应用数学丛书

矢量与张量分析

冯潮清　赵愉深　何浩法　编著

国防工業出版社

应用数学丛书

矢量与张量分析

冯潮清　赵愉深　何浩法　编著

国防工业出版社

内 容 简 介

本书从矢量和张量的概念出发，详细地阐述了场的基本概念和主要定理。内容分五章，分别讨论矢量代数、矢量微分和积分、场论、广义坐标系、张量分析，书中选了很多联系工程实际的例题，便于自学。

本书为工程技术人员、大学高年级学生、研究生和教师编写，也可以作为有关专业的教学参考书。

应用数学丛书

矢量与张量分析

冯潮清　赵愉深　何浩法　编著

*

国防工业出版社 出版

北京大学—激光汉字编辑照排系统排版

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

新时代出版社印刷厂印刷

*

850×1168　1/32 印张 65/8　183 千字

1986 年 12 月第一版　1986 年 12 月第一次印刷　印数：0，001—5，000 册

统一书号：15034・3047　　定价：1.50 元

应用数学丛书目录㊀

第一批目录

1. Z-变换与拉普拉斯变换　　关肇直，王恩平，编著
2. 常微分方程及其应用　　秦化淑，林正国　编著
3. 实变函数论基础　　胡钦训　编著
4. 正交函数及其应用　　柳重堪　编著
5. 沃尔什函数与沃尔什变换　　关肇直，陈文德　编著
6. 圆柱函数　　刘颖　编著

第二批目录

7. 集合论　　程极泰　编著
8. 图论　　王朝瑞　编著
9. 概率论　　狄昂照　编著
10. 矩阵理论　　王耕禄，史荣昌　编著
11. 复变函数论　　杨维奇　编著
12. 逼近论　　徐利治，周蕴时，孙玉柏　编著
13. 矢量与张量分析　　冯潮清，赵愉深，何浩法　编著
14. 模糊数学　　汪培庄，刘锡荟　编著
15. 编码理论　　肖国镇　编著
16. 应用泛函分析　　柳重堪　编著

㊀这是第一、二批的目录，以后将陆续分批刊登。

出版说明

近二十年来电子工程、控制工程、系统工程及其它领域都获得巨大发展。众所周知，这些科学技术领域的发展是与现代逐渐形成的应用数学学科紧密相关，相辅相成。尤其近年发展起来的边缘学科，更是与数学紧密结合。但一般数学专著比较偏重于论证严谨，全面系统，篇幅较大，理论较深。广大科技工作者学习此类著作，往往需时较多，与工作结合不紧，收效不大。本丛书将为目前在电子工程、控制工程、系统工程等领域工作的同志在数学基础的提高上，提供适合其工作特点的数学参考书。

本丛书是一种介于现代应用数学专著与工程专业理论书籍之间的桥梁参考著作。更着重于科技工作中应用较多的数学概念，分析和解题的基本技巧。也包括一部分适合于实际工作者为学习更高深的现代应用数学专著所需之基础知识。

本丛书选材包括三个方面：基础数学，应用数学有关领域的基础介绍，应用于科技中的典型基础专业理论。出版采用分册形式，各册内容独立，自成体系，但仍有少量交叉，分期分批出版。

丛书可供大专院校有关专业研究生、教师、从事科研生产的工程师参考。

前　言

在近来的二十多年中，矢量和张量分析已经成为现代科学技术中不可缺少的一种数学工具，每个工程技术人员都应该熟练地学握。全书内容分两部分共五章，第一部论述矢量分析与场论；第二部分是张量分析。在第一部分里，我们首先扼要地介绍矢量代数的基本运算规律，然后用较多的篇幅对场论进行了深入的论述，最后从矢量分析的角度出发，全面地介绍了广义坐标系的基本理论并着重讨论了实际应用的三维正交坐标系。在第二部分里，张量的概念是作为矢量的推广而引入，从而使前后两部分有机地结合起来。本章重点介绍张量代数和绝对微分的运算方法。全书各部分都是从基本原理出发，深入浅出地论述了各种重要的基本概念和分析方法，例举了大量有关电磁场理论的例题，突出了在工程实际中的应用。

