数学物理方程习题集

〔苏〕 B·C·符拉基米洛夫等著

张俊智　译

中国农业机械出版社

这本习题集是为提高大学数学系、物理系和工程系学生的数学修养而编写的。

除古典的边值问题外，在这本习题集里包括了大量的仅有广义解的边值问题。研究这些问题要求吸收现代分析各不同领域的成果和方法。因此习题集里包括了勒贝格积分理论问题、函数空间、特别是广义可微函数空间、广义函数，同时还包括了傅里叶变换和拉普拉斯变换以及积分方程。

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО
УРАВНЕНИЯМ
МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Под редакцией В.С.Владимирова

ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ 1982

МОСКВА «НАУКА»

数学物理方程习题集

〔苏〕B·C·符拉基米洛夫等著

张枚智 译

*

中国农业机械出版社出版（北京阜成门外百万庄南街一号）
（北京市书刊出版业营业许可证出字第117号）
机械工业出版社印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行·新华书店经售

*

开本 787×1092 $1/32$·印张$13^5/8$·字数 298 千字
1986年12月北京第一版·1986年12月北京第一次印刷
印数 0,001—5,000·定价 3.45 元

*

统一书号：7216·277

第 一 版 序

现代数学方法广泛地渗透到理论物理和数学物理之中，于是要求修改传统的《数学物理方程》教程。像数学物理边值问题的解这样基本概念，便首当其冲。广义解概念大大地扩展了研究问题的范围，它可以撇开古典求解的方法，只用统一的观点就能研究最关心的问题，于是在莫斯科物理工程学院高等数学教研室创立了新的教科书：В·С·沃拉基米洛娃著《数学物理方程》和В·С·米哈依洛娃著《偏微分方程》。

这本《数学物理方程习题集》即是以这些教材为基础的而实质上又是它们的补充。除古典的边值问题外在这本习题集里包括了大量的仅有广义解的边值问题。研究这些问题要求吸收现代分析各不同领域的成果和方法。因此习题集里包括了勒贝格积分理论问题、泛函空间、特别是广义可微函数空间、广义函数，同时还包括了付里叶变换和拉普斯变换以及积分方程。

这习题集是为提高大学数学系、物理系和工程系学生的数学修养而编写的。

作者　1974 年

第二版序

第二版习题集与第一版相比有些非本质的区别：尽量保持原习题集的结构，删去或增加了少量的题，把许多问题的措词和答案说得更确切些，修改了不准确和印刷错误的字句。遇有题号改变时，便在括号里记上第一版相应的号码，新题记上记号(H)；增加难度的题打上星号。

作者深深地感谢莫斯科物理工程学院高等数学教研室全体教师提出的建议，协助我们改进和补充了这个习题集。作者尤其感谢 T·Ф·沃勒柯娃，Ю·H·德楼日依诺娃，A·Ф·尼基夫洛娃，B·И·切何楼娃。

作者　1981 年 3 月

主要的记号和定义

1. $x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, $y=(y_1, y_2, \cdots, y_n)$, ξ，…，是 n 维实欧氏空间 R^n 内的点。

2. $dx=dx_1dx_2\cdots dx_n$,

$$\int f(x)dx=\int_{R^n} f(x_1, \cdots, x_n)dx_1\cdots dx_n$$

3. $\alpha=(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ 是重指标（$\alpha_j\geqslant 0$ 是整数）；

$\alpha!=\alpha_1!\alpha_2!\cdots\alpha_n!$, $x^\alpha=x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\cdots x_n^{\alpha_n}$

4. $(x, y)=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n$;

$r=|x|=\sqrt{(x, x)}=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}$

5. $U(x_0; R)=\{x:|x-x_0|<R\}$是球心在点 x_0 半径为 R 的开球；$S(x_0; R)=\{x:|x-x_0|=R\}$ 是球面 $U_R=U(0; R)$，$S_R=S(0, R)$。

6. 如果集合 A 有界并且 $\bar{A}\subset G$，则 A 称为严格地置于区域 $G\subset R^n$ 内并写成 $A\Subset G$。

7. 如果函数 $f(x)$在每个子区域 $G'\Subset G$ 绝对可积则称 $f(x)$在区域 G 局部可积。在 R^n 局部可积的函数称为局部可积函数。

