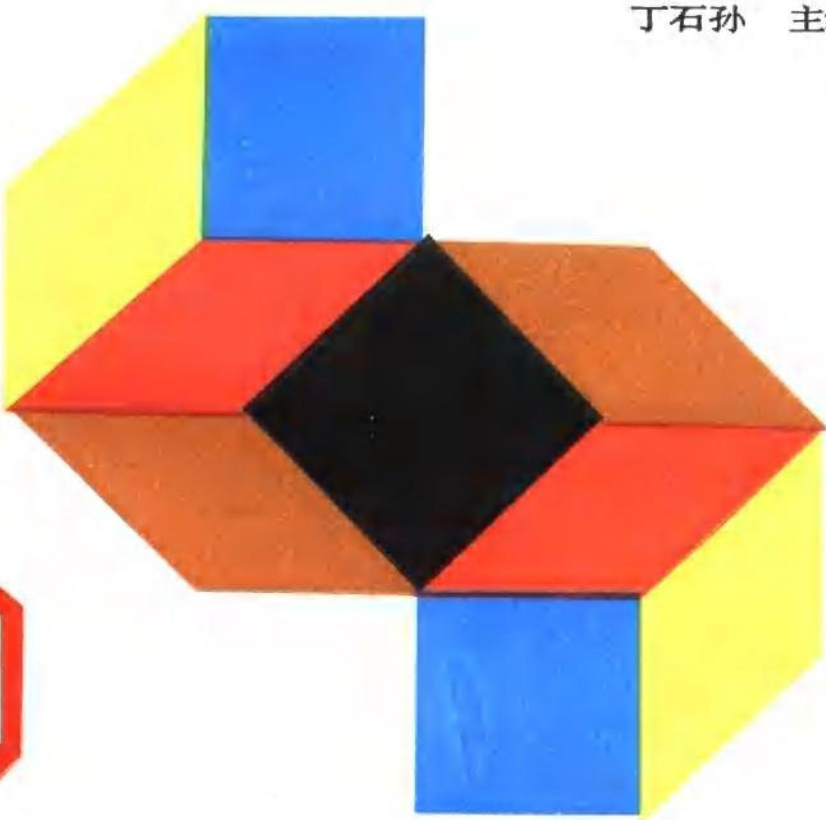
数学小丛书
智慧之花
(4)

归纳·递推·无字证明·坐标·复数

丁石孙 主编



北京大学出版社

数学小丛书——智慧之花

(4)

归纳·递推·无字证明·坐标·复数

丁石孙　主编

北 京 大 学 出 版 社

新登字（京）159号

图书在版编目（CIP）数据

归纳·递推·无字证明·坐标·复数/丁石孙主编.—北京：北京大学出版社，1995.5
（数学小丛书——智慧之花；4）
ISBN 7-301-02621-8

Ⅰ.归… Ⅱ.丁… Ⅲ.初等数学-普及读物 Ⅳ.012-49

书　　名：归纳·递推·无字证明·坐标·复数
著作责任者：丁石孙　主编
责任编辑：刘　勇
标准书号：ISBN 7-301-02621-8/O·343
出　版　者：北京大学出版社
地　　址：北京市海淀区中关村北京大学校内　100871
电　　话：出版部 2502015　发行部 2559712　编辑部 2502032
排　印　者：北京大学印刷厂
发　行　者：北京大学出版社
经　销　者：新华书店
787×1092毫米　32开本　8.875印张　200千字
1995年5月第一版　1995年5月第一次印刷
印　　数：0001—4,000册
定　　价：7.50元

