

非定常旋涡空气动力学理论及其应用

黄国创 吕国鑫 周文伯 编著



上海交通大学出版社

内 容 简 介

本书是作者根据多年来在旋涡动力学理论和非定常空气动力学应用计算方面的研究成果写成的专著。

本书从流体动力学的基本理论出发阐述了可压缩粘性流动中力和力矩的一般公式,进而导出产生流体作用力的机理和非定常涡系理论;进一步系统介绍了非定常空气动力计算中的理论方法,详细讨论了非定常线性理论在工程实践问题中的应用;最后讨论了作者在研究非定常非线性空气动力计算方法上的最新进展。

本书所论述的内容是当前空气动力学研究的重点之一——非定常旋涡动力学问题,系统性强,理论严谨。本书可供有关科技人员参考,并作为高等院校数学力学和航空流体力学专业的研究生教材或教学参考书。

非定常旋涡空气动力学 理论及其应用

(沪)新登字205号

出版:上海交通大学出版社

(上海市华山路1954号·200030)

发行:新华书店上海发行所

印刷:常熟文化印刷厂

开本:850×1168(毫米)1/32

印张:11.875

字数:307000

版次:1994年8月第1版

印次:1994年8月第1次

印数:1—500

科目:309—282

ISBN 7-313-01285-3/T

定价:18.50元

前 言

本书是作者多年来从事旋涡动力学理论研究和非定常空气动力学应用计算方面的研究成果的集成,并补充了一些内容使之成为一部系统的理论和应用研究专著。

自从 60 年代至今,计算流体力学得到了飞速发展。这在一定程度上削弱了人们对基础理论的关注。然而,航空技术的进一步发展对旋涡动力学理论提出了新的要求。为了实现“超机动”飞行,需要人们进一步理解乃至控制动态失速现象。为此,不仅需要风洞实验、计算技术,更需要正确的理论指导。这就是本书理论部分得以诞生的背景。本书第二部分(7—10)为非定常空气动力计算方法及其应用实例,系统介绍了现有的各种计算方法以及作者的最新研究成果。

全书共分十章。1—3 为旋涡动力学理论基础。进而,作者引进了“动力学涡量”概念,发展了流体力学经典理论。

4,推导出可压缩粘性流动中力和力矩的一般公式;5,阐述了产生流体动力的机理;6,发展了非定常涡系理论。

以上六章,均由黄国创编写。

7,介绍了二维无旋流复位势理论,由吕国鑫、黄国创合写。8,介绍了二维非定常涡系的求解方法,由周文伯、黄国创合写。9,介绍非定常线性空气动力计算方法及其工程应用,由周文伯、吕国鑫、黄国创合写。10,介绍了非定常非线性空气动力计算方法,由黄国创编写。

全书由周文伯负责定稿。

最后,感谢蔡金狮先生建议我们将多年以来的研究工作成果写成本专著付梓出版,感谢王玉明、曹桂兴等与作者合作发展了非

定常非线性空气动力计算方法。

编 者

目 录

1 流体动力学的基本概念

1.1 流体的定义	1
1.2 连续性假设	2
1.3 作用于流体的体积力和表面力	2
1.4 流体的力学平衡	8
1.5 流体运动的描述方法	9
1.6 经典热力学概念	13
1.7 输运现象	19

2 流体运动的主管方程

2.1 质量守恒律	25
2.2 在运动流体中的物质积分及守恒律	26
2.3 运动方程	31
2.4 应力张量和应变张量表达式	33
2.5 能量方程	43
2.6 流体运动的主管方程组	47

3 流体的旋涡运动与速度场

3.1 引言	49
3.2 运动学涡量和动力学涡量	51
3.3 给定膨胀率和涡量场的速度表达式	53
3.4 膨胀率和涡量均为零的速度场	59
3.5 涡量分布及其诱导速度的数学描述	63
3.6 涡量动力学	70
3.7 无粘流体中的涡量定律和 Kelvin 环量定理	75

4 可压缩粘性流动中力和力矩的一般公式

4.1 动力学速度场分析	79
4.2 延伸至无穷远处的三维流动	81
4.3 延伸至无穷远处的二维流动	88
4.4 在远场大边界面上的压力积分	95
4.5 作用在物体上的流体动力主矢量公式	98
4.6 作用在物体上的流体动力主矩公式	103
4.7 应用举例	105

