则$\boldsymbol{a}$定义为物理量$\varphi$的梯度，并表示为grad$\varphi$. 它在直角坐标系中的表达式为

$$\mathrm{grad}\varphi=\boldsymbol{i}\,\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\boldsymbol{j}\,\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\boldsymbol{k}\,\frac{\partial\varphi}{\partial z} \tag{0.19}$$

标量梯度有两条经常应用的重要性质：

① $\boldsymbol{e}_l\cdot\mathrm{grad}\varphi=\dfrac{\partial\varphi}{\partial l}$，$d\boldsymbol{l}\cdot\mathrm{grad}\varphi=d\varphi$，这里$d\boldsymbol{l}=dl\boldsymbol{e}_l$前式表示由梯度可以得到物理量$\varphi$沿$\boldsymbol{e}_l$方向的方向导数，后式表示由梯度可以知道该物理量沿$\boldsymbol{e}_l$方向经过$dl$线段的增量.

② $\mathrm{grad}\varphi=\dfrac{\partial\varphi}{\partial n}\boldsymbol{e}_n$，这里$\boldsymbol{e}_n$为$\varphi$等值面法线指向$\varphi$增大的方向的单位向量，$\dfrac{\partial\varphi}{\partial n}$是$\varphi$沿$\boldsymbol{e}_n$方向的方向导数，如图0.1所示. 所以由梯度可以求得等值面法线方向的单位向量，它为$\pm\dfrac{\mathrm{grad}\varphi}{|\mathrm{grad}\varphi|}$.

例题0.1　求曲面$z=\dfrac{1}{2}(x^2+y^2)$的法线单位向量$\boldsymbol{n}'$.

解：

$$F=\frac{1}{2}(x^2+y^2)-z=0$$

$$\mathrm{grad}F=\frac{\partial F}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial F}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial F}{\partial z}\boldsymbol{k}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{n}'=\pm\frac{\mathrm{grad}F}{|\mathrm{grad}F|}=\pm\frac{x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}}{\sqrt{x^2+y^2+1}}$$

2. 向量梯度的定义、性质及其在直角坐标系中的表达式

如有一个二阶张量$\boldsymbol{B}$，处处满足$\boldsymbol{e}_l\cdot\boldsymbol{B}=\frac{\partial\boldsymbol{a}}{\partial l}$，这里$\frac{\partial\boldsymbol{a}}{\partial l}$为向量$\boldsymbol{a}$沿$\boldsymbol{e}_l$方向的方向导数，则定义$\boldsymbol{B}$为向量$\boldsymbol{a}$的梯度，并表示为grad$\boldsymbol{a}$，在直角坐标系中表示为

$$\mathrm{grad}\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}\frac{\partial\boldsymbol{a}}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial\boldsymbol{a}}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial\boldsymbol{a}}{\partial z}\tag{0.20}$$

类似于标量梯度，向量梯度有下述性质：$\boldsymbol{e}_l\cdot\mathrm{grad}\boldsymbol{a}=\frac{\partial\boldsymbol{a}}{\partial l}$，$d\boldsymbol{l}\cdot\mathrm{grad}\boldsymbol{a}=d\boldsymbol{a}$。这两式经常被用来求向量沿$\boldsymbol{e}_l$方向的方向导数及沿$d\boldsymbol{l}$向量线段的增量。但应注意$\mathrm{grad}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}_l\neq\frac{\partial\boldsymbol{a}}{\partial l}$，且$\mathrm{grad}\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{e}_n\frac{\partial\boldsymbol{a}}{\partial n}$后者是因为对于向量场没有等值面概念。

例题0.2　如$\boldsymbol{V}=V\boldsymbol{e}_s$，求证：$\boldsymbol{V}\cdot\mathrm{grad}\boldsymbol{V}=V\frac{\partial V}{\partial s}\boldsymbol{e}_s-\frac{V^2}{\mathrm{R}}\boldsymbol{e}_n$