内容提要

本书是北京大学《数学小丛书——智慧之花》的第四本。内容为精选的饶有趣味的数学问题，旨在激发中学生和大学生学习数学的兴趣，使学生得到引人入胜的思维训练。

什么是"好的数学"，什么是"不好的或不大好的数学"，著名数学大师陈省身先生对此有精辟的论述(见本书第213页)。本书选编了"无字证明集锦"，"数学归纳法"，"递归序列"，"坐标法"以及"任意次代数方程"等五篇短文作为"好的数学"的例子，而把"Napoleon，Escher与平面拼铺问题"作为"不好的数学"的例子，旨在为中学数学教学和课外活动提供一些有用的材料，在培养学生基本的数学思维能力上尽量少走弯路。"关于数学归纳原理的一点注记"一文指出了在国内外中等数学中广为流传的一个错误：数学归纳原理与最小自然数原理是等价的。为适应参加数学竞赛学生的需要，本书给出了第33届、第34届国际数学奥林匹克竞赛试题与解答。

本书可作为高中学生、中学数学教师和低年级大学生的课外读物，也可供数学爱好者阅读，本书对有志参加数学竞赛的学生也有很好的指导意义。

《数学小丛书——智慧之花》编委会

主　　编：丁石孙

副 主 编：潘承彪　李　忠

编　　委：（按姓氏笔划为序）

刘西垣　陈剑刚　陈维桓　邱淑清　周民強

徐明曜　谢衷洁

责任编辑：朱学贤　刘　勇

写在前面的话

在一个人所受的基础教育中，数学一直是占着一个特殊地位的，它占用的时间可以说是最多的．也许因为这已是历史上长期以来形成的事实，所以很少有人去作说明，即使有的学生并不喜欢数学，也鼓不起勇气去问个为什么．

数学由于其特殊的形式，给人的印象常常是：一批口诀，一堆公式以及一串定理，但它们在解决生活及其它学科的问题时又是很有用的，于是多数人就硬着头皮按老师教的学下去．这样的理解至多对了一半，因为数学还有另一个方面的重要作用，这就是通过对数学知识的介绍，对数学问题的解决，教会人们一种重要的分析问题、解决问题的思想方法．简单地讲，数学要教会人如何进行逻辑推理，如何进行正确的抽象思维，如何在纷繁的事物中抓住主要的联系，并如何使用明确的概念，等等．

要正确发挥数学课程的教育功能，除去需要教师与学生的积极努力以外，也还需要找到适当的辅助材料和恰当的方法．我们选编这套《数学小丛书——智慧之花》就是为了从这个方面为数学老师（主要是中学的老师）和大学生提供一点帮助，有一部分也可以用作中学生的课外读物．

我们并不认为目前的数学教学大纲的内容太少，太浅，因而要增加或加深教学内容．我们更不想给学生增加习题量以应付考试．恰恰相反，我们认为再向这个方向发展将会造成极大的危害，通过我们选择的这些小文章，我们希望能帮

助读者对数学有更全面的了解，使大家发现数学不只是“定义、定理、公式、证明”的刻板叙述，而是生动活泼、引人入胜的思维训练。在这里，读者可以看到如何对各种各样的问题进行精细的分析，又如何逐步把复杂的问题理出头绪，最后给出清晰的答案。总之，我们希望通过千姿百态的分析与讨论帮助读者了解什么是大家应该从数学学习中学到的思想方法。