5 产生流体作用力的机理

5.1 涡量输运方程	111
5.2 流体作用力主矢量的积分表达式	112
5.3 流体作用力主矩的积分表达式	116
5.4 产生流体作用力的物理过程	120

6 非定常涡系理论

6.1 引言	125
6.2 不可压非定常涡系理论	128
6.3 可压缩非定常涡系理论	138
6.4 瞬时起动问题的理论分析	148
6.5 分离流动问题	157

7 二维无旋流动的复位势理论

7.1 流函数与复位势	160
7.2 源和汇, 偶极子	162
7.3 用复位势来分析二维无旋流动	167
7.4 柱体的有环量绕流问题	173
7.5 二维翼型	186
7.6 平行桨叶-旋涡干扰	195

7.7	用 Weis-Fogh 机构产生升力	203
8	二维非定常涡系的求解	
8.1	引言	216
8.2	非定常 Kutta 条件	219
8.3	二维非定常升力位流解法	224
8.4	动力学失速特性的简化数值模拟方法	241
8.5	桨叶-旋涡干扰的涡流模型	248
8.6	非定常粘性流动问题的分区解法	251
9	三维非定常面之法及其应用	
9.1	问题的一般性描述	263
9.2	非定常扰动速度位方程式	266
9.3	环流理论简述	267
9.4	运动点源的扰动速度位	272
9.5	可压缩流动中非定常离散涡诱导的速度场	279
9.6	数值求解过程(亚声速)	288
9.7	非定常气动力的分解和合成	294
9.8	非定常飞行动力学响应计算	297
9.9	飞行器掠海面飞行时的动力学响应	299
10	非定常非线性空气动力学问题	
10.1	引言	312
10.2	细长三角翼俯仰振荡试验研究	314
10.3	非定常非线性空气动力计算方法	324
10.4	飞行动力学中的非线性问题 ——非线性阶跃反应研究	350
	参考文献	366

1 流体力学的基本概念

1.1 流体的定义

从力学的角度来定义流体,则认为其基本性质是:流体在持续不断的运动中,无论多么小的剪切应力都是不能承受的。

所以,一团流体没有一个特定的形状,其中不同的微团可以自由地重新安置而不影响其宏观性质。在力的作用下,流体中不同的微团可以相对运动,并由此而产生流体力学这门学科。

对于空气和水这样的(简单)流体,用一个非常之小的力作用于其上,则流体微团的相对位置变化不是个小量。同时,还应该注意,流体对于使它变形的努力有一个阻抗;从定义出发,意味着这个阻抗不能避免变形的发生。而与此相等价的是,阻力随变形率的消失而消失。

液体与气体之间的差别对动力学研究来说并非本质问题。就宏观而论,可以用同样的方法来处理。液体与气体都具有流动性,易变形性。在液相时,物质的密度比气相时大得多,但这并不构成产生差异的基础。因为其主要影响是:要产生某一加速度所需的作用力的大小不同,而不是运动型态上的差异。液体和气体在力学性质上最重要的差异依赖于它们的体积弹性,即可压缩性。气体比液体容易压缩得多。于是,在任何运动中如果压力有显著变化的话,给定体积的气体之体积变化比液体的变化大得多。在飞机或导弹的飞行过程中,固体以高速在气体中运动,会产生显著的压力变化。此时,空气的可压缩性影响就变得重要起来了。在其他很多情况下,流体的运动往往只伴随微小的压力变化。这时气体和液体的行为是十分相似的。因为在两种流体中,体积的改变量均很小。

虽然在体积改变量很小的情况下可以用同一方程来决定气体与液体的变形速率,但是从阻抗变形趋势的分子作用机制来说,气

体与液体是完全不同的。

1.2 连续性假设

流体力学通常关心的是宏观尺度上（相对于分子间距这样的微观尺度而言）的性状。因此常常不必显式地考虑流体的分子结构。尽管当用微观尺度来观察流体时，流体的结构和运动在时间和空间上都是不均匀的、离散的和随机的；但在宏观尺度上，流体的结构和运动却是均匀的、连续的和确定的。因此，我们可以假设：实际流体的性状完全等同于一种在结构上完全连续的流体的性状。