式中$\boldsymbol{e}_s$，$\boldsymbol{e}_n$分别为正交曲线坐标线s，n的单位向量，R为坐标线s的曲率半径。

证：如图0.2所示。

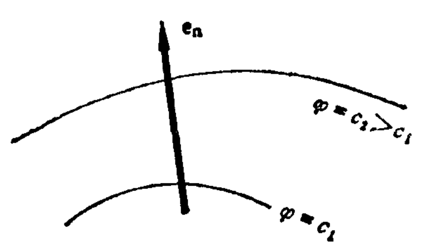

图 0.1

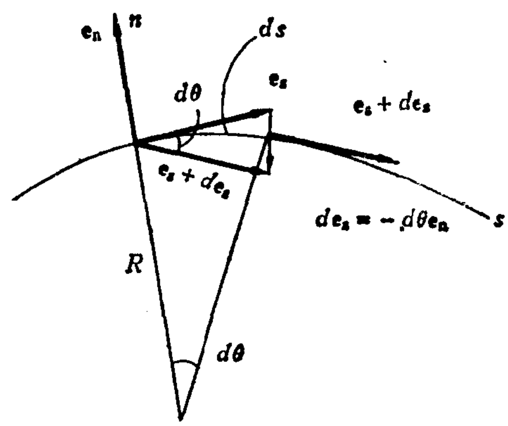

图 0.2

$$\boldsymbol{V}\cdot\mathrm{grad}\boldsymbol{V}=V\boldsymbol{e}_s\cdot\mathrm{grad}\boldsymbol{V}=V\frac{\partial\boldsymbol{V}}{\partial s}=V\frac{\partial V}{\partial s}\boldsymbol{e}_s+V^2\frac{\partial\boldsymbol{e}_s}{\partial s}$$

$$=V\frac{\partial V}{\partial s}\boldsymbol{e}_s-V^2\frac{d\theta}{ds}\boldsymbol{e}_n=V\frac{\partial V}{\partial s}\boldsymbol{e}_s-\frac{V^2}{R}\boldsymbol{e}_n$$　证毕

二、物理量的散度

物理量的散度可用来判别场是否有源。

1．向量的散度的定义及其在直角坐标系中的表达式

向量$\boldsymbol{a}$在M点的散度用div$\boldsymbol{a}$表示，定义为$\mathrm{div}\boldsymbol{a}=\lim\limits_{\tau\to0}\frac{1}{\tau}\oint\!\!\!\oint_A\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{a}dA$。式中$\tau$为包围$M$点的任意空间体积，$A$为$\tau$域对应的边界曲面，$\boldsymbol{n}$为边界曲面上微元面积$dA$的外法线方向单位向

量，$\oint\!\!\oint_A \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{a}dA$是向量$\boldsymbol{a}$流出曲面$A$的通量．在直角坐标系中，令 $\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$，则有：

$$\mathrm{div}\boldsymbol{a}=\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial z} \qquad (0.21)$$

流体力学中常用的向量散度是速度散度，令$\boldsymbol{V}=u\boldsymbol{i}+v\boldsymbol{j}+w\boldsymbol{k}$，则

$$\mathrm{div}\boldsymbol{V}=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}$$

2．二阶张量的散度及其在直角坐标系中的表达式

完全类似于向量散度，可以定义二阶张量$\mathbf{B}$的散度为 $\mathrm{div}\mathbf{B}=\lim\limits_{\tau\to 0}\frac{1}{\tau}\oint\!\!\oint_A \boldsymbol{n}\cdot\mathbf{B}dA$．同样在直角坐标系中可令$\mathbf{B}=\boldsymbol{i}\boldsymbol{b}_x+\boldsymbol{j}\boldsymbol{b}_y+\boldsymbol{k}\boldsymbol{b}_z$，则有：

$$\mathrm{div}\mathbf{B}=\frac{\partial \boldsymbol{b}_x}{\partial x}+\frac{\partial \boldsymbol{b}_y}{\partial y}+\frac{\partial \boldsymbol{b}_z}{\partial z}$$

流体力学中常用的二阶张量散度为应力张量散度，令$\mathbf{P}=\boldsymbol{i}\boldsymbol{p}_x+\boldsymbol{j}\boldsymbol{p}_y+\boldsymbol{k}\boldsymbol{p}_z$，则

$$\mathrm{div}\mathbf{P}=\frac{\partial \boldsymbol{p}_x}{\partial x}+\frac{\partial \boldsymbol{p}_y}{\partial y}+\frac{\partial \boldsymbol{p}_z}{\partial z} \qquad (0.22)$$