我们的目标是这样，但能否达到还有待于实践的检验。读者读过这些书之后的印象与收获将作出评判。我们希望大家多提批评意见，帮助我们不断改进我们的工作。

丁石孙

1989年2月

出版说明

现代数学，这个最令人惊叹的智力创造，已经使人类心灵的眼光越过无限的时间，使人类心灵的手延伸到了无边无际的空间。

——N.M.Butler

数学方法渗透进并支配着一切自然科学的“理论”分支。在现代经验科学中，它已越来越成为衡量成就的主要标准。

——J.von Neumann

参与开发一般智力——不是为了今后某一职业的特定需要，应看成是数学教育的基本目标。

——F.Reidt

别把数学想象得那么困难和艰涩，并认为它排斥常识，数学仅仅是常识的一种微妙的形式。

——L.Kelvin

这些著名学者的话表达了我们出版《数学小丛书——智慧之花》的想法和努力的目标。

本丛书的主要对象是：中学数学教师、数学各专业的低年级大学生、部分高中学生以及数学爱好者。所选内容力求生动、有趣，在开始阶段以翻译为主，一年2—3册。

我们希望本丛书能为活跃与推动中学与大学低年级的数学教学、提高中学教师和大学生的数学素质、更好地沟通中学数学与大学数学以及普及数学知识，做一点有益的工作。

我们水平有限，希望大家多提意见，为了让我们的小花开放得绚丽多姿而共同努力！

《数学小丛书——智慧之花》编委会

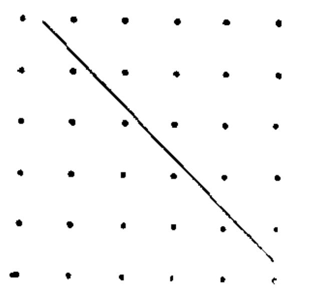
1989年2月

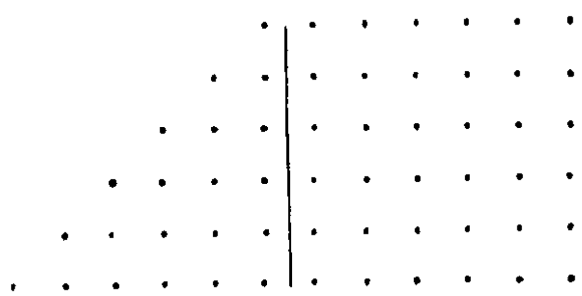
目　录

无字证明集锦

潘 承 彪 编

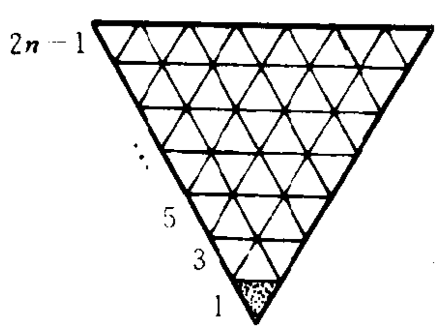
（一）自然数求和

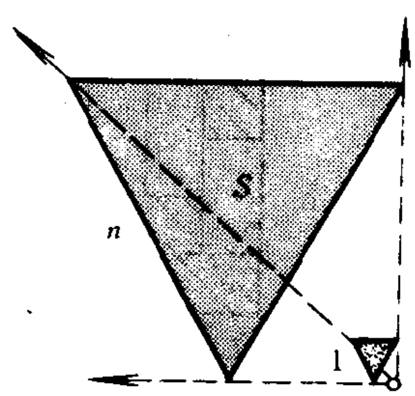




$$\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n-1} k = n^2.$$

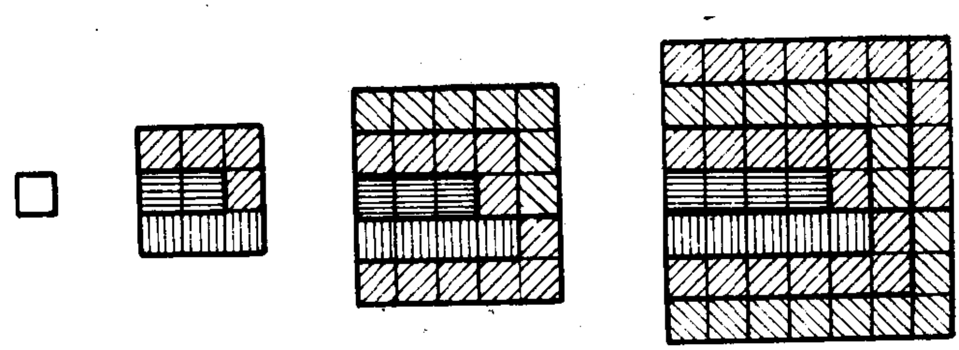
$$\sum_{k=1}^{n} k + n^2 = \sum_{k=n+1}^{2n} k.$$





