矩阵分析

王朝瑞　史荣昌　编著

$$A_f = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

北京理工大学出版社

矩 阵 分 析

王朝瑞　史荣昌　编著

北 京 理 工 大 学 出 版 社

内 容 提 要

全书共十二章，主要介绍矩阵理论中的基本内容。本书对 λ-矩阵，函数矩阵，酉矩阵，Hermite 矩阵，正规矩阵和矩阵偶，矩阵分解，矩阵函数等内容作了较为详细的讨论，还讨论了矩阵方程和广义逆矩阵，书中每章均附有习题，有助于读者巩固和提高。

本书可以作为高等工科院校研究生教材，也可供高年级学生和有关工程技术人员参考。

矩 阵 分 析

王朝瑞　史荣昌 编著

*

北京理工大学出版社出版

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

北京理工大学出版社印刷厂印刷

*

787×1092 毫米　16 开本　18.625 印张　460 千字

1989 年 8 月第一版　1989 年 8 月第一次印刷

ISBN 7-81013-230-×/O·38

印数：1—3000 册　定价：4.25元

前　言

本书是作者在为北京理工大学研究生院讲授“矩阵分析”时所编讲义的基础上修改而成。

由于自然科学和工程技术的迅速发展，特别由于计算机的普遍使用，使得矩阵理论得到日益广泛的应用。目前，国内大多数工科院校均为研究生开设了矩阵论课，对矩阵论课的教学提出了新的要求。我们认为，一本较适用的教材一方面应当具有一定的理论深度和广度，以满足近代自然科学和工程技术的需要；另一方面，又应深入浅出，力求做到叙述简洁易懂。

矩阵理论的内容十分丰富，在一本书中包括矩阵理论的全部内容几乎是不可能的，本书介绍的是矩阵理论的基本内容，但它们又是工程技术中经常用到的。全书共十二章，第一章介绍线性空间和线性变换；第二章和第三章讨论以多项式为元素和以函数为元素的矩阵；第四章讨论酉矩阵和Hermite矩阵；第五章讨论正规矩阵和矩阵偶；第六章讨论矩阵分解；第七章和第八章讨论矩阵范数和矩阵序列与矩阵级数的收敛性；第九章讨论矩阵函数，以矩阵函数的各种表示为主要内容；第十章和第十一章讨论矩阵微分方程和矩阵代数方程；第十二章讨论广义逆矩阵。

由于作者水平有限，不妥之处实属难免，请读者批评指正。

编著者

1987.12 于北京

目　　录

第五章 正规矩阵与矩阵偶的标准形

第六章 矩阵的分解

第七章 范数 测度

第八章 矩阵序列和矩阵级数

第九章 矩阵函数

第一章　线性空间与线性变换

线性空间与线性变换是线性代数中的两个重要内容。为了后面讨论方便起见，本章介绍线性空间与线性变换的基本概念。主要内容有：线性空间，基变换与坐标变换，子空间与子空间的运算，线性变换，线性变换与矩阵，特征值，特征向量，化矩阵为对角形。

§1.1　线性空间

线性空间是线性代数最基本的概念之一，这节我们研究它的定义、维数、基底与坐标。

定义 1.1.1　设 V 是一个非空集合，F 是一个数域，在集合 V 的元素之间定义了称为**加法**的运算。也就是说给出了一个法则，对于 V 中任意两个元素 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$，在 V 中都有唯一的元素 $\boldsymbol{z}$ 与它们相对应，称为 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$ 的和，记为 $\boldsymbol{z}=\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}$。并且加法运算满足下面四条法则：

（1）　交换律　$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}+\boldsymbol{x}$。

（2）　结合律　$\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z})=(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})+\boldsymbol{z}$。

（3）　零元素　在 V 中有一元素 $\boldsymbol{0}$（称作零元素），对于 V 中任一元素 $\boldsymbol{x}$ 都有

$$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{x}$$

（4）　负元素　对于 V 中每一个元素 $\boldsymbol{x}$，都有 V 的元素 $\boldsymbol{y}$，使得

$$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}$$

在集合 V 的元素与数域 F 中的数之间还定义了一种运算，叫做**数量乘法**。也就是说，对于 V 中任一元素 $\boldsymbol{x}$ 与 F 中任一数 k，在 V 中有唯一的一个元素 $\boldsymbol{u}$ 与它们对应，称为 k 与 $\boldsymbol{x}$ 的数量乘积，记为 $\boldsymbol{u}=k\boldsymbol{x}$，并且数量乘法与加法满足下面四条法则：