8. $$D^\alpha f(x)=\frac{\partial^{|\alpha|}f(x_1, x_2, \cdots, x_n)}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}$$

9. $C^p(G)$表示函数类，这函数类里的函数 f 连同其导数$D^\alpha f$，$|\alpha|\leqslant p$（$0\leqslant p<\infty$）在区域 $G\subset R^n$ 连续。自然若函数 $f\in C^p(G)$ 及其导数 $D^\alpha f$，$|\alpha|\leqslant p$，其连续性可

以延长到闭域 $\bar{G}$，则构成函数类 $C^p(\bar{G})$；显然有 $C(G)=C^0(G)$，$C(\bar{G})=C^0(\bar{G})$；对于函数 $f\in C^p(G)$ 当 p 为全体自然数时构成函数类 $C^\infty(G)$。

10. 在集 A 函数序列 $\{f_k\}$ 一致收敛到函数 f 记作

$$f_k(x)\overset{x\in A}{\rightrightarrows} f(x),\quad k\longrightarrow\infty$$

11. $A\cup B$ 是集 A 和 B 的并；$A\cap B$ 是 A 和 B 的交集。$A\times B$ 是 A 和 B 的直接积（对集 $(a,\ b)(a\in A,\ b\in B)$）；$A\setminus B$ 是 B 在 A 中的余集。

12. $f(x)\neq 0$ 的点 x 的全体构成的点集的闭包称为连续函数 $f(x)$ 的支集。函数 f 的支集记作 supp f。如果在区域 G 上可测函数 $f(x)$ 在 G/G' 几乎处处变成零，这里 $G'\Subset G$，那末 f 称为在 G 是有限的函数，在 R^n 有限的函数称为有限的。

13. $\triangle=\dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial x_2^2}+\cdots+\dfrac{\partial^2}{\partial x_n^2}$ 是拉普拉斯算子；

$\square_a=\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}-a^2\triangle$ 是波动算子；$\square_1=\square$；

$\dfrac{\partial}{\partial t}-a^2\triangle$ 是热传导算子。

14. $\Gamma^+=\{x,\ t:at>|x|\}$ 是未来的锥面。

15. $\Phi(\xi)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{\xi}e^{-z^2/2}dz$

16. $\omega_\varepsilon(x)=\begin{cases}C_\varepsilon e^{-\varepsilon^2/(\varepsilon^2-|x|^2)}, & |x|\leqslant\varepsilon；\text{这里 } C_\varepsilon=\varepsilon^{-n}\kappa \\ & \dfrac{1}{\kappa}=\displaystyle\int_0^1 e^{-1/(1-x^2)}dx \\ 0, & |x|>\varepsilon\end{cases}$

（ω_ε 是《球冠》的均值核）。

17. $\mathbb{C}$是复变量的平面。

18. $\theta(x)$是赫维赛德函数：$\theta(x)=\begin{cases}1, & x\geqslant 0\\ 0, & x<0\end{cases}$

19. $\sigma_n=\int_{S_1}\mathrm{d}s=\dfrac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}$ 是单位球面 S_1 在 R^n 的曲面面积。

20. 在 $C^p(\bar{G})$里引进模数

$$\|f\|_{C^p(\bar{G})}=\sum_{|\alpha|\leqslant p}\max_{x\in\bar{G}}|D^\alpha f(x)|$$

21. 对于这种$|f|^p$在G可积的函数$f(x)$的集合（可测的）通过 $L_p(G)$标出。引入在 $L_p(G)$里的范数：

$$\|f\|_{L^p(G)}=\left[\int_G|f|^p\mathrm{d}x\right]^{1/p},\quad 1\leqslant p<\infty,$$

$$\|f\|_{L^\infty(G)}=\operatorname*{vrai\,sup}_{x\in G}|f(x)|,\quad p=\infty$$

在 $L_2(G)$引入数量乘积

$$(f,\ g)=\int_G f\bar{g}\,\mathrm{d}x,\quad f,\ g\in L_2(G)$$

22. 假设$\rho(x)$是在区域G内连续的正函数，对于这种$\rho(x)|f(x)|^2$在G可积的函数，函数$f(x)$的集合(可测的）通过 $L_{2,\rho}(G)$标出。$L_{2,\rho}(G)$是带数量乘积

$$(f,\ g)_{L_{2,\rho}(G)}=\int_G\rho f\bar{g}\,\mathrm{d}x$$

的希尔伯特空间。

23. 圆柱函数

X

а) 贝塞尔函数

$$J_v(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\Gamma(k+\nu+1)\Gamma(k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+v},$$