$$\nabla + 3\cdot\nabla + \cdots + (2n-1)\cdot\nabla = S = n^2\cdot\nabla,$$

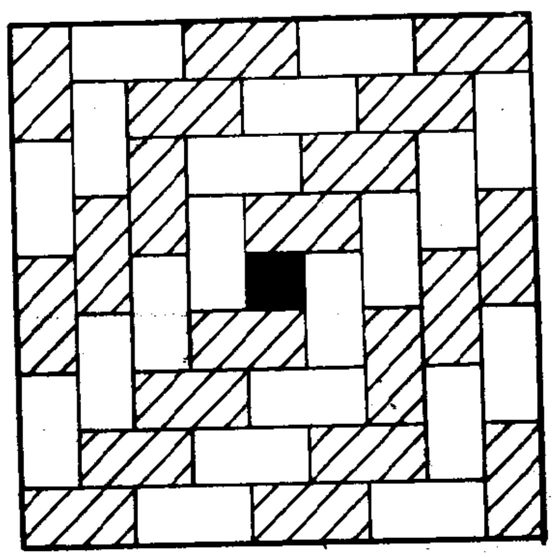
$$\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = n^2.$$



$n=1$ $n=2$ $n=3$ $n=4$

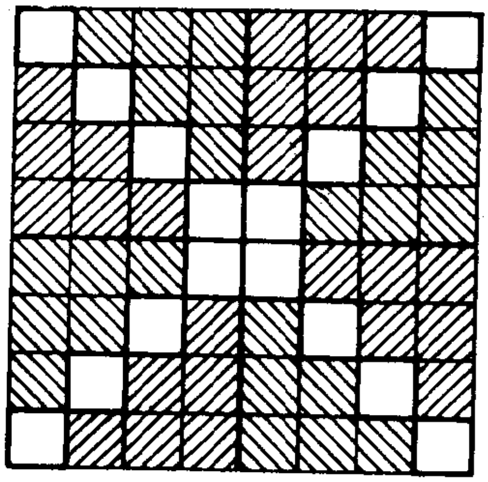
$$4+5+6+7+8+9+10 = (2 \cdot 4 - 1)^2$$

$$\sum_{k=n}^{3n-2} k = (2n-1)^2, \qquad n = 1, 2, 3, \cdots.$$



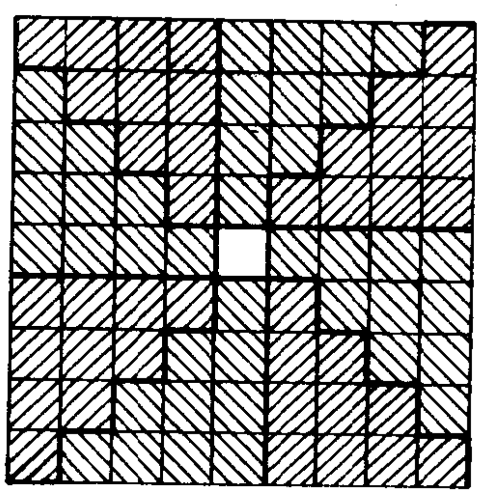
$$1 + 4 \cdot 2 + 8 \cdot 2 + 12 \cdot 2 + 16 \cdot 2 = (2 \cdot 4 + 1)^2,$$

$$1 + 2\sum_{k=1}^{n} 4k = (2n+1)^2.$$



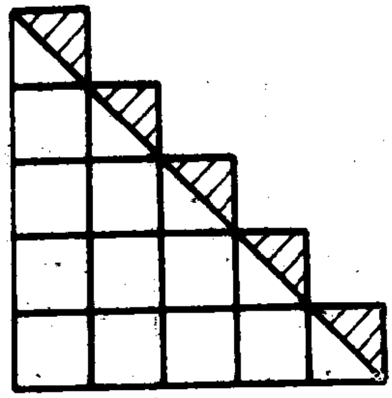
$$(2\cdot 4)^2 - 2(2\cdot 4) = 8\sum_{k=1}^{4-1} k,$$