（1）　$1\cdot\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}$

（2）　$k(l\boldsymbol{x})=(kl)\boldsymbol{x}$

（3）　$(k+l)\boldsymbol{x}=k\boldsymbol{x}+l\boldsymbol{x}$

（4）　$k(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=k\boldsymbol{x}+k\boldsymbol{y}$

其中 k、l 表示数域 F 中的任意数，$\boldsymbol{x}$、$\boldsymbol{y}$ 表示 V 中任意元素。

这样 V 称为数域 F 上的**线性空间**。一般情况下，F 是实数域 R 或复数域 C。

例 1.1.1　元素属于数域 F 的 $m\times n$ 阶矩阵，按矩阵的加法和矩阵与数的数量乘法，构成数域 P 上的一个线性空间，用 $F^{m\times n}$ 表示。$m\times n$ 阶实数矩阵所成的空间用 $R^{m\times n}$ 表示，$m\times n$阶复数矩阵所成的空间用 $C^{m\times n}$ 表示。

例 1.1.2　数域 F 按照本身的加法与乘法，构成一个自身上的线性空间。

例 1.1.3　系数都属于数域 F 的一元多项式的全体，按通常多项式加法和数与多项式的

乘法，构成一个数域 F 上的线性空间。

如果只考虑其中次数小于 n 的多项式全体（包括零多项式），构成一个线性空间，用 $F[x]_n$ 表示。

例 1.1.4 线性齐次方程组

$$A\boldsymbol{x}=0$$

的所有解的集合构成一个线性空间。

例 1.1.5 空间解析几何中所有过原点的向量集合按通常的向量加法和数与向量的乘法，构成一个线性空间。

例 1.1.6 定义在闭区间 $[a,b]$ 上连续函数全体按通常函数的加法和数与函数的乘法，构成一个线性空间。

线性空间 V 的元素 $\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}$，$\boldsymbol{z}$，…称为向量。这里所谓向量比几何中的向量涵义要广泛得多。

定义 1.1.2 设 V 是数域 F 上的一个线性空间，$\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2$，…，$\boldsymbol{x}_r$ $(r\geqslant 1)$ 是 V 中一组向量，k_1，k_2，…，k_r 是数域 F 中的数，那么向量

$$\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{x}_1+k_2\boldsymbol{x}_2+\cdots+k_r\boldsymbol{x}_r$$

称为向量 $\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2$，…，$\boldsymbol{x}_r$ 的一个**线性组合**，有时我们也说向量 $\boldsymbol{x}$ 可以用向量组 $\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2$，…，$\boldsymbol{x}_r$ **线性表出**。

定义 1.1.3 线性空间 V 中向量 $\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2$，…，$\boldsymbol{x}_r$ $(r\geqslant 1)$ 称为**线性相关**，如果在数域 F 中有 r 个不全为零的数 k_1，k_2，…，k_r 使得

$$k_1\boldsymbol{x}_1+k_2\boldsymbol{x}_2+\cdots+k_r\boldsymbol{x}_r=0 \qquad (1\text{-}1)$$

如果向量 $\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2$，…，$\boldsymbol{x}_r$ 不线性相关，就称为**线性无关**。换句话说，$\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2$，…，$\boldsymbol{x}_r$ 称为线性无关，如果等式（1-1）只有在 $k_1=k_2=\cdots=k_r=0$ 时才成立。

定理 1.1.1 设向量组 $\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2$，…，$\boldsymbol{x}_r$ 线性无关，但 $\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2$，…，$\boldsymbol{x}_r$，$\boldsymbol{y}$ 线性相关，则 $\boldsymbol{y}$ 可以用 $\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2$，…，$\boldsymbol{x}_r$ 线性表出，且表出是唯一的。