3．有源场与无源场

如某物理量的散度处处为零，则称该物理量的场是无源场，否则就是有源场．

例题0.3　求$\mathrm{div}(\mathbf{P}\cdot\boldsymbol{V})$在直角坐标系中的表达式，这里$\mathbf{P}=\boldsymbol{i}\boldsymbol{p}_x+\boldsymbol{j}\boldsymbol{p}_y+\boldsymbol{k}\boldsymbol{p}_z=p_{xx}\boldsymbol{ii}+p_{xy}\boldsymbol{ij}+p_{xz}\boldsymbol{ik}+p_{yx}\boldsymbol{ji}+p_{yy}\boldsymbol{jj}+p_{yz}\boldsymbol{jk}+p_{zx}\boldsymbol{ki}+p_{zy}\boldsymbol{kj}+p_{zz}\boldsymbol{kk}$；$\boldsymbol{V}=u\boldsymbol{i}+v\boldsymbol{j}+w\boldsymbol{k}$

解：$\mathrm{div}(\mathbf{P}\cdot\boldsymbol{V})=\mathrm{div}(p_{ij}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j\cdot V_k\boldsymbol{e}_k)=\mathrm{div}(p_{ij}V_k\boldsymbol{e}_i\delta_{jk})=\mathrm{div}(p_{ij}V_j\boldsymbol{e}_i)$

$$=\frac{\partial}{\partial x}(p_{xx}u+p_{xy}v+p_{xz}w)+\frac{\partial}{\partial y}(p_{yx}u+p_{yy}v+p_{yz}w)$$

$$+\frac{\partial}{\partial z}(p_{zx}u+p_{zy}v+p_{zz}w)$$

三、物理量的旋度

物理量的旋度可用来判别流场是否有旋．流体力学中一般很少用二阶张量的旋度，所以这里只讨论向量的旋度．

1．向量旋度的定义及其在直角坐标系中的表达式

如有一向量$\boldsymbol{c}$处处满足 $\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{n}=\lim\limits_{A\to 0}\dfrac{\oint_l \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{l}}{A}$，则定义$\boldsymbol{c}$为$\boldsymbol{a}$的旋度，并用$\mathrm{rot}\boldsymbol{a}$表示．这里$\boldsymbol{l}$为可缩封闭曲线，$A$为以$\boldsymbol{l}$为周线的曲面，$\boldsymbol{n}$为曲面$A$缩小为零时的法线方向单位向量，$\boldsymbol{l}$与$\boldsymbol{n}$方向满足右手螺旋法则，$\oint_l \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{l}$为向量$\boldsymbol{a}$沿$\boldsymbol{l}$的环量．在直角坐标系中 $\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$，则$\boldsymbol{a}$的旋度可表示为

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}\left(\frac{\partial a_z}{\partial y}-\frac{\partial a_y}{\partial z}\right)+\boldsymbol{j}\left(\frac{\partial a_x}{\partial z}-\frac{\partial a_z}{\partial x}\right)+\boldsymbol{k}\left(\frac{\partial a_y}{\partial x}-\frac{\partial a_x}{\partial y}\right)$$

$$= \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} \tag{0.23}$$

流体力学中常用的向量旋度是速度旋度，它的表达式为

$$\nabla\times\boldsymbol{V}=\boldsymbol{i}\left(\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}\right)+\boldsymbol{j}\left(\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}\right)+\boldsymbol{k}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

2. 有旋场与无旋场

向量$\boldsymbol{a}$的旋度处处为零，则称向量场$\boldsymbol{a}$为无旋场，否则就是有旋场.