$-\infty<x<\infty$

б) 牛曼函数

$$N_v^{(1)}(x)=\frac{1}{\sin\pi v}[J_v(x)\cos\pi v-J_{-v}(x)],\quad v\neq n,$$

$$N_n(x)=\frac{1}{\pi}\left[\frac{\partial J_v(x)}{\partial v}-(-1)^n\frac{\partial J_{-v}(x)}{\partial v}\right],\quad v=n$$

в) 汉克尔函数

$$H_v^{(1)}(x)=J_v(x)+iN_v(x),$$

$$H_v^{(2)}(x)=J_v(x)-iN_v(x)$$

г) 虚自变量的函数

$$I_v(x)=e^{-\frac{\pi}{2}vi}J_v(ix),\quad K_v(x)=\frac{\pi i}{2}e^{\frac{\pi}{2}vi}H_v^{(1)}(ix)$$

目　录

第一章　数学物理边值问题的提法

§1　方程的推导和边值问题的提法

约定下列记号：

$\rho(x)=\rho$　是密度（线的、面的、体的）。

T_0　是弦、膜的张力。

E　是杨氏模量。

k　是弦、杆端点或者膜边弹性固定时的弹性系数。

S　是杆、轴等等横截面面积。

$\gamma=c_p/c_v$　是绝热曲线指数。

p、p_0　是气体、液体压力。

m、$m_?$　是质量。

g　是重力加速度。

ω　是角速度。

k、$k(x)$、$k(x, u)$　是内热传导系数。

α　是外热传导系数（热交换系数）。

D　是扩散系数。

我们举几个建立方程的实例。

例 1　弦的横振动问题，长为 l 的细弦，由于张力 T_0 而处于直线平衡状态。在 $t=0$ 的时刻初始偏离和初始速度传给弦上各点。为了确定 $t>0$ 时弦上各点的微小横振动提出问题，假定弦的端点：

a）刚性固定；

6）自由，即能沿平行于偏离 u 的直线方向移动；

в）弹性固定，即在每一端点受到与偏离成比例方向与偏离方向相反的阻力；

г）按给定的规律在横向移动。

介质阻力和重力忽略不计。

解答 假设 x 轴与弦在平衡状态时的方向完全一样。弦理想化为不抗弯，不伸长的细线。这意味着，如果想象在点 x 处把弦截断，那末弦的一部分对另一部分的作用力（拉力 T_x），将沿弦上点 x 处的切线方向。为了导出振动方程把弦由 x 截割到 $x+\Delta x$，把作用在这部分的力（包括惯性力）投影到坐标轴上，根据达朗贝尔原理所有力的投影应当等于零。我们只研究横振动。因此应当计算顺着轴 u 方向的外力和惯性力。注意这里研究的是弦的微小振动。这就是说在推导方程过程中，我们将忽略掉 $u_x(x,\ t)$的平方项。弧 AB 的长 S 用积分

$$S=\int_{x}^{x+\Delta x}\sqrt{1+u_x^2}\,dx\cong\Delta x$$

来表示。这意味着弦的部分在振动过程中不发生伸长，就是说根据虎克定律拉力的数值 $T_0=|T|$既不依赖于时间也不依赖于 x。求所有力在 t 时刻在 u 轴上的投影，拉力的投影值精确到与一阶无穷小相等（图 1）：