〔证明〕 由定理条件知，存在不全为零的数 k_1，k_2，…，k_r，l 使得

$$k_1\boldsymbol{x}_1+k_2\boldsymbol{x}_2+\cdots+k_r\boldsymbol{x}_r+l\boldsymbol{y}=0 \qquad (1\text{-}2)$$

于是 $l\neq 0$，否则的话，若 $l=0$，则有

$$k_1\boldsymbol{x}_1+k_2\boldsymbol{x}_2+\cdots+k_r\boldsymbol{x}_r=0$$

因为 $\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2$，…，$\boldsymbol{x}_r$ 线性无关，所以

$$k_1=k_2=\cdots=k_r=0$$

这与 $\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2$，…，$\boldsymbol{x}_r$，$\boldsymbol{y}$ 线性相关矛盾！于是 $l\neq 0$，故得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{y}&=-\frac{k_1}{l}\boldsymbol{x}_1-\frac{k_2}{l}\boldsymbol{x}_2-\cdots-\frac{k_r}{l}\boldsymbol{x}_r\\&=c_1\boldsymbol{x}_1+c_2\boldsymbol{x}_2+\cdots+c_r\boldsymbol{x}_r\end{aligned}$$

此即 y 可以用 x_1，x_2，…，x_r 线性表出。现证表出是唯一的。

设 y 有两个表示式，即

$$y=c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_rx_r$$

$$y=c_1'x_1+c_2'x_2+\cdots+c_r'x_r$$

由上面的等式，有

$$(c_1-c_1')x_1+(c_2-c_2')x_2+\cdots+(c_r-c_r')x_r=0$$

因为 x_1，x_2，…，x_r 线性无关，所以

$$c_i-c_i'=0 \qquad (i=1,2,\cdots,r)$$

即 $$c_i=c_i' \qquad (i=1,2,\cdots,r) \tag{1-3}$$ ▮

符号"▮"表示证明结束。

定义 1.1.4 如果在线性空间 V 中有 n 个线性无关的向量，但是没有更多数目的线性无关的向量，那么 V 就称为 n 维的。如果在 V 中可以找到任意多个线性无关的向量，那么 V 就称为无限维的。V 的维数记作 $\dim V$。

按照这个定义，不难看出，解析几何中空间向量所组成的线性空间是三维的。所有实系数多项式所组成的线性空间是无限维的。因为对于任意大的 N，都有 N 个线性无关的向量

$$1,\ x,\ x^2,\ \cdots,\ x^{N-1}$$

在解析几何中为了研究向量的性质，引入坐标是一个重要的步骤，对于有限维的线性空间，坐标同样是一个有力的工具。

定义 1.1.5 在 n 维线性空间 V 中，n 个线性无关的向量 e_1，e_2，…，e_n 称为 V 的一组基。

设 x 是 V 中任一向量，由定义 1.1.4 知，e_1，e_2，…，e_n，x 线性相关，由定理 1.1.1 知，x 可以由 e_1，e_2，…，e_n 唯一地线性表出，即

$$x=a_1e_1+a_2e_2+\cdots+a_ne_n \tag{1-4}$$

式（1-4）中数 a_1，a_2，…，a_n 称为 x 在基 e_1，e_2，…，e_n 下的坐标，记为（a_1，a_2，…，a_n）。式（1-4）可以写成

$$x=(a_1,a_2,\cdots,a_n)\begin{pmatrix}e_1\\ \vdots\\ e_n\end{pmatrix}=(e_1,\cdots,e_n)\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix} \tag{1-5}$$

定理 1.1.2 如果在线性空间 V 中有 n 个线性无关的向量 x_1，x_2，…，x_n，且 V 中任一向量都可以用它们线性表出，那么 V 是 n 维的，而且 x_1，x_2，…，x_n 是 V 的一组基。

〔证明〕 既然 x_1，x_2，…，x_n 线性无关，所以 V 的维数至少是 n。

设 y_1，y_2，…，y_n，y_{n+1} 是 V 中任意 $n+1$ 个向量，由定理条件它们都可以用 x_1，x_2，…，x_n 线性表出

$$y_i=c_{i1}x_1+c_{i2}x_2+\cdots+c_{in}x_n,\quad(i=1,2,\cdots,n)\qquad(1\text{-}6)$$

