马振华 编著

离散数学导引

清华大学出版社

离散数学导引

马振华

清华大学出版社

(京)新登字 158 号

内容简介

本书是离散数学的精练导引。除介绍基本内容外,特别着重于阐述离散数学的方法。全书共分四讲十一章计有集合论技术,数理逻辑基础,代数系统与图论方法。在讲述各部分内容时,着重强调其间的联系,把离散数学看作是一个整体。内容不企求全面,但求重点突出。

本书可作为理工科大学学生的选修课教材,也可供广大科技工作者自学参考。各章后均附有习题,并有部分提示与解答。

离散数学导引
马振华
☆
清华大学出版社出版
北京 清华园
顺义振华印刷厂印刷
新华书店总店科技发行所发行
☆
开本:850×1168 1/32 印张:10.25 字数:263 千字
1993 年 6 月第 1 版 1993 年 6 月第 1 次印刷
印数:0001—5000
ISBN 7-302-00873-6/O·134
定价:5.65 元

序

我的书是一首小诗，
　　奉献给奋发的大学生，
　　　　勤勉的工程师，以及
　　　　　　孜孜不倦的好学青年。

宏伟的乐队里缺少不了乐器之王—钢琴*，
高耸入云的数学大厦里也缺少不了“离散”（数学），
　　“连续”和“离散”象两支翅膀，
　　　　它把人类从地上带向天堂！
　　“有限”与“无穷”象一把锋利的宝剑，
　　　　它无往不胜，
　　　　　无坚不摧！

学习数学吧！
　　即便你还是一个孩童，
　　　　学习它能培养你的耐性，
　　　　　　更能发挥你的思考力及创造力！

“数学能使人精细”
“知识就是力量”
——这是伟大培根不朽的名言！

---

* 作者把钢琴奏出的音乐比喻作“离散”音乐。

致读者

本书是作者在清华大学多次讲授“离散数学”课程的基础上编写的，目的在于给出离散数学的一个精炼的导引，带领读者进入离散数学的殿堂，侧重于就若干重要的内容介绍它的概念与独特的方法，内容不苛求全面，但求重点突出。

——对于定理的证明，本书的作法是只给出比较典型的、有方法论意义的证明，目的在于启发思想，对于平凡的证明，或较难的含有特殊技巧，但并不带有普遍意义的证明一概略去。

不带证明的定理中有一部分可作为读者的习题，读者可试着加以解决，以提高解题的能力。

——无论带有证明或不带证明的定理，作者都尽力地提供它的背景，以及它的适用范围。使读者对这些定理的内涵有更深的理解。

——要学会给数学概念下定义，离散数学的特点之一就在于解决问题的多样性，不但同一个问题有各种不同的解法，同一个概念有各种不同的描述方法，有各种不同的定义方法。本书在适当的地方给出种种不同的定义供读者参考。希望能起到举一反三的作用。

——学数学就要做数学，时间不富裕的读者可只做书中的习题，如果有时间，读者应把书中未完成的例题，未证明的定理以及习题全部做完，这样就有了坚固的基础。

——学习数学不仅限于学习数学知识，更重要的还在于学习数学思维方法，为了学习思维方法，就必须对数学内容有一定的看法。为此，作者在正文适当的地方相应地插入若干“格言”借

以阐发某些观点，藉以引起读者的深思。读者不论是赞成或是反对，只要能让读者对所学的内容加深理解，作者的愿望就达到了。

作者认为：

——一本好书不仅仅传授科学知识，还能在思想方法上给人们以启迪，促人心智，发人深思！

——一本好书应当把知识性与趣味性融为一体，使人们阅读时兴趣盎然，留连忘返！

——一本好书不是让人们牢记许多教条，它应能推动人们思想航行的风帆，催人出征，助人远航！

在书稿的修改、整理过程中感谢我的学生们给了我很大的帮助，提出许多好的意见，马连荣同志仔细地阅读了我的手稿，提出不少好的意见，并提供了部分习题的参考答案，向她深表谢意。

作者于清华园

1992 年 10 月

符　号　表

$\boldsymbol{C}$	复数集
$\boldsymbol{N}$	自然数集(包括 0 在内)
$\boldsymbol{N}^{+}$	正自然数集
$\boldsymbol{N}^{(n)}$	自然数 n 次方的全体
$\boldsymbol{P}$	素数集/规则 P(见数理逻辑)
$\boldsymbol{Q}$	有理数集
$\boldsymbol{Q}^{+}$	正有理数集
$\boldsymbol{Q}^{-}$	负有理数集
$\boldsymbol{R}$	实数集
T	规则 T(见数理逻辑)
$\boldsymbol{Z}$	整数集
$\boldsymbol{Z}_m$	$\{[1],[2],\cdots,[m]\}$
CP	演绎定理
EG	存在推广规则
ES	存在特指规则
UG	全称推广规则
US	全称特指规则
$\underbrace{\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}\times\cdots\times\boldsymbol{R}}_{n},{}^{n}\boldsymbol{R}$	笛卡儿积/n 维实空间
CA	集合 A 的补集
$A\times B$	集 A 与集 B 的笛卡儿积
$\underbrace{A\times\cdots\times A}_{n},{}^{n}A$	集 A 的 n 重笛卡儿积
I_A,R^0	恒等关系
$\overline{A},A'$	集 A 的补集
X^X	所有 X 到自身的映射