$$(2n)^2 - 2(2n) = 8\sum_{k=1}^{n-1} k.$$



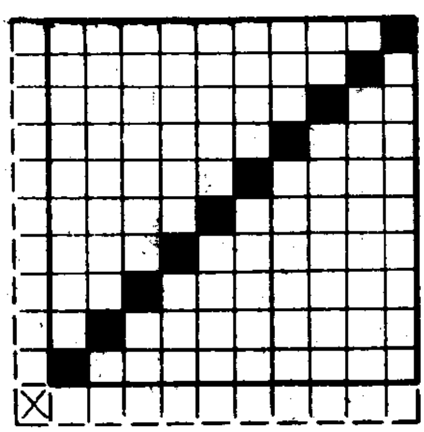
$$(2\cdot 5 - 1)^2 - 1 = 8\sum_{k=1}^{5-1} k,$$

$$(2n-1)^2 - 1 = 8\sum_{k=1}^{n-1} k.$$



$$1+2+3+4+5=\frac{5^2}{2}+\frac{5}{2},$$

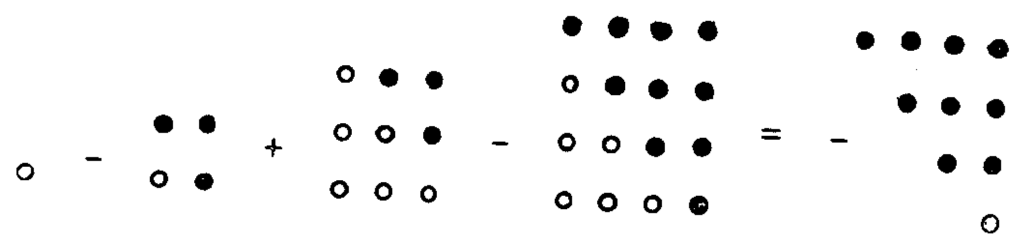
$$\sum_{k=1}^{n} k=\frac{n^2}{2}+\frac{n}{2}=\frac{1}{2}n(n+1).$$



$$\binom{10}{2}=\frac{1}{2}\cdot 10\cdot(10-1)=\sum_{k=1}^{9} k,$$

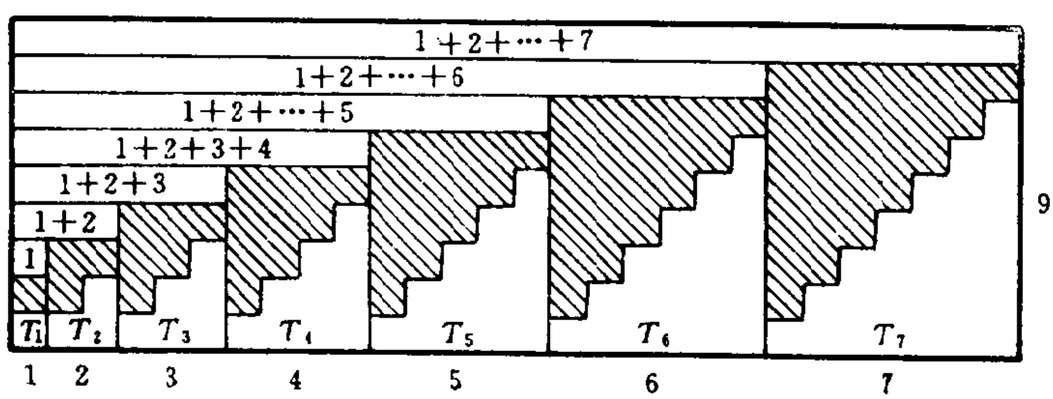
$$\binom{11}{2}=\frac{1}{2}\cdot 11\cdot(11-1)=\sum_{k=1}^{10} k,$$