若有

$$k_1y_1+k_2y_2+\cdots+k_{n+1}y_{n+1}=0$$

把式（1-6）代入得

$$\sum_{i=1}^{n+1}k_ic_{i1}x_1+\sum_{i=1}^{n+1}k_ic_{i2}x_2+\cdots+\sum_{i=1}^{n+1}k_ic_{in}x_n=0$$

因为 x_1，x_2，…，x_n 线性无关，故

$$\sum_{i=1}^{n+1}k_ic_{ij}=0,\qquad(j=1,2,\cdots,n)$$

这是一个以 $n+1$ 个 k_1，k_2，…，k_{n+1} 为未知数，由 n 个方程组成的线性齐次方程组。因此对于任何固定的数 c_{ij} 必有非零解 k_1，k_2，…，k_{n+1}，也就是说，对于任何 y_1，y_2，…，y_{n+1} 一定是线性相关的。由定义 1.1.4 知 V 是 n 维的，x_1，$x_2,\cdots,x_n$ 是 V 的一组基。 ▌

例 1.1.7 在线性空间 $F[x]_n$ 中

$$1,\ x,\ x^2,\ \cdots,\ x^{n-1}$$

是 n 个线性无关的向量，而且每个次数小于 n 的数域 F 上的多项式可以被它们线性表出，所以 $F[x]_n$ 是 n 维的，而 1，x，x^2，…，x^{n-1} 是它的一组基。

在这组基下，多项式

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}$$

的坐标就是它的系数（a_0，a_1，…，a_{n-1}）。若在 V 中取另一组基

$$1,\ (x-a),\ (x-a)^2,\ \cdots,\ (x-a)^{n-1}$$

则多项式 $f(x)$ 按泰勒公式为

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}$$

因此在新的一组基下的坐标是

$$\left(f(a),\ f'(a),\ \cdots,\ \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}\right)$$

例 1.1.8 如果把复数域 c 看作是自身上的线性空间，那么它是一维的，数 1 就是一组基。如果把复数域看作是实数域上的线性空间，那么它是二维的，数 1,i 是一组基。

由此可见，维数和所考虑的数域有关。

§1.2 基变换与坐标变换

在上节例 1.1.7 中看到，同一个向量在不同基下的坐标是不同的。这节进一步研究它们

之间的关系。

设 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，…，$\boldsymbol{e}_n$ 和 $\boldsymbol{e}'_1$，$\boldsymbol{e}'_2$，…，$\boldsymbol{e}'_n$ 是 n 维线性空间 V 中两组基，它们的关系是

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{e}'_1&=a_{11}\boldsymbol{e}_1+a_{21}\boldsymbol{e}_2+\cdots+a_{n1}\boldsymbol{e}_n\\
\boldsymbol{e}'_2&=a_{12}\boldsymbol{e}_1+a_{22}\boldsymbol{e}_2+\cdots+a_{n2}\boldsymbol{e}_n\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\boldsymbol{e}'_n&=a_{1n}\boldsymbol{e}_1+a_{2n}\boldsymbol{e}_2+\cdots+a_{nn}\boldsymbol{e}_n
\end{aligned}$$

或者可以写成

$$(\boldsymbol{e}'_1,\ \boldsymbol{e}'_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{e}'_n)=(\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{e}_n)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix} \tag{1-7}$$

式（1-7）中的矩阵

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix} \tag{1-8}$$

称为由基 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，…，$\boldsymbol{e}_n$ 到基 $\boldsymbol{e}'_1$，$\boldsymbol{e}'_2$，…，$\boldsymbol{e}'_n$ 的**过渡矩阵**，它是可逆的。

设 $\boldsymbol{x}\in V$，且 $\boldsymbol{x}$ 在两组基下的坐标分别为（$x_1,x_2,\cdots,x_n$）和（$x'_1,x'_2,\cdots,x'_n$），即

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{x}&=x_1\boldsymbol{e}_1+x_2\boldsymbol{e}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{e}_n\\
&=x'_1\boldsymbol{e}'_1+x'_2\boldsymbol{e}'_2+\cdots+x'_n\boldsymbol{e}'_n
\end{aligned}$$