虽然，在实际上流体的一个微元体积内的物理量（如质量、动量等）只集中于该元内的一小部分体积，但是仍然假定这些物理量是均布在这个体积元内的。在一般的实验中，这个连续性假设的正确性是显而易见的。因为任何一个测量探头所对应的敏感体积虽然在宏观尺度上已经足够小，但在微观尺度上仍然十分大，以至能够包含许许多多分子。各个分子具备不同的物理量值所引起的波动不会影响到测量的平均值。只有在特殊的情况下出现例外，例如导弹或卫星在十分高的高空中飞行，或者穿过激波时密度随位置发生剧烈变化等，只有在这些情况下才难以选择一个适当的敏感体积，使它既测出当地的物理量又包含有足够大的分子数目。

连续性假设意味着可以给流体的性质，诸如密度，压力，速度和温度等，在某一点的值赋予确定的意义。一般地说，这些量是流体的位置 and 时间的连续函数。从这里出发，就可以建立主管流体运动的方程。

1.3 作用于流体的体积力和表面力

作用在一个容积中的物质上的力可分为两类：长程力(long-range forces)和短程力(short-range forces)。

长程力又称(彻)体力，如重力、电磁力等。这种力可穿透到流体内部，作用在所有的流体元上。当把运动方程写成一般的形式时，我们将定义在时间 t ，作用于体积元 δV 内的流体上的总的体

力表示成为

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}, t) \rho \delta V \quad (1.3.1)$$

其中 δV 位于位置矢量 $\mathbf{r}$ 的附近; ρ 为密度。在地球的重力场中, 单位质量的力为

$$\mathbf{F} = \mathbf{g}$$

$\mathbf{g}$ 与时间 t 无关, 方向朝下。

短程力又称表面力, 直接来自分子的作用机制, 它随着微团间距离之增加而迅速下降, 只有当距离为流体分子间距的量级时才变得重要起来。如果两部分气体之间有一个共同的边界, 则短程力主要来自穿过共同边界的气体分子引起的动量输运效应。液体的情况则比较复杂, 短程力除来自穿过共同边界的分子引起的动量输运外, 还来自共同边界两侧分子间的作用力。

如果流体的物质微团受到外面的固体或流体的短程力的作用, 这些短程力仅仅作用在和流体微团的边界相邻接的一个薄层上, 薄层的厚度等于这个力的“渗透”深度。于是, 作用在该流体微团上的总的短程力决定于微团的表面积。如果短程力的渗透距离与微团表面的线尺度相比为小量, 那么作用于该微团之总力将正比于其面积 δS 。那么, 在时刻 t , 对位于 $\mathbf{r}$ 的微团, 将短程力表示成该微团一侧的流体作用于另一侧的流体的总力, 或叫表面力,

$$\mathbf{\Pi}(\mathbf{n}, \mathbf{r}, t) \delta S \quad (1.3.2)$$

其中 $\mathbf{\Pi}$ 为单位面积上的作用力, 称为局部表面应力。在此, $\mathbf{\Pi}$ 是 $\mathbf{n}$ 的奇函数。习惯上选择表面法向矢量 $\mathbf{n}$ 的指向为: $\mathbf{\Pi}$ 是 $\mathbf{n}$ 所指向的流体或固体作用在 δS 面上的力, 换句话说, $\mathbf{n}$ 矢量背向受应力作用的那一侧流体。于是, 当 $\mathbf{\Pi}$ 的法向分量与 $\mathbf{n}$ 的符号相同时, 表示一个拉伸作用力。

下面乃用应力张量来表示这个表面应力。

首先决定 $\mathbf{\Pi}$ 与它所作用的表面微元法向量的关系。考察图 1.3.1 所示的四面体体积元 δV , 研究作用于此元内的流体之上的瞬时力。其中三个正交面的面积为 $\delta S_1, \delta S_2, \delta S_3$; 相应的单位外法线矢为 $-\mathbf{a}, -\mathbf{b}, -\mathbf{c}$ 。第四个面的面积为 δS , 单位外法线矢