本书的第一、二两章由冯潮清编写，第三、四两章由赵愉深编写，第五章由何浩法编写，全书由冯潮清审阅。

由于我们的水平所限，书中的缺点和错误在所难免，诚恳希望读者批评指正。

目　录

第一章　矢量代数

在这一章里，我们要介绍矢量的代数运算。这些知识假定读者早已知道，在这里不讲细节，只讲与以后讨论矢量和张量分析有关的材料。

在各门科学中所遇到的量，可以分为两类：一类完全由数值决定，例如面积、温度、时间、质量等，这一类量称为标量；另一类量，只知道数值的大小还不够，还需说明它的方向，例如力、速度、加速度等，这一类量称为矢量（或向量）。仅表示矢量大小的数值称为矢量的模。如果抽去矢量的具体性质，矢量可以用一条有向线段表示，使它的正方指向矢量的方向，它的长度等于矢量的模。表示矢量的记号是用一个上面带着箭头的拉丁字母如 $\vec{a}$、$\vec{b}$ …，或用黑体字母 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、…来表示。有时为了表示出它的起点和终点，便用 $\boldsymbol{OM}$，$\boldsymbol{AB}$…，其第一个字母表示矢量的起点，第二个字母表示矢量的终点。矢量 $\boldsymbol{a}$ 的模用 $|\boldsymbol{a}|$ 表示。

本书所讲的矢量均指自由矢量，就是当两个矢量的方向相同，模相等时，就认为它们是相等的。因此，一个矢量经过平移后仍旧是原来的矢量。

§1.1　矢量的加、减法

一、加法

设有几个矢量，例如四个矢量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 和 $\boldsymbol{d}$。任取一点 O，作矢量 $\boldsymbol{a}$，由它的终点 A 作矢量 $\boldsymbol{b}$，再由矢量 $\boldsymbol{b}$ 的终点 B 作矢量 $\boldsymbol{c}$，余类推（图 1—1），这样直至取尽所有的矢量为止。结果就得到折线 $OABCD$，该折线的封闭线 OD 就称为所给矢量之和，记作 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}$。

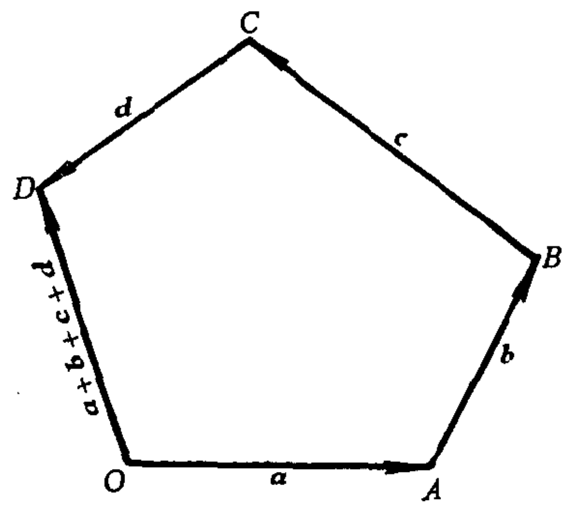

图 1—1

特别是，两个矢量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的和 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$（图 1—2）是以 $\boldsymbol{a}$ 的起点 O 为起点，以 $\boldsymbol{b}$ 的终点 B 为终点所构成的矢量 $\boldsymbol{OB}$。

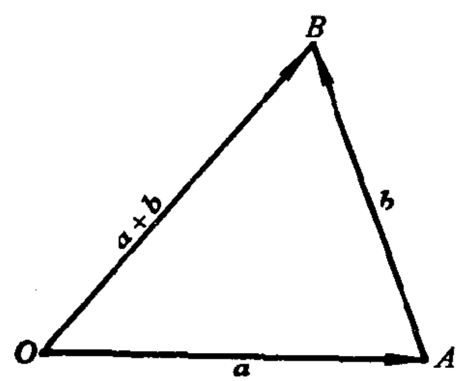

图 1—2

由图 1—3 和图 1—4 可知，矢量和具有加法的交换律和结合律。即

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$$

和

$$\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}$$

二、减法

矢量的减法定义为加法的逆运算，如果矢量 $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{M}=\boldsymbol{a}$ 则称矢量 $\boldsymbol{M}$ 为矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 之差，记作 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$。即