写成矩阵形式为

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{x}&=(\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{e}_n)\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\\
&=(\boldsymbol{e}'_1,\ \boldsymbol{e}'_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{e}'_n)\begin{pmatrix} x'_1\\ x'_2\\ \vdots\\ x'_n\end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{1-9}$$

现求 $\boldsymbol{x}$ 的坐标 x_i 与 x_i' 之间的关系。

把式(1-7)代入式(1-9)得

$$(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}$$

由于 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ 线性独立，故

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} \tag{1-10}$$

由于 A 是可逆的，故

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \tag{1-11}$$

公式(1-10)或(1-11)称为在基变换(1-7)下，向量的坐标变换公式。

例 1.2.1 在例 1.1.7 中取 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ 为 $1, x, x^2, \cdots, x^{n-1}$；取 $\boldsymbol{e}_1', \cdots, \boldsymbol{e}_n'$ 为 $1, (x-a), (x-a)^2, \cdots, (x-a)^{n-1}$，则 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ 到 $\boldsymbol{e}_1', \cdots, \boldsymbol{e}_n'$ 的过渡矩阵 A 为

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -a & a^2 & -a^3 & \cdots & (-a)^{n-1} \\ 0 & 1 & -2a & 3a^2 & \cdots & (n-1)(-a)^{n-2} \\ 0 & \cdots & 1 & -3a & & \cdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & & 1 \end{pmatrix}$$

所以坐标变换公式为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -a & a^2 & -a^3 & \cdots & (-a)^{n-1} \\ 0 & 1 & -2a & +3a^2 & \cdots & (n-1)(-a)^{n-2} \\ 0 & 0 & 1 & -3a & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}$$

§1.3 线性子空间

1. 子空间的概念

在通常的三维几何空间中，过原点的共面向量构成一个二维向量空间，过原点的共线向量构成一个一维向量空间，而这些向量集合都是三维线性空间的子集合。在 n 维线性空间中，也可以引进相应的概念。

定义 1.3.1 n 维线性空间 V 中子集合 W 称为**线性子空间**或称为**子空间**，如果它适合

(1) 在子集合 W 中任取向量 $\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}$，则向量 $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}$ 也在 W 中。

(2) 在子集合 W 中任取向量 $\boldsymbol{x}$，再任取数域 F 中一数 λ，则 $\lambda\boldsymbol{x}$ 也在 W 中。

由定义可知，在 W 中任取 m 个向量 $\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2$，…，$\boldsymbol{x}_m$，对于任意 m 个数 λ_1，λ_2，…，λ_m，则向量

$$\lambda_1\boldsymbol{x}_1+\lambda_2\boldsymbol{x}_2+\cdots+\lambda_m\boldsymbol{x}_m$$

也在 W 中。换句话说，子空间 W 中任意有限多个向量的任意线性组合仍在 W 中。

由定义不难证明下述定理。

定理 1.3.1 n 维线性空间 V 的子空间仍为线性空间。

证明留给读者。

既然线性子空间本身也是一个线性空间。上面引入的概念，如维数、基、坐标等，当然也可以应用到线性子空间上。因为在线性子空间中不可能比在整个空间中有更多数目的线性无关的向量。所以，任何一个线性子空间的维数不能超过整个空间的维数。

例 1.3.1 在线性空间中，由单个零向量所组成的子集合是一个线性子空间，叫做**零子空间**。

例 1.3.2 线性空间 V 本身也是 V 的一个子空间。

在线性空间中，零子空间和线性空间本身经常称为**平凡子空间**，而其它的线性子空间叫做非平凡子空间。

例 1.3.3 $F[x]_n$ 是线性空间 $F[x]$ 的子空间。

设 $\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2$，…，$\boldsymbol{x}_r$ 是线性空间 V 中一组向量，不难看出，由这组向量所有可能的线性组合

$$k_1\boldsymbol{x}_1+k_2\boldsymbol{x}_2+\cdots+k_r\boldsymbol{x}_r$$

构成的集合是非空的，而且对加法运算与数量乘法是封闭的，因而是 V 的一个子空间。这个子空间叫做由 $\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2$，…，$\boldsymbol{x}_r$ **生成的子空间**，记为

$$L(\boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{x}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{x}_r)$$