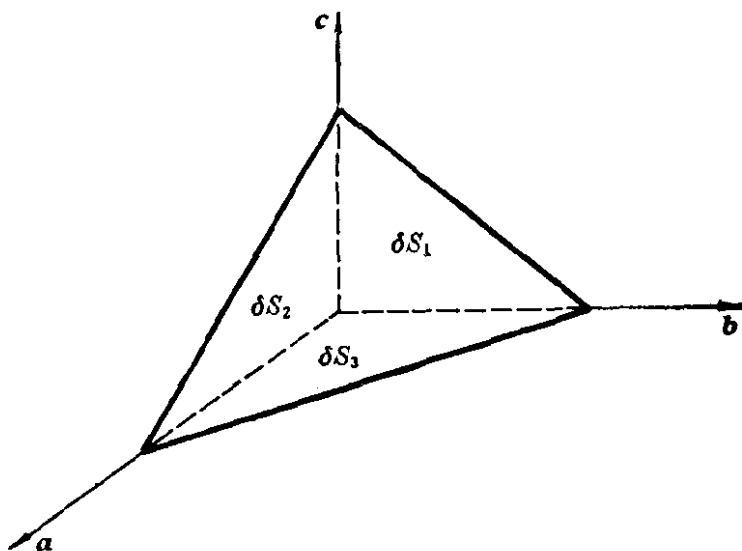


图 1.3.1 流体中的四面体体积微团

量为 $\mathbf{n}$ 。

于是, 作用于四个面的表面力之和为

$$\Pi(\mathbf{n})\delta S + \Pi(-\mathbf{a})\delta S_1 + \Pi(-\mathbf{b})\delta S_2 + \Pi(-\mathbf{c})\delta S_3$$

在此, 四个面有近似相同的 r 值及相同的 t 值。由于 $\delta S_1 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{n} \delta S$, 得到表面力之和为

$$\{\Pi_i(\mathbf{n}) - [a_j \Pi_j(\mathbf{a}) + b_j \Pi_j(\mathbf{b}) + c_j \Pi_j(\mathbf{c})] n_j\} \delta S \quad (1.3.3)$$

(其中 j 号相重则作和)

作用在 δV 内的流体之体积力与 δV 成正比, 它比 δS 要小一阶。流体的质量亦为 δV 量级, 质量与加速度之乘积亦然。考察下列方程式:

$$\text{质量} \times \text{加速度} = \text{体积力合力} + \text{表面力合力}$$

当四面体的线尺度趋零而形状不变时, 头两项按 δV 的速度趋零, 第三项按 δS 的速度趋零。由此而导出的结论是: 只有式(1.3.3)消失才能使方程成立。于是, 在任一方向 i 的应力分量为

$$\Pi_i(\mathbf{n}) = [a_j \Pi_j(\mathbf{a}) + b_j \Pi_j(\mathbf{b}) + c_j \Pi_j(\mathbf{c})] n_j \quad (1.3.4)$$

所以, 作用在任意方位(单位法线为 $\mathbf{n}$ 的方向)的平面元上的应力分量和任意三个正交面元上的在同一方向上的应力分量的关系就如同一个矢量与三个正交分量的关系一样。

矢量 $\mathbf{n}$ 与 Π 不依赖于轴系之选择, 而表示一个量的 (i, j) 分量的表达式(在式(1.3.4)的方括弧内的式子)也与轴系无关。换

句话说,此表达式是二阶张量的一个分量, σ_{ij} ,有

$$\Pi_i(n) = \sigma_{ij}n_j \quad (1.3.5)$$

σ_{ij} 是作用在与 j 方向垂直的平面元上的力的 i -分量,相应的流体位置为 r , 时间为 t 。这个张量叫做应力张量。于是,现在可以用 σ_{ij} 来描述流体的局部应力,这个量与 n 无关。

下面我们来证明应力张量的九个分量并非完全独立。

考察作用在任意形状的体积 V 内部的流体之上的各种力的力矩。作用在该体积的边界上的表面力产生的绕体积内的一点 O 的总力矩之 i -分量是①

$$\int \varepsilon_{ijk} r'_j \sigma_{kl} n_l dS,$$

在这里 r' 是表面微元 ndS 相对于 O 点的位置矢量。利用散度定理将沿封闭表面的积分化为沿该体积的积分,得到

$$\int \varepsilon_{ijk} \frac{\partial (r'_j \sigma_{kl})}{\partial r'_l} dV = \int \varepsilon_{ijk} \left(\sigma_{kl} + r'_j \frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial r'_l} \right) dV \quad (1.3.6)$$