$$\boldsymbol{M}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$$

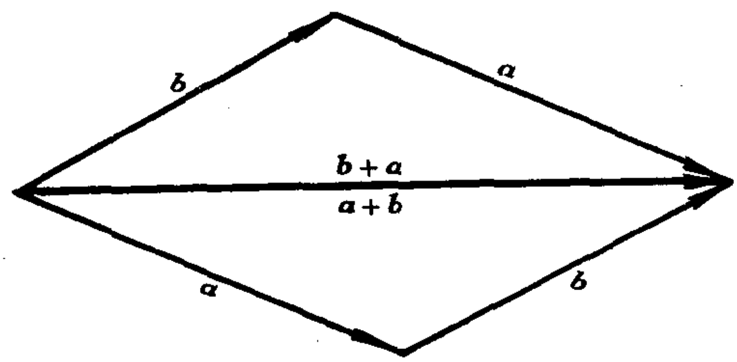

图 1—3

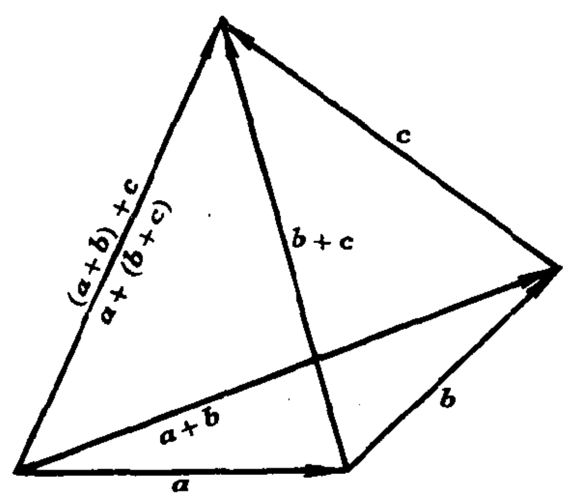

图 1—4

求矢量 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 的几何方法如下：

由矢量 $\boldsymbol{a}$ 的终点作一矢量 $\boldsymbol{c}$，让 $\boldsymbol{c}$ 与矢量 $\boldsymbol{b}$ 的大小相等，方向相反，则以矢量 $\boldsymbol{a}$ 的起点为起点，以矢量 $\boldsymbol{c}$ 的终点为终点的矢量 $\boldsymbol{M}$（图 1—5），它满足关系式：

$$\boldsymbol{b}+\boldsymbol{M}=\boldsymbol{a}$$

故矢量 $\boldsymbol{M}$ 是 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 之差。

与矢量 $\boldsymbol{N}$ 大小相等方向相反的矢量，称与 $\boldsymbol{N}$ 相逆的矢量，记作 $-\boldsymbol{N}$。由图 1—5 可知矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 之差 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，也就是 $\boldsymbol{a}$ 与 $-\boldsymbol{b}$ 之和。即

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$$

为方便起见，我们把模为零的特殊矢量，称为零矢量，记作 $\boldsymbol{0}$，或简记 0，零矢量的方向是任意的。对于任意一个矢量 $\boldsymbol{a}$ 均有

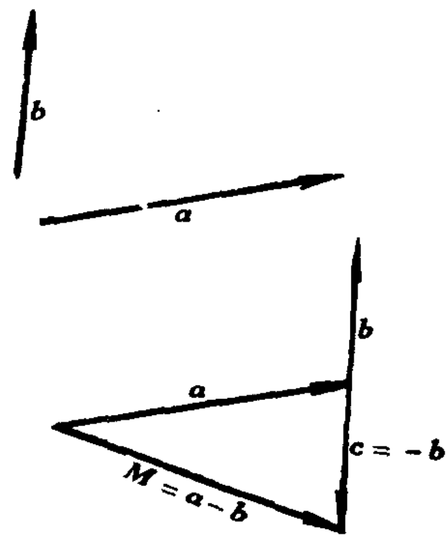

图 1—5

$$\boldsymbol{a} - \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$$

§1.2 数量与矢量的乘积

若有一个数量 m 和一个矢量 $\boldsymbol{a}$，所谓数量 m 和矢量 $\boldsymbol{a}$ 的乘积 $m\boldsymbol{a}$（或 $\boldsymbol{a}m$），是一个矢量。它的模等于 $|m||\boldsymbol{a}|$；它的方向，当 $m > 0$ 时方向与 $\boldsymbol{a}$ 相同，$m < 0$ 时方向与 $\boldsymbol{a}$ 相反，$m = 0$ 时模为零，是个零矢量，方向是任意的。

位于平行线上的矢量，称为共线矢量。设 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 是两个非零矢量，如果两矢量共线，则它们具有相同或相反的方向，由数量与矢量乘积的定义知，两矢量间存在关系式：

$$\boldsymbol{b} = m\boldsymbol{a}$$

反之，若两矢量具有关系式 $\boldsymbol{b} = m\boldsymbol{a}$，则矢量 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 具有相同或相反的方向，因此矢量 $\boldsymbol{b}$ 与矢量 $\boldsymbol{a}$ 共线。