在有限维线性空间中，任何一个子空间都可以这样得到。事实上，设 W 是 V 的一个子空间，W 当然也是有限维的。令 $\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2$，…，$\boldsymbol{x}_r$ 是 W 的一组基，于是

$$W=L(\boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{x}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{x}_r)$$

2. 子空间的和、交、直和

定义 1.3.2 n 维线性空间 V 的两个子空间 V_1 和 V_2 的交，是由所有既在 V_1 中，又在 V_2 中的向量构成的子集合，记作 $V_1 \cap V_2$。

显然，子空间的交仍为子空间。

定义 1.3.3 n 维线性空间 V 的两个子空间 V_1 及 V_2 的和，是由所有形如

$$\boldsymbol{z}=\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}, \quad \boldsymbol{x}\in V_1, \ \boldsymbol{y}\in V_2$$

的向量构成的子集合，记作 V_1+V_2。

显然，子空间之和仍为子空间。

例 1.3.4 在三维几何空间中，用 V_1 表示一条通过原点的直线，V_2 表示一个通过原点而且与 V_1 垂直的平面，那么 V_1 与 V_2 的交是 $\{0\}$，而 V_1 与 V_2 的和是整个空间。

例 1.3.5 用 V_1 与 V_2 分别表示齐次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{s1}x_1+a_{s2}x_2+\cdots+a_{sn}x_n=0 \end{cases}$$

与

$$\begin{cases} b_{11}x_1+b_{12}x_2+\cdots+b_{1n}x_n=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ b_{t1}x_1+b_{t2}x_2+\cdots+b_{tn}x_n=0 \end{cases}$$

的解空间，那么 $V_1 \cap V_2$ 就是齐次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{s1}x_1+a_{s2}x_2+\cdots+a_{sn}x_n=0 \\ b_{11}x_1+b_{12}x_2+\cdots+b_{1n}x_n=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ b_{t1}x_1+b_{t2}x_2+\cdots+b_{tn}x_n=0 \end{cases}$$

的解空间。

关于两个子空间的交与和的维数，有以下的定理。

定理 1.3.2（维数公式） 设 V_1 与 V_2 是线性空间 V 的两个子空间，则

$$\dim V_1+\dim V_2=\dim(V_1+V_2)+\dim(V_1\cap V_2) \qquad (1\text{-}12)$$

〔证明〕 设 $\dim V_1=n_1$，$\dim V_2=n_2$，$\dim(V_1\cap V_2)=m$，取 $V_1\cap V_2$ 的一组基

$$x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_m$$

它可以扩充成 V_1 的一组基

$$x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_m,\ y_1,\ \cdots,\ y_{n_1-m}$$

也可以扩充成 V_2 的一组基

$$x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_m,\ z_1,\ \cdots,\ z_{n_2-m}$$

此即

$$V_1=L(x_1,\ \cdots,\ x_m,\ y_1,\ \cdots,\ y_{n_1-m})$$

$$V_2=L(x_1,\ \cdots,\ x_m,\ z_1,\ \cdots,\ z_{n_2-m})$$

所以

$$V_1+V_2=L(x_1,\ \cdots,\ x_m,\ y_1,\ \cdots,\ y_{n_1-m},\ z_1,\ \cdots,\ z_{n_2-m})$$

设

$$k_1x_1+\cdots+k_mx_m+p_1y_1+\cdots+p_{n_1-m}y_{n_1-m}$$
$$+q_1z_1+\cdots+q_{n_2-m}z_{n_2-m}=0$$

令

$$x=k_1x_1+\cdots+k_mx_m+p_1y_1+\cdots+p_{n_1-m}y_{n_1-m}$$
$$=-q_1z_1-\cdots-q_{n_2-m}z_{n_2-m}$$