如果令体积 V 趋于零而且其外形不变,则式(1.3.6)右边第一项为 V 的量级,第二项为 $V^{4/3}$ 量级。而体力所产生的绕 O 点的总矩为 $V^{4/3}$ 量级,所以 V 内的流体之瞬时角动量变化率亦为 $V^{4/3}$ 量级。故此, $\int \varepsilon_{ijk} \sigma_{kl} dV$ 项的量级比力矩方程中任何一项都大,于是它必须为零。满足这个要求的条件是: σ_{ij} 对 $\mathbf{R}$ 连续,而且流体中处处有

$$\varepsilon_{ijk} \sigma_{kl} = 0 \quad (1.3.7)$$

这对于任何 O 点的位置及 V 的形状都成立。如果在流体中的某个区域 $\varepsilon_{ijk} \sigma_{kl}$ 不为零,那么总可以选择一个小的体积 V , 使得在其上的积分不为零从而给出一个矛盾的结果。

关系式(1.3.7)表明应力张量是对称的,即 $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$, 所以它只有六个独立的分量。

① 在直角坐标系中规定选择张量 ε_{ijk} 的性质如下:除非 i, j, k 三个脚标各不相同,否则 ε_{ijk} 均为零;并且,根据 i, j, k 是循环排列或非循环排列而定义它等于 +1 或 -1。

σ_{ii} 的三个对角线分量为法向应力, 而六个非对角线分量为切向应力分量, 或称为切向应力。经常可以这样选择正交轴的方向, 使对称二阶张量的非对角线元素均为零。此时, 正交轴称为主轴, 应力张量的对角线元变为主应力, $\sigma'_{11}, \sigma'_{22}, \sigma'_{33}$ 。

改变参考轴系(正交)的方向时, 对角元素之和不变, 所以有

$$\sigma'_{11} + \sigma'_{22} + \sigma'_{33} = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} \quad (1.3.8)$$

相对于新的轴系, 作用在法向矢为 (n'_1, n'_2, n'_3) 的面积元上的单位面积的力的分量为

$$\sigma'_{11}n'_1, \sigma'_{22}n'_2, \sigma'_{33}n'_3$$

在新轴系的第一轴方向上, 单位面积上的力的分量为 $(\sigma'_{11}n'_1, 0, 0)$, 对应于拉伸(σ'_{11} 为正)或压缩(σ'_{11} 为负)状态。与此相似, 在第二和第三轴方向上的分量分别为 $(0, \sigma'_{22}n'_2, 0)$ 和 $(0, 0, \sigma'_{33}n'_3)$ 。所以, 在任一点附近的流体之一般状态可以看成是在三个正交方向上的应力的叠加。

总结一下, 二阶对称的应力张量具备如下性质:

(1) 应力张量的几何表示是应力二次曲面。

(2) 应力张量具有三个互相垂直的主轴方向。在主轴坐标系中, 应力张量可写成对角线形式,

$$\begin{bmatrix} \sigma'_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma'_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma'_{33} \end{bmatrix} \quad (1.3.9)$$

$\sigma'_{11}, \sigma'_{22}, \sigma'_{33}$ 为法向主应力, 切应力为零。

(3) 应力张量的三个不变量为

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}, \\ I_2 &= \sigma_{22}\sigma_{33} + \sigma_{33}\sigma_{11} + \sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{23}^2 - \sigma_{31}^2 - \sigma_{12}^2, \\ I_3 &= \sigma_{11}\sigma_{22}\sigma_{33} + 2\sigma_{12}\sigma_{23}\sigma_{31} - \sigma_{22}\sigma_{31}^2 - \sigma_{33}\sigma_{12}^2 - \sigma_{11}\sigma_{23}^2 \end{aligned} \right\} \quad (1.3.10)$$