例题0.4 已知$\boldsymbol{V}_e=\boldsymbol{V}_0+\omega\times\boldsymbol{R}$，式中$\boldsymbol{V}_0=\boldsymbol{V}_0(t)$，$\omega=\omega(t)$ $\boldsymbol{R}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$，求$\mathrm{rot}\boldsymbol{V}_e$

解：$\mathrm{rot}\boldsymbol{V}_e=\mathrm{rot}\boldsymbol{V}_0+\mathrm{rot}(\omega\times\boldsymbol{R})=\mathrm{rot}(\omega\times\boldsymbol{R})$

$$\omega\times\boldsymbol{R}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x & y & z \end{vmatrix}=\boldsymbol{i}(\omega_y z-\omega_z y)+\boldsymbol{j}(\omega_z x-\omega_x z)+\boldsymbol{k}(\omega_x y-\omega_y x)$$

$$\mathrm{rot}(\omega\times\boldsymbol{R})=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \omega_y z-\omega_z y & \omega_z x-\omega_x z & \omega_x y-\omega_y x \end{vmatrix}$$

$$=\boldsymbol{i}\left[\frac{\partial}{\partial y}(\omega_x y-\omega_y x)-\frac{\partial}{\partial z}(\omega_z x-\omega_x z)\right]+\boldsymbol{j}\left[\frac{\partial}{\partial z}(\omega_y z-\omega_z y)\right.$$

$$\left.-\frac{\partial}{\partial x}(\omega_x y-\omega_y z)\right]+\boldsymbol{k}\left[\frac{\partial}{\partial x}(\omega_z x-\omega_x z)-\frac{\partial}{\partial y}(\omega_y z-\omega_z y)\right]$$

$$=2\omega_x\boldsymbol{i}+2\omega_y\boldsymbol{j}+2\omega_z\boldsymbol{k}=2\omega$$

$$\therefore\quad \mathrm{rot}\boldsymbol{V}_e=2\omega$$

§0.3 哈密尔顿（Hamilton）算子及其应用

利用哈密尔顿算子∇可以方便地推导或证明一些公式并使数学式子书写简单. 它是一个具有微分及向量双重运算的算子，适用于任意正交曲线坐标系，但其具体形式在不同坐标系中是不同的，由于公式推导或恒等式的证明常常在直角坐标系中最为简捷，所以哈密尔顿算子的直角坐标系中的表达式最为常用. 其具体形式为

$$\nabla=\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}=\boldsymbol{e}_i\frac{\partial}{\partial x_i}$$

运算时先进行微分运算，后进行向量运算，具体运算规定如下：

$$
\left.\begin{aligned}
\nabla\varphi &= \boldsymbol{e}_i\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} = \mathrm{grad}\varphi\\
\nabla\boldsymbol{a} &= \boldsymbol{e}_i\frac{\partial\boldsymbol{a}}{\partial x_i} = \mathrm{grad}\boldsymbol{a}\\
\nabla\cdot\boldsymbol{a} &= \boldsymbol{e}_i\frac{\partial}{\partial x_i}\cdot\boldsymbol{a} = \boldsymbol{e}_i\cdot\frac{\partial\boldsymbol{a}}{\partial x_i} = \mathrm{div}\boldsymbol{a}\\
\nabla\times\boldsymbol{a} &= \boldsymbol{e}_i\frac{\partial}{\partial x_i}\times\boldsymbol{a} = \boldsymbol{e}_i\times\frac{\partial\boldsymbol{a}}{\partial x_i} = \mathrm{rot}\boldsymbol{a}
\end{aligned}\right\}\qquad(0.24)
$$

物理量梯度的散度运算称为拉普拉斯（Laplace）运算，通常用算子∇^2表示(也有用Δ表示)，即 $\nabla\cdot\nabla\varphi=\nabla^2\varphi$，$\nabla\cdot\nabla\boldsymbol{a}=\nabla^2\boldsymbol{a}$，这里 ∇^2称为拉普拉斯算子．按哈密尔顿算子运算规则，在直角坐标系中

$$
\left.\begin{aligned}
\nabla^2\varphi &= \nabla\cdot\nabla\varphi = \boldsymbol{e}_i\frac{\partial}{\partial x_i}\cdot\boldsymbol{e}_j\frac{\partial\varphi}{\partial x_j} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\partial x_i}\\
\nabla^2\boldsymbol{a} &= \boldsymbol{e}_i\frac{\partial}{\partial x_i}\cdot\boldsymbol{e}_j\frac{\partial\boldsymbol{a}}{\partial x_j} = \frac{\partial^2\boldsymbol{a}}{\partial x_i\partial x_i}
\end{aligned}\right\}\qquad(0.25)
$$