$\overline{\overline{M}}, \lvert M \rvert$	集合 M 的势(基数)
R	关系
$\not R$	否关系
$\overline{R}$	补关系
R^{-1}	逆关系
$R^{+}, t(R)$	关系 R 的传递闭包
$R^{*}, rt(R)$	关系 R 的自反传递闭包
$R \circ S$	关系 R 与关系 S 的复合
$\underbrace{R \circ \cdots \circ R}_{n}, R^{n}$	关系 R 的 n 次幂
$r(R)$	关系 R 的自反闭包
$s(R)$	关系 R 的对称闭包
$t(R)$	关系 R 的传递闭包
$rs(R)$	关系 R 的自反、对称闭包
$rt(R)$	关系 R 的自反、传递闭包
$ts(R)$	关系 R 的传递、对称闭包
B_2^r	$\underbrace{B_2 \times \cdots \times B_2}_{r}$
B_{2^r}	含有 2^r 个元素的布尔代数
$\mathscr{A}, \mathscr{B}, \mathscr{C}$	合适公式
$\mathscr{A}_{x_1 \cdots x_n}^{\mathscr{A}_1 \cdots \mathscr{A}_n}$	置换公式
A/R	A 上由关系 R 所产生的划分
$G/E, G/\pi_E$	G 上由 π_E 所产生的划分
$H \circ g, Hg$	H 的右陪集
$g \circ H, gH$	H 的左陪集
$[a]$	生成子,集$\{\cdots, a^{-1}, a^{0}, a^{1}, \cdots\}$
$[x]_R$	集 $\{y \mid y \in A$ 且 $< x, y > \in R\}$
xRy	x 与 y 有关系 R
$x \sim y$	x 与 y 等价
$\langle a, b \rangle$	元素 a, b 构成的“序对”
$[x, y]$	偏序集上的区间

$\aleph_0$	阿列夫零
$\aleph_1, \aleph$	阿列夫
$\mathscr{A}$	数学结构
E_π	由 π 产生的等价关系
α_x	歧义名称
N	正规子群
π_E	由 E 产生的划分
Σ	字母符号集
Σ^*	字母串集合(含空字)
Σ^+	字母串集合(不含空字)
Γ	前提集合
Λ	空字
$\in$	属于
$\supseteq$	包含
$\supset$	真包含
$\cup$	集合的并运算
$\cap$	集合的交运算
$\upharpoonright$	限制
$+_m$	m 同余加
$\cong$	同构
$\varnothing$	空集
$\mathscr{P}(A)$	集 A 的幂集
$\pi(A)$	集 A 的划分
$\sim, \neg$,NOT	命题的"非"运算
$\wedge$,&,AND	命题的"合取"运算
$\vee$,OR	命题的"析取"运算
$\rightarrow$,IF…THEN	命题的"蕴含"运算
$\leftrightarrow, \equiv$,Iff	命题的"等值"运算
$\bar{\vee}$	不可兼或
$\uparrow$	谢弗"竖"/sheffer"竖"

$\downarrow$	皮尔斯“箭”/pierce“箭”
$\forall$	全称量词
$\exists$	存在量词
$\vdash$	断定符

目　录

1　**第一讲　集合论技术**

3　**第一章　集合概念**

3　§1　集合及其表示法

8　§2　子集与幂集

12　§3　集合上的基本运算

16　§4　集合的 Venn 图

20　**第二章　关　系**

20　§5　关系及其表示法

26　§6　二元关系与映射

35　§7　若干特殊关系

45　§8　等价关系与划分

52　§9　序关系与偏序集

59　**第三章　集合的基数**

59　§10　无穷集与 Galileo 悖论

60　§11　一一对应与可数集

64　§12　Cantor 对角线法与不可数集

66　§13　集合的基数与 Cantor 连续统猜想

68　**第一讲习题**

73　**第二讲　数理逻辑基础**

75　**第四章　命题演算**

75　§14　命题、联结词与真值表

82　§15　真值函数类

90 § 16 其他逻辑联结词
93 § 17 联结词的功能完备集
94 § 18 范式与真值表技术
99 § 19 演绎和推理
111 **第五章 谓词演算**
111 § 20 引 言
112 § 21 谓词与量词
122 § 22 函数、项与合适公式
125 § 23 有效公式
134 § 24 谓词演算的演绎与推理
145 **第二讲习题**

151 **第三讲 代数系统**
152 **第六章 广群与半群**
152 § 25 代数系统
153 § 26 广群与半群
161 § 27 同态与同构
168 § 28 同余与可允许划分
172 § 29 同态、同余与可允许划分
177 **第七章 群**
177 § 30 群的基本性质
183 § 31 若干特殊的群
190 § 32 子群、陪集与正规子群
199 § 33 群的同态与同态基本定理
203 **第八章 布尔代数与格**
203 § 34 引 言
204 § 35 布尔代数的定义与例子