对于静止流体中的应力张量, 根据我们对流体的定义, 流体对于切向变形没有任何抗拒能力, 因此可以导出静止流体中应力张量的形式。

考察作用于球面内部的流体上的表面力。设球的半径很小,

所以, σ_{ii} 近似地沿表面均匀分布。选取当地轴系与 σ_{ii} 之主轴重合, 将应力张量写成两个张量之和:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} \sigma_{ii} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \sigma_{ii} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \sigma_{ii} \end{bmatrix} \text{ 与 } \begin{bmatrix} \sigma'_{11} - \frac{1}{3} \sigma_{ii} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma'_{22} - \frac{1}{3} \sigma_{ii} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma'_{33} - \frac{1}{3} \sigma_{ii} \end{bmatrix} \quad (1.3.11)$$

第一个张量具有球对称性, 或具有各向同性。它对单位球面积上的力之贡献量为 $\frac{1}{3} \sigma_{ii} n$ 。 $\frac{1}{3} \sigma_{ii}$ 通常为负, 此时表现为均匀压缩效应。它使球状流体的体积有改变的趋势。这个力可以为静止流体所承受。

第二个张量的对角线元素之和为零, 所以它的法向应力中至少有一个为拉伸, 同时至少有一个为压缩, 或者均为零。在法向矢为 (n'_1, n'_2, n'_3) 的球面某点上的单位面积表面力相对于新轴系的分量为

$$\left(\sigma'_{11} - \frac{1}{3} \sigma_{ii} \right) n'_1, \left(\sigma'_{22} - \frac{1}{3} \sigma_{ii} \right) n'_2, \left(\sigma'_{33} - \frac{1}{3} \sigma_{ii} \right) n'_3 \quad (1.3.12)$$

换句话说, 流体中的小球在一个轴方向上受均匀拉伸, 在另一正交轴方向上受均匀压缩, 在第三个正交轴方向上受均匀拉伸或压缩, 而三个拉伸或压缩的代数和为零, 如图 1.3.2 所示。

第二个贡献量趋于使球状流体变成一个椭圆而不改变其体积。由于体积力比表面力小一个量级, 所以这个变形表面力不可能被流体上的任何体积力所平衡。

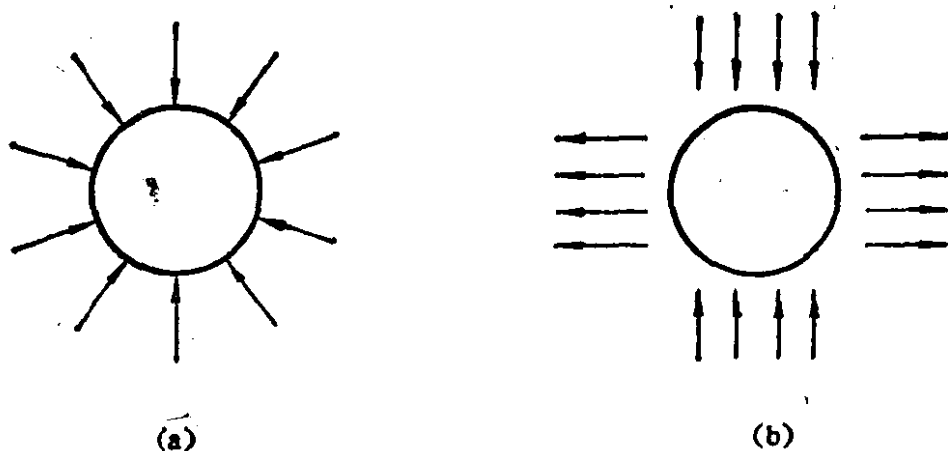


图 1.3.2 在流体中的一个球形微团的表面上的两种应力贡献

(a) 各向同性压缩;

(b) 在一个主轴方向上均匀拉伸, 同时在另一个主轴方向上均匀压缩

因为流体小球不能支撑上述变形表面力的作用, 所以式 (1.3.12) 中的三个分量必须为零流体才能处在静止的状态。由此得到,

$$\sigma'_{11} = \sigma'_{22} = \sigma'_{33} = \frac{1}{3} \sigma_{ii}$$

所以, 在静止流体中应力张量处处各向同性, 所有的正交轴均为主轴, 同时也只有法向应力的作用存在。

静止流体常常处在压缩状态, 所以将应力张量写成如下形式:

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} \quad (1.3.13)$$

式中 p 叫做流体的静压, 通常是位置 $\mathbf{R}$ 的函数。

于是, 静止流体中作用在一个平面元上的单位面积接触力为 $-pn$ (该平面元的单位法向矢量为 $\mathbf{n}$), 而且在给定的点上, 在所有方向上均有相同的值。这就是众所周知的静压性质——在所有的方向上, 静压的作用是一样的。