例题0.5　证明：$\nabla\cdot(\varphi\boldsymbol{a})=\nabla\varphi\cdot\boldsymbol{a}+\varphi\nabla\cdot\boldsymbol{a}$

证：$\nabla\cdot(\varphi\boldsymbol{a})=\boldsymbol{e}_i\frac{\partial}{\partial x_i}\cdot\varphi\boldsymbol{a}=\boldsymbol{e}_i\cdot\frac{\partial}{\partial x_i}(\varphi\boldsymbol{a})=\boldsymbol{e}_i\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{e}_i\cdot\varphi\frac{\partial\boldsymbol{a}}{\partial x_i}$

$$=\boldsymbol{e}_i\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\cdot\boldsymbol{a}+\varphi\boldsymbol{e}_i\cdot\frac{\partial\boldsymbol{a}}{\partial x_i}=\nabla\varphi\cdot\boldsymbol{a}+\varphi\nabla\cdot\boldsymbol{a}$$
证毕

例题0.6　证明：$\nabla\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=(\nabla\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}-(\nabla\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}$

证：$\nabla\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=\boldsymbol{e}_i\frac{\partial}{\partial x_i}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=\boldsymbol{e}_i\cdot\frac{\partial}{\partial x_i}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=\boldsymbol{e}_i\cdot\left(\frac{\partial\boldsymbol{a}}{\partial x_i}\times\boldsymbol{b}\right)+\boldsymbol{e}_i$

$$\cdot\left(\boldsymbol{a}\times\frac{\partial\boldsymbol{b}}{\partial x_i}\right)=\left(\boldsymbol{e}_i\times\frac{\partial\boldsymbol{a}}{\partial x_i}\right)\cdot\boldsymbol{b}-\boldsymbol{e}_i\cdot\left(\frac{\partial\boldsymbol{b}}{\partial x_i}\times\boldsymbol{a}\right)=(\nabla\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}$$

$$-\left(\boldsymbol{e}_i\times\frac{\partial\boldsymbol{b}}{\partial x_i}\right)\cdot\boldsymbol{a}=(\nabla\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}-(\nabla\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}$$
证毕

例题0.7　证明：$\nabla\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}\cdot\nabla\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times(\nabla\times\boldsymbol{b})$

证：$\boldsymbol{a}\times(\nabla\times\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\times\left(\boldsymbol{e}_i\frac{\partial}{\partial x_i}\times\boldsymbol{b}\right)=\boldsymbol{a}\times\left(\boldsymbol{e}_i\times\frac{\partial\boldsymbol{b}}{\partial x_i}\right)=\left(\boldsymbol{a}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{b}}{\partial x_i}\right)\boldsymbol{e}_i$

$$-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}_i)\frac{\partial\boldsymbol{b}}{\partial x_i}=\boldsymbol{e}_i\left(\frac{\partial\boldsymbol{b}}{\partial x_i}\cdot\boldsymbol{a}\right)-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}_i\frac{\partial\boldsymbol{b}}{\partial x_i}=\nabla\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}\cdot\nabla\boldsymbol{b}$$

$$\therefore\quad\nabla\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}\cdot\nabla\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times(\nabla\times\boldsymbol{b})$$
证毕

例题0.8　证明：$\nabla(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=\boldsymbol{b}\cdot\nabla\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}\cdot\nabla\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\times(\nabla\times\boldsymbol{a})+\boldsymbol{a}\times(\nabla\times\boldsymbol{b})$

证：$\nabla(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=\boldsymbol{e}_i\cdot\frac{\partial}{\partial x_i}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=\boldsymbol{e}_i\frac{\partial\boldsymbol{a}}{\partial x_i}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{a}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{b}}{\partial x_i}=\nabla\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{e}_i\frac{\partial\boldsymbol{b}}{\partial x_i}\cdot\boldsymbol{a}$

$$=\nabla\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\nabla\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}\cdot\nabla\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\times(\nabla\times\boldsymbol{a})+\boldsymbol{a}\cdot\nabla\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times(\nabla\times\boldsymbol{b})$$

上述最后一个等式是利用例题0.7的恒等式