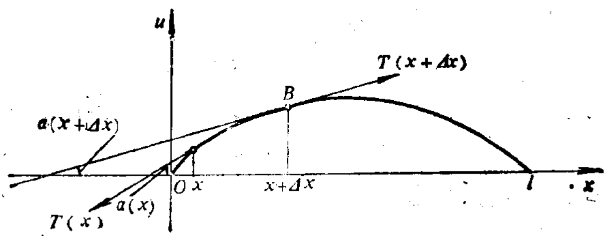


图 1

$$T_0[\sin\alpha(x+\Delta x-\sin\alpha(x)]$$

$$=T_0\left[\frac{\operatorname{tg}\alpha(x+\Delta x)}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x(x+\Delta x)}}-\frac{\operatorname{tg}\alpha(x)}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha(x)}}\right]$$

$$=T_0\left[\frac{u_x(x+\Delta x\quad t)}{\sqrt{1+u_x^2(x+\Delta x,t)}}-\frac{u_x(x,\ t)}{\sqrt{1+u_x^2(x,\ t)}}\right]$$

$$\cong T_0[u_x(x+\Delta x,\ t)-u_x(x,\ t)]$$

$$\cong T_0 u_{xx}(x,\ t)\Delta x$$

假设 $p(x,\ t)$是连续线性外力密度。那么 AB 部分沿 u 轴的作用力为 $p(x,\ t)\Delta x$。为了求得 AB 部分的惯性力我们利用 $-mu_{tt}$ 来表示，这里 m 是 AB 部分的质量。如果 $\rho(x)$ 是弦的连续线密度，那末 $m=\rho\Delta x$。这样一来惯性力在轴 u 的投影表示成 $\rho u_{tt}\Delta x$，而所有力在轴 u 的投影具有形式

$$[T_0u_{xx}+p(x,\ t)-\rho(x)u_{tt}]\Delta x=0 \tag{1}$$

因此，

$$T_0u_{xx}-\rho(x)u_{tt}+p(x,\ t)=0$$

这是弦的强迫振动方程。如果 $\rho\equiv$常数，那末方程具有形式

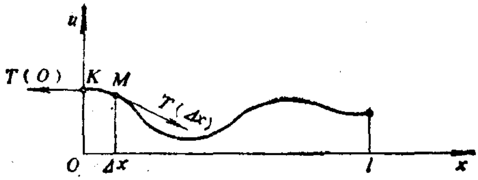
$$u_{tt}=a^2u_{xx}+g(x,\ t)$$

这里 $a^2=T_0/\rho$，$g(x,\ t)=p(x,t)/\rho$。此外，函数 $u(x,\ t)$ 满足初始条件 $u|_{t=0}=\varphi(x)$，$u_t|_{t=0}=\psi(x)$，这里 $\varphi(x)$，$\psi(x)$是已知的函数。

导出边界条件：

a）如果弦的两端刚性固定， 那 末 $u|_{x=0}=0$， $u|_{x=l}=0$。

б）如果末端自由为了得到当 $x=0$ 时作用在KM 部分(图 2)沿轴 u 起作用的力。因为在点 $x=0$ 处张力的作用线平行于 x 轴，则张力在 KM 部分投影等于 $T_0u_x(\Delta x,\ t)$。



图

外力投影等于 $p(0,\ t)\Delta x$，而惯性力投影等于 $-\rho u_{tt}(0,\ t)\Delta x$。使他们的总和为零，得到

$$T_0 u_x(\Delta x,\ t) + p(0,\ t)\Delta x - \rho u_{tt}(0,\ t)\Delta x = 0 \tag{2}$$

让 Δx 趋于零。这时由于这里的函数连续有界得到条件 $u_x|_{x=0} = 0$。类似地得到右端点的条件 $u_x|_{x=l} = 0$。

в）若左端点作用有弹性力记作 $-ku(0,t)$。如果作用在 KM 部分的所有力在轴 u 的投影等于零。方程（2）的左边部分还要加上一项 $-ku(0,\ t)$。这时有

$$T_0 u_x(\Delta x,\ t) - ku(0,\ t) + p(0,\ t)\Delta x - \rho u_{tt}(0,t)\Delta x = 0$$

而当 $\Delta x \to 0$ 时得到

$$(u_x - hu)|_{x=0} = 0,\quad h = k/T_0$$

在右端（图 3）所有力的投影具有形式

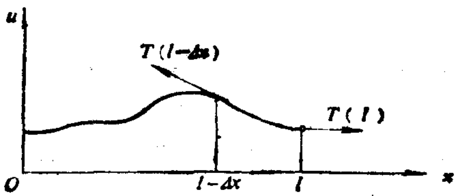


图 3

$-T_0 u_x(l-\Delta x, t) - hu(l, t) + p(l, t)\Delta x$
$-\rho u_{tt}(l, t)\Delta x = 0$，