1.4 流体的力学平衡

对固体(刚体)来说, 当作用于其上的外力的合力和合力偶为零时, 则刚体处于平衡状态。对于流体, 平衡条件则没有那么简单, 因为流体中不同的微团可以相对运动, 所以流体的各部分都应

分别处在平衡状态。

正如上面所述，作用于任何一部分流体的力有体积力和表面力。如果流体静止，则这些力必须平衡。作用在体积 V 内的流体的总的体积力为

$$\int \rho \mathbf{F} dV$$

式中 ρ 与 $\mathbf{F}$ 可以是流体位置的函数。

此外，作用在包围体积 V 的 S 表面上的接触力（当流体静止时）为

$$-\int p \mathbf{n} ds$$

式中 p 也可以是位置的函数， $\mathbf{n}$ 为表面 S 的单位外法线矢量。利用散度定理将面积分化为体积分，得到流体平衡条件是

$$\int (\rho \mathbf{F} - \nabla p) dV = 0 \quad (1.4.1)$$

积分体积完全处在流体之中。上式成立的条件是作为 $\mathbf{R}$ 的连续函数的被积函数处处为零。于是，平衡的必要条件是流体各处均满足等式

$$\rho \mathbf{F} = \nabla p \quad (1.4.2)$$

如果在流体域 V 内，处处满足式(1.4.1)，那么各流体元上合力为零。进而，由对称应力张量可以确保作用在每个体积元上的力偶为零。所以，当式(1.4.2)满足时，任意形状和尺寸的体积 V 内的流体上合力偶为零。所以，方程(1.4.2)是流体平衡的充分必要条件。

1.5 流体运动的描述方法

在流体力学中描写运动的方法有两种，即拉格朗日方法和欧拉方法。

拉格朗日方法着眼于流体的质点。描述每个流体质点自始至终的运动过程，即它们的位置随时间的变化规律。知道流体中所有质点的运动规律以后，整个流体运动的情况也就清楚了。具体

描述方法如下:

设初始时刻 $t = t_0$ 时, 某流体质点的位置在 (a, b, c) 处。 (a, b, c) 可以是曲线坐标, 当然也可以是直角坐标 (x_0, y_0, z_0) 。不同的 a, b, c 组合代表不同的流体质点。流体质点的运动规律在数学上可以表示成

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(a, b, c, t) \quad (1.5.1)$$

其中 $\mathbf{r}$ 为流体质点的矢径。在直角坐标系中为

$$\left. \begin{aligned} x &= x(a, b, c, t), \\ y &= y(a, b, c, t), \\ z &= z(a, b, c, t) \end{aligned} \right\} \quad (1.5.2)$$

其中 a, b, c 与 t 称为拉格朗日变数。如果令 a, b, c 固定而改变 t , 则式(1.5.1)给出流体中某一质点的运动规律。如果令 t 固定而改变 a, b, c , 则得到同一时刻下流体质点的空间分布。应该指出, 在拉格朗日方法中, 矢径函数 $\mathbf{r}$ 乃是质点标号的函数而不是空间坐标的函数, 所以它的定义域不是场。

设式(1.5.1)所定义的函数具有二阶连续偏导数。速度和加速度是对于同一质点而言的单位时间内的位移变化率和速度变化率。设 $\mathbf{V}$ 和 $\dot{\mathbf{V}}$ 分别表示速度矢量和加速度矢量, 则

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{V} &= \frac{\partial \mathbf{r}(a, b, c, t)}{\partial t}, \\ \dot{\mathbf{V}} &= \frac{\partial^2 \mathbf{r}(a, b, c, t)}{\partial t^2} \end{aligned} \right\} \quad (1.5.3)$$

因为是对同一质点而言, a, b, c 不变, 所以取对时间的偏导数。在直角坐标系中, 速度和加速度的表达式是

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{\partial x(a, b, c, t)}{\partial t}, \\ v &= \frac{\partial y(a, b, c, t)}{\partial t}, \\ w &= \frac{\partial z(a, b, c, t)}{\partial t} \end{aligned} \right\} \quad (1.5.4)$$

和