由第一个等式知 $x\in V_1$，由第二个等式知 $x\in V_2$，于是 $x\in V_1\cap V_2$，故可令

$$x=l_1x_1+\cdots+l_mx_m$$

则

$$l_1x_1+\cdots+l_mx_m=-q_1z_1-\cdots-q_{n_2-m}z_{n_2-m}$$

即

$$l_1x_1+\cdots+l_mx_m+q_1z_1+\cdots+q_{n_2-m}z_{n_2-m}=0$$

由于 x_1，x_2，$\cdots$，x_m，z_1，$\cdots$，z_{n_2-m} 线性无关，所以

$$l_1=\cdots=l_m=q_1=\cdots=q_{n_2-m}=0$$

因而 $x=0$ ，从而有

$$k_1x_1+\cdots+k_mx_m+p_1y_1+\cdots+p_{n_1-m}y_{n_1-m}=0$$

由于 x_1，$\cdots$，x_m，y_1，$\cdots$，y_{n_1-m} 线性无关，又得

$$k_1=\cdots=k_m=p_1=\cdots=p_{n_1-m}=0$$

这就证明了 x_1，$\cdots$，x_m，y_1，$\cdots$，y_{n_1-m}，z_1，$\cdots$，z_{n_2-m} 线性无关，因而它是 V_1+V_2 的一组基，V_1+V_2 的维数为 n_1+n_2-m。于是维数公式成立。 】

子空间的直和是子空间和的一个重要特殊情况。

定义 1.3.4 设 V_1，V_2 是线性空间 V 的子空间，如果 V_1+V_2 中每个向量的分解式

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2,\quad \boldsymbol{x}_1\in V_1,\ \boldsymbol{x}_2\in V_2$$

是唯一的，这个和就称为直和，记为 $V_1\dotplus V_2$。

定理 1.3.3 和 V_1+V_2 是直和的充要条件是等式

$$\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2=\boldsymbol{0},\quad \boldsymbol{x}_i\in V_i\quad (i=1,\ 2)$$

只在 $\boldsymbol{x}_i$ 全为零向量时成立。

〔证明〕 必要性 由直和定义，$V_1\dotplus V_2$ 中每个向量分解式是唯一的，所以零向量的分解也是唯一的。

充分性 设 $\boldsymbol{x}\in V_1+V_2$ 有两个分解式

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2=\boldsymbol{y}_1+\boldsymbol{y}_2,\quad \boldsymbol{x}_i,\ \boldsymbol{y}_i\in V_i\ (i=1,\ 2)$$

于是

$$(\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{y}_1)+(\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{y}_2)=\boldsymbol{0}$$

其中 $\boldsymbol{x}_i-\boldsymbol{y}_i\in V_i\ (i=1,\ 2)$。由定理条件有

$$\boldsymbol{x}_i-\boldsymbol{y}_i=\boldsymbol{0},\quad \boldsymbol{x}_i=\boldsymbol{y}_i\ (i=1,\ 2)$$

此即向量 $\boldsymbol{x}$ 的分解式是唯一的。 】

推论 1.3.1 和 V_1+V_2 为直和的充要条件是

$$V_1\cap V_2=\{0\}$$

〔证明〕 充分性 设

$$\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2=\boldsymbol{0},\quad \boldsymbol{x}_i\in V_i\ (i=1,\ 2)$$

那么

$$\boldsymbol{x}_1=-\boldsymbol{x}_2\in V_1\cap V_2$$

由假设知

$$\boldsymbol{x}_1=\boldsymbol{x}_2=\boldsymbol{0}$$

此即 V_1+V_2 是直和。

必要性 任取向量 $\boldsymbol{x}\in V_1\cap V_2$，于是零向量可以写成

$$\boldsymbol{x}+(-\boldsymbol{x})=\boldsymbol{0},\quad \boldsymbol{x}\in V_1,\ (-\boldsymbol{x})\in V_2$$

因为是直和，所以

$$\boldsymbol{x}=-\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$$

此即

$$V_1\cap V_2=\{0\}$$ 】

定理 1.3.4 和 V_1+V_2 是直和的充要条件是在 V_1 中任取一组基：$\boldsymbol{x}_{11}$，$\boldsymbol{x}_{12}$，…，$\boldsymbol{x}_{1n_1}$ 与在 V_2 中任取一组基：$\boldsymbol{x}_{21}$，$\boldsymbol{x}_{22}$，…，$\boldsymbol{x}_{2n_2}$，则向量组