因为 $\sin\alpha(l-\Delta x) \cong u_x|_{x=l-\Delta x}$。当 $\Delta x \to 0$ 时得到

$$(u_x + hu)|_{x=l} = 0。$$

г） $u|_{x=0} = \mu_1(t)$，$u|_{x=l} = \mu_2(t)$，这里函数 $\mu_1(t)$，$\mu_2(t)$ 是由端点处运动规律所确定的（$\mu_1(0) = \varphi(0)$，$\mu_2(0) = \varphi(l)$）。

例 2 杆的振动问题。长为 l 的弹性直杆，在 $t = 0$ 的时刻其横截面摆脱静止状态以微小的纵向位移和速度传开。假设在运动的任何时候始终垂直于杆轴的平行平面，为了确定当 $t > 0$ 时杆的微小纵振动提出问题，研究杆端为下列几种情况：

a）刚性固定；

б）按给定的规律在纵向移动；

в）自由；

г）弹性固定，即每一杆端受到与位移成比例，与位移方向相反的纵向力。

解答 假设轴 x 与杆轴方向一致（图 4），假定 x 是杆处于静止状态时与截面 pq 的交点坐标。我们研究杆的微小纵振动。要知道，应当计算顺杆轴方向的外力和惯性力。用 $u(x, t)$ 记作 t 时刻截面的位移，那么在小范围内我们可以假设在点 $x+\Delta x$ 处截面位移是

$$u(x+\Delta x, t) \cong u(x, t) + u_x(x, t)\Delta x$$

因此在截面 x 处杆的相对伸长等于 $u_x(x, t)$。根据虎克定律在这个截面上的张力等于 $T = ESu_x(x, t)$，这里 S 是横截面面积，E 是杆材料的弹性系数。如果使包括作用在 pq，p_1q 部分的惯性力在内的所有力的和等于零，则得到

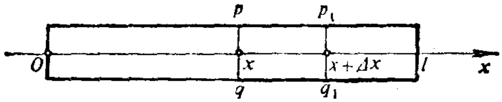


图 4

杆的纵振动方程。张力的合力等于

$$T(x+\Delta x)-T(x)=ES[u_x(x+\Delta x,\ t)-u_x(x,\ t)]$$
$$\cong ESu_{xx}(x,\ t)\Delta x$$

假设 $p(x,\ t)$ 是外力的体密度。这样作用在 pq，p_1q_1 部分的外力 $Sp(x,\ t)\Delta x$ 和惯性力 $-\rho(x)Su_{tt}(x,t)\Delta x$。根据达朗贝尔原理所有力的总和等于零，即

$$[ESu_{xx}(x,\ t)+p(x,\ t)S$$
$$-\rho(x)Su_{tt}(x,\ t)]\Delta x=0 \qquad (1)$$

由此

$$\rho(x)u_{tt}(x,\ t)=Eu_{xx}(x,\ t)+p(x,\ t) \qquad (2)$$

此外，$u(x,\ t)$ 满足初始条件 $u|_{t=0}=\varphi(x)$，$u_t|_{t=0}=\psi(x)$，这里 $\varphi(x)$、$\psi(x)$ 是已给函数。如果 $\rho(x)=\rho\equiv$ 常数（均匀杆），那末方程具有形式

$$u_{tt}=a^2u_{xx}+g(x,\ t)$$

这里

$$a^2=E/\rho,\quad g(x,\ t)=p(x,\ t)/\rho \qquad (3)$$

导出边界条件：

a）如果两端刚性固定不发生偏离，因而 $u|_{x=0}=u|_{x=l}=0$。

б）$u|_{x=0}=\mu_1(t)$，$u|_{x=l}=\mu_2(t)$，这里 $\mu_1(t)$，$\mu_2(t)$ 是函数，由运动定律确定端点值 $[\mu_1(0)=\varphi(0)$，$\mu_2(0)=\varphi(l)]$。