207 § 36 布尔代数的基本性质
209 § 37 布尔代数与格
215 § 38 有限布尔代数的构造
222 § 39 布尔函数——布尔表达式
226 § 40 布尔函数的极小化
229 **第三讲习题**

233 **第四讲 图论方法**
234 **第九章 图的基本概念**
234 § 41 引 言
235 § 42 基本概念
247 § 43 路与回路
249 § 44 图与矩阵
258 § 45 关系与图
261 § 46 群与图
263 § 47 Euler 图与 Hamilton 图
273 **第十章 树**
273 § 48 树的特征
277 § 49 生成树
288 § 50 有向树与根树
293 **第十一章 平面图**
293 § 51 平面图与 Euler 公式
296 § 52 Kuratowski 定理
297 **第四讲习题**
301 **部分习题答案与提示**
310 **参考文献**

第一讲

集合论技术

连续的形象：

别有一番滋味在心头

“剪不断，理还乱，是离愁，~~恰似一江春水向东流。~~”

南唐·李后主词

离散的形象：

“枯藤老树昏鸦，小桥流水人家，古道西风瘦马，夕阳西下，断肠人在天涯。”

元·马致远

自从 G. Cantor 创立集合论，迄今已有三百年的历史，集合的概念已深入到现代科学的各个方面，成为表达各种严格科学概念的必不可少的“数学语言”。

然而从最早的集合论文献 W. H. Young & G. C. young “The Theory of sets of Points”，(1906)以及著名的 Hausdorff 的“Mengenlehre”(1935)来看，那时所研究的集合多半是分析数学中的“数集”或几何学中的“点集”；虽说在各种文献与著作中叙述集合的元素可以是抽象的，其实都是在数集合与点集合的背景下进行研究的。集合的元素真正成为包罗万象的对象，应当说是从“计算机革命”开始。数字、符号、图象、语音；以及光、电、热各种信息，它们都可以作为“数据”(Data)，这些“数据”，就构成集合。因此，集合

的理论在编译原理，开关理论，信息检索，形式语言，数据库与知识库，CAD，CAI，CADE 以及人工智能的各个领域中，得到广泛的应用。集合论的原理与方法成为名符其实的数学技术。

本讲以朴素的观点讲解集合的理论、方法及其应用，而对公理集合论，只略作介绍。

第一章　集合概念

“人类的一切知识皆始于直观，其次是概念，最后发展为理念。”

I. Kant

“没有任何人能将我们从 Cantor 所创造的这个乐园（集合论）中驱赶出去！”

D. Hilbert

§1　集合及其表示法

什么是集合

在 1879—1918 年间，G. Cantor 从证明“函数展开为三角级数的唯一性”的研究开始，要求从某一个区间的所有点的全体中，分离出另一个无穷的点集合，为了要把这无穷多个点的全体弄清楚，他感到不能仅仅研究单独的或个别的“点”，必须将具有某种特性的“对象物”看成一个“整体”来进行研究。用他自己的话来说：“凡是在我们的感觉或思维中可以明确区分的对象物，把它们看成是一个整体，这个整体，我们就称它是集合(Set)，其中的“物”就称为这个集合的“成员”或“元素”(Element)。

从朴素集合论的立场，我们沿用这个描述，把它看作是一种直观的定义，下面用一些实例加以说明：

例 1.1

(1) 1973 年在大兴安岭工作的所有伐木工人。

(2) 英文字母表中的所有字母。

(3) 鲁迅“狂人日记”中所有的汉字。

(4) 自然数的全体(包含数字“0”在内)。($\boldsymbol{N}$)

(5) 非零自然数的全体。($\boldsymbol{N}^+$)

(6) 所有的整数。($\boldsymbol{Z}$)

(7) 所有的有理数。($\boldsymbol{Q}$)

(8) 所有的正有理数。($\boldsymbol{Q}^+$)

(9) 所有的负有理数。($\boldsymbol{Q}^-$)

(10) 所有的实数。($\boldsymbol{R}$)

(11) 所有的复数。($\boldsymbol{C}$)

(12) 所有的素数。($\boldsymbol{P}$)

(13) 小于 10 的素数的集合。

(14) 方程式：$x^2-5x+6=0$ 的所有“根”的集合。

(15) 平面上两条平行线的“交点”的集合。

(16) 所有正整数的平方数构成的集合。

(17) 所有 Fortran 语言中的标识符构成的集合。

上面所举的种种例子都是集合，有了集合的概念，就可以不仅仅研究单个的“数”与“数据”，而且研究由全体数据所表达的性质，以及更加广泛的问题。

在例 1.1 中，我们列举了许多集合。组成集合的“成员”，称之为集合的元素。将元素 a 在集合 S 中表示为：

$$a \in S,$$

读作，a 属于 S。如果 a 不在集合 S 中，记作：

$$a \notin S, \qquad (\text{或 } a \overline{\in} S),$$

其中“$\in$”表示属于关系(记号$\in$由意大利数学家 Peano 引入，是希腊文 εστι(esti)的首字母，相当于汉语中的“是”)。