根据以上的讨论可知，对于任何两个非零矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$，它们共线的充要条件是：存在一个不等于零的数量 m 使等式 $\boldsymbol{b} = m\boldsymbol{a}$ 成立。

模为 1 的矢量，称为单位矢量。矢量 $\boldsymbol{a}$ 的单位矢量是方向与 $\boldsymbol{a}$ 相同，且模为 1 的矢量，记作 $\boldsymbol{a}^0$。显然，任何矢量 $\boldsymbol{a}$ 均可写成

$$\boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}^0 \qquad (1\text{—}1)$$

上面的式子把矢量 $\boldsymbol{a}$ 分成两部分，分别表示该矢量的模 $|\boldsymbol{a}|$ 和它的方向 $\boldsymbol{a}^0$。

§1.3 矢量的投影

在解析几何中，已经讲过线段在轴上投影的基本原理，现在我们来讨论矢量在轴上投影的基本定理，这些定理容易由解析几何中有关投影的定理得到，这里将不加证明地叙述其主要内容。

定义 设有一矢量 $\boldsymbol{a}$ 及一轴 l，过矢量 $\boldsymbol{a}$ 的起点 A 和终点 B 分别作平面 P、Q 垂直于轴 l，且交轴于 A' 和 B'（图 1—6），我们称轴 l 上的有向线段 $\overline{A'B'}$ 的值（记作 $A'B'$）为矢量 $\boldsymbol{a}$ 在轴 l 上的投

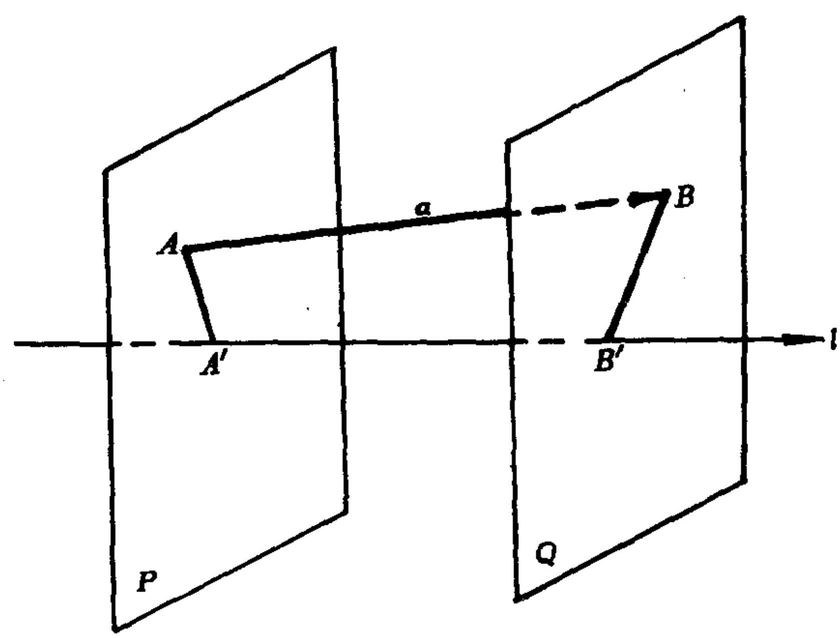

图 1—6

影，记作 $\mathrm{prj}_l\boldsymbol{a}$，即

$$\mathrm{prj}_l\boldsymbol{a} = A'B'$$

关于矢量的投影有下面的基本定理

（1）矢量 $\boldsymbol{a}$ 在轴 l 上的投影等于矢量 $\boldsymbol{a}$ 的模与矢量 $\boldsymbol{a}$ 及轴 l 间夹角 φ 的余弦的积。即

$$\mathrm{prj}_l\boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}|\cos\varphi \tag{1—2}$$

（2）矢量和在任何轴上的投影等于各项矢量在同轴上的投影之和。即

$$\mathrm{prj}_l(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d})$$
$$=\mathrm{prj}_l\boldsymbol{a}+\mathrm{prj}_l\boldsymbol{b}+\mathrm{prj}_l\boldsymbol{c}+\mathrm{prj}_l\boldsymbol{d} \qquad (1-3)$$