$$\binom{11}{2}=\binom{10}{2}+10, \qquad \binom{n+1}{2}=\binom{n}{2}+n.$$



$$1-2^2+3^2-4^2=-(1+2+3+4)=-\frac{4\cdot(4+1)}{2},$$

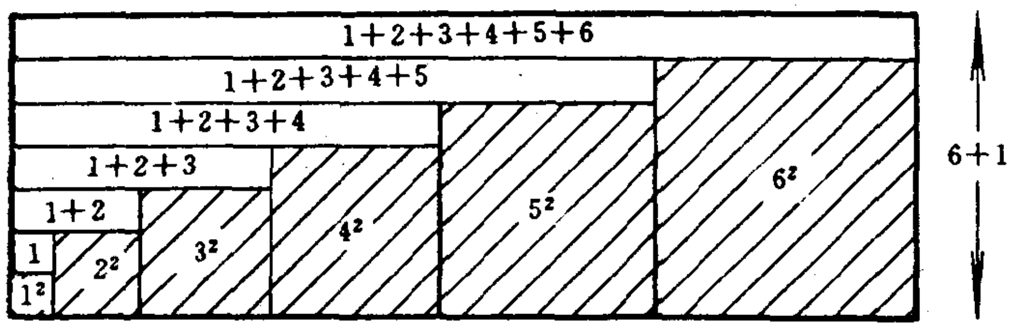
$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}k^2=(-1)^{n+1}\sum_{k=1}^{n}k=(-1)^{n+1}\frac{n(n+1)}{2}.$$



$$T_n=1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2},$$

$$3(T_1+T_2+\cdots+T_7)=(7+2)T_7=\frac{7\cdot(7+1)(7+2)}{2},$$

$$T_1+T_2+\cdots+T_n=\frac{(n+2)}{3}T_n=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}.$$

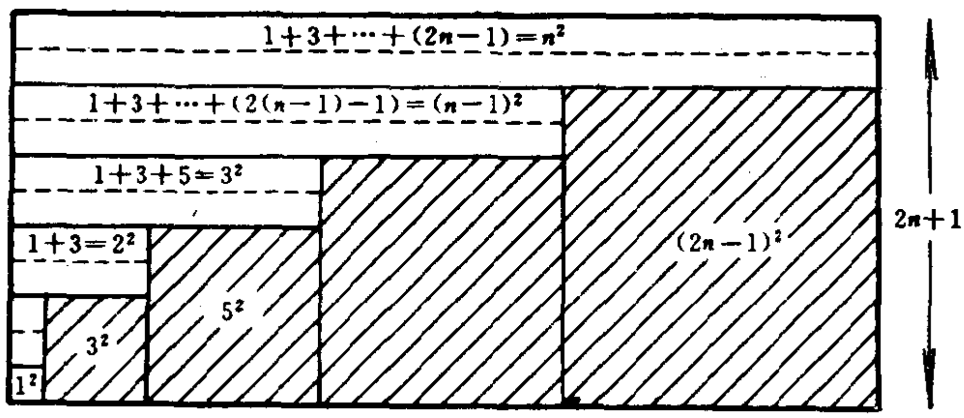


$$1^2+2^2+\cdots+6^2+(T_1+T_2+\cdots+T_6)=(6+1)T_6,$$

$$1^2+2^2+\cdots+6^2=(6+1)T_6-\frac{(6+2)}{3}T_6=\frac{2\cdot6+1}{3}T_6$$

$$=(2\cdot6+1)(6+1)6/6,$$

$$1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{2n+1}{3}T_n=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$



$$1^2+3^2+\cdots+(2n-1)^2+2(1^2+2^2+\cdots+n^2)$$

$$=n^2\cdot(2n+1),$$

$$1^2+3^2+\cdots+(2n-1)^2=n^2(2n+1)-\frac{n(n+1)(2n+1)}{3}$$

$$=\frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}.$$