设矢量 $\boldsymbol{OM}$ 的起点是坐标原点 O，而终点 M 的坐标是 (x, y, z)，如图 1—7 所示，由矢量的加法得

$$\boldsymbol{OM}=\boldsymbol{OP}+\boldsymbol{PM}$$

而

$$\boldsymbol{OP}=\boldsymbol{OA}+\boldsymbol{AP}$$

因 $\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{OB}$，$\boldsymbol{PM}=\boldsymbol{OC}$ 所以

$$\boldsymbol{OM}=\boldsymbol{OA}+\boldsymbol{OB}+\boldsymbol{OC}$$

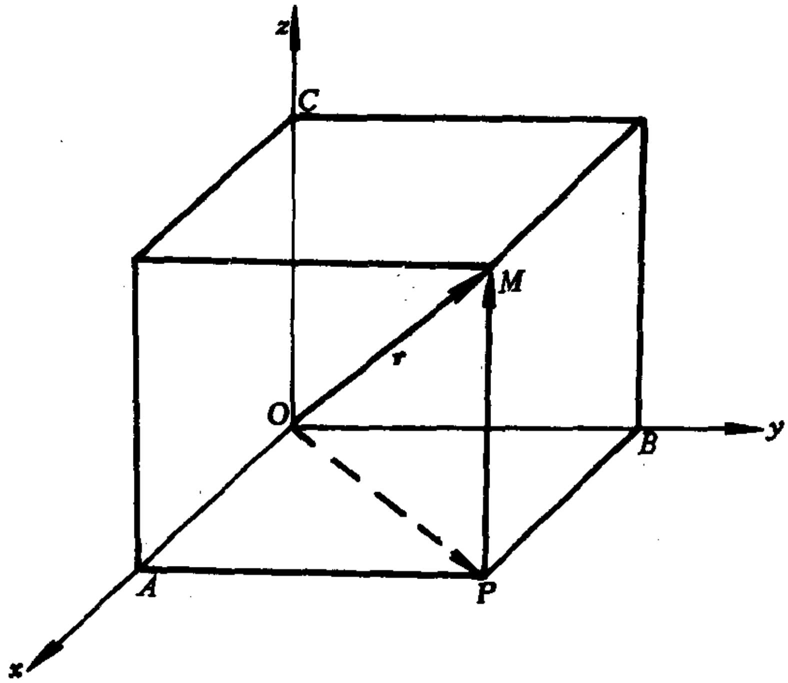

图 1—7

矢量 $\boldsymbol{OA}$、$\boldsymbol{OB}$ 和 $\boldsymbol{OC}$ 称为矢量 $\boldsymbol{OM}$ 在坐标轴上的分矢量。点 M 的坐标 $x=OA$，$y=OB$，$z=OC$，因此 OA，OB，OC 正是矢量 $\boldsymbol{OM}$ 在坐标轴上的投影。我们在坐标轴的正向作单位矢量，以 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$ 表之，这样引进的三个两两互相垂直的单位矢量，称为基本单位矢量，于是

$$\boldsymbol{OA}=x\boldsymbol{i}, \qquad \boldsymbol{OB}=y\boldsymbol{j}, \qquad \boldsymbol{OC}=z\boldsymbol{k}$$

所以

$$\boldsymbol{OM}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k} \qquad (1-4)$$

式中 x, y, z 是矢量 OM 在坐标轴上的投影，在矢量的起点为坐标原点的情况下，x,y,z 也正好是矢量终点 M 的坐标。

上面公式，不但对于由原点出发的矢量是成立的，并且对于以空间任一点作起点的矢量也是成立。

$$\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k} \tag{1—5}$$

其中 a_x, a_y, a_z 是矢量 a 在坐标轴上的投影。这个表示式称为矢量 a 的投影式，简记为 $\boldsymbol{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$。

矢量的投影表示式在矢量理论中有特别重要的意义，依靠它建立起矢量理论的两部分，即几何的和代数的两部分之间的联系。

设已知两个矢量

$$\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}$$

与

$$\boldsymbol{b} = b_x\boldsymbol{i} + b_y\boldsymbol{j} + b_z\boldsymbol{k}$$

由投影的基本定理可得

$$(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})_x = a_x + b_x, \qquad (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})_y = a_y + b_y$$
$$(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})_z = a_z + b_z$$

由此

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = (a_x + b_x)i + (a_y + b_y)\boldsymbol{j} + (a_z + b_z)\boldsymbol{k} \tag{1—6}$$

也就是已知矢量的投影，在几何相加矢量时，必须将同名的投影分别相加，这样一个几何和归结为三个代数和。

仿之，几何差可以写为

$$\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = (a_x - b_x)\boldsymbol{i} + (a_y - b_y)\boldsymbol{j} + (a_z - b_z)\boldsymbol{k} \tag{1—7}$$

数量乘矢量可以写为

$$m\boldsymbol{a} = ma_x\boldsymbol{i} + ma_y\boldsymbol{j} + ma_z\boldsymbol{k} \tag{1—8}$$

联结坐标原点与点 M $(x、y、z)$ 的矢量 $\boldsymbol{r}$ 称为点 M 的矢径（图1—7），由图可知

$$OA = x \qquad OB = y \qquad OC = z$$

或

$$r_x = x \qquad r_y = y \qquad r_z = z$$

这时 $\boldsymbol{r}$ 可表示为

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k} \tag{1—9}$$

且其模是

$$|\boldsymbol{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

§1.4 两矢量的标量积

一、定义

两个矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的模和它们间夹角 φ 的余弦的乘积，称为两矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的标量积，记作 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$。即

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\varphi \tag{1—10}$$

由定义得

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{a}|\cos 0=|\boldsymbol{a}|^2$$

如果 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}^2$ 则上式可写成

$$\boldsymbol{a}^2=|\boldsymbol{a}|^2$$

二、标量积的基本性质

1. 非零矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 互相垂直的充要条件是

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$$

因为当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 互相垂直时，$\cos(\boldsymbol{a}\overset{\wedge}{,}\boldsymbol{b})=0$ 从而

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\boldsymbol{a}\overset{\wedge}{,}\boldsymbol{b})=0$$

反之，如果 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，并且 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 皆不为零矢量，则有

$$\cos(\boldsymbol{a}\overset{\wedge}{,}\boldsymbol{b})=0$$

所以 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 互相垂直。

2. 由标量积的定义可知，标量积满足交换律，即

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$$

3. 标量积满足分配律，即

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$$

事实上，由标量积的定义有

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}&=|\boldsymbol{c}||\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\cos(\boldsymbol{c}\overset{\wedge}{,}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\\&=|\boldsymbol{c}|\mathrm{prj}_c(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\end{aligned}$$

再由投影定理知

$$\mathrm{prj}_c(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\mathrm{prj}_c\boldsymbol{a}+\mathrm{prj}_c\boldsymbol{b}$$

所以

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}&=|\boldsymbol{c}|\mathrm{prj}_c(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\\&=|\boldsymbol{c}|\mathrm{prj}_c\boldsymbol{a}+|\boldsymbol{c}|\mathrm{prj}_c\boldsymbol{b}\\&=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}\end{aligned}$$

4. 由标量积的定义易知，标量积与标量的乘积满足结合律，

即

$$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})m=\boldsymbol{a}\cdot(m\boldsymbol{b})=m\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$$

三、标量积的投影表示法

设有两个矢量 $\boldsymbol{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$，$\boldsymbol{b}=\{b_x,b_y,b_z\}$ 由上面所述标量积的基本性质得到

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}&=(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})\cdot(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})\\&=a_x\boldsymbol{i}\cdot(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})+a_y\boldsymbol{j}\cdot(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})\\&\quad+a_z\boldsymbol{k}\cdot(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})\\&=a_xb_x\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}+a_xb_y\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}+a_xb_z\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k}+a_yb_x\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i}\\&\quad+a_yb_y\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}+a_yb_z\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}+a_zb_x\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}+a_zb_y\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{j}+a_zb_z\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

由于 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 是互相垂直的单位矢量，故有

$$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=0,\qquad\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}=0,\qquad\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}=0$$

和

$$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}=1,\qquad\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}=1,\qquad\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}=1$$

最后得到

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z \tag{1—11}$$

这就是说，两个矢量的标量积等于它们在坐标轴上同名投影的乘积的代数和。

特别是 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}$ 时得到

$$\boldsymbol{a}^2=|\boldsymbol{a}|^2=a_x^2+a_y^2+a_z^2$$

所以

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2} \tag{1—12}$$

四、两矢量间的夹角

设两矢量 $\boldsymbol{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$ 和 $\boldsymbol{b}=\{b_x,b_y,b_z\}$ 之间的夹角为 φ，由式(1—10)得

$$\cos\varphi=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|} \tag{1—13}$$

由两矢量标量积和矢量的模的投影表示式得到

$$\cos\varphi=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}} \tag{1—13'}$$

§1.5 两矢量的矢量积

一、定义

矢量 $\boldsymbol{a}$ 与矢量 $\boldsymbol{b}$ 的矢量积是这样的一个矢量 $\boldsymbol{c}$：