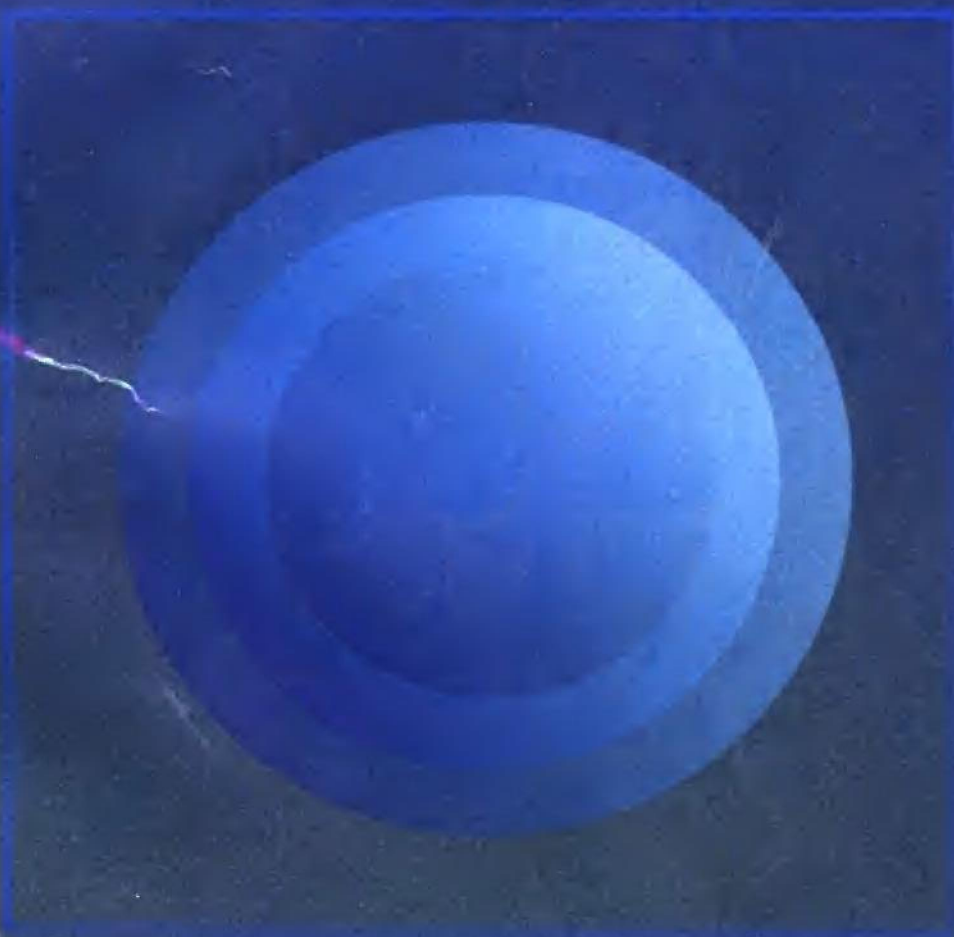


微积分

[美] D·休斯·哈雷特 A·M·克莱逊 等著

胡乃岡 邵勇 徐可 马志鹏 徐刚 译



WILEY

高等教育出版社

微 积 分

美国国家科学基金会资助 以哈佛大学为首的合作组编写

Deborah Hughes-Hallett

Harvard University

Andrew M. Gleason

Harvard University

Daniel E. Flath

University of South Alabama

Sheldon P. Gordon

Suffolk County Community College

David O. Lomen

University of Arizona

David Lovelock

University of Arizona

William G. McCallum

University of Arizona

Brad G. Osgood

Stanford University

Andrew Pasquale

Chelmsford High School

Jeff Tecosky-Feldman

Haverford College

Joe B. Thrash

University of Southern Mississippi

Karen R. Thrash

University of Southern Mississippi

Thomas W. Tucker

Colgate University

Douglas Quinney

University of Keele

由 Otto K. Bretscher (*Harvard University*) 协助

胡乃岡 邵勇 徐可 马志鹏 徐刚 译

高 等 教 育 出 版 社

(京) 112 号

CALCULUS

English Edition

Copyright © 1994, by John Wiley & Sons, Inc.

All Rights Reserved

微积分

中文版

©高等教育出版社

版权所有

此中译本为 John Wiley & Sons, Inc. 英文版原书在中华人民共和国境内的唯一合法译本。

图书在版编目(CIP)数据

微积分/胡乃同等译. —北京:高等教育出版社,1997

ISBN 7-04-006394-8

I. 微… I. 胡… II. 微积分 IV. 0172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(98)第 01768 号

高等教育出版社出版

北京沙滩后街 55 号

邮政编码:100009 传真:64014048 电话:64054588

新华书店总店北京发行所发行

化学工业出版社印刷厂印装

*

开本 787×1092 1/16 印张 44.25 字数 1090 000

1997 年 10 月第 1 版 1997 年 10 月第 1 次印刷

印数 0 001—2 171

定价 68.00 元

凡购买高等教育出版社的图书,如有缺页、倒页、脱页等
质量问题者,请与当地图书销售部门联系调换

版权所有,不得翻印

译者的话

经 John Wiley & Sons 出版公司和国内有关专家的推荐,1995 年高等教育出版社决定将这本颇有新意的 *Calculus* 介绍给国内广大读者,并委托我们翻译此书.参加本书翻译工作的有胡乃岡、邵勇、徐可、马志鹏、徐刚,其中序言、第一章、第五章、第六章由胡乃岡译出,第三章、第八章、第九章及附录由邵勇译出,第二章、第十章由徐可译出,第四章由马志鹏译出,第七章由徐刚译出.

我们要特别感谢本书责任编辑郭思旭编审,他不仅审读了全部译文,还为本书的出版付出了辛勤的劳动,书末的中文索引排序工作也是由他完成的.我们还要感谢张爱和编审、张小萍编审及林自新先生,他们对译文作了细致的审阅,并提出了不少中肯的修改意见.此外,还要感谢北京师范大学刘洁民教授,他为本书第八章写了附注.

我们还要向高等教育出版社照排中心的周辉同志表示衷心的感谢,本书插图的合成是在他的指导和帮助下完成的.

由于我们的水平有限,译文中难免还有不妥之处,热诚欢迎读者批评指正.

译者

1997 年 11 月于北京

序 言

微积分是人类智慧最伟大的成就之一。300年前，受天文学方面问题的启发，牛顿(Newton)和莱布尼茨(Leibniz)阐发了微积分的诸多概念。自那时以来，每一世纪都证明了微积分在阐明数学、物理科学、工程学以及社会和生物科学方面问题的强大威力。

由于微积分具有将复杂问题归纳为简单规则和步骤的非凡能力，迄今已获得相当大的成功。正因为如此，微积分的教学也存在着危险：很可能将这一学科仅仅教授成一些规则和步骤，从而既忽略了数学本身，也忽略了它的实际价值。由于美国国家科学基金会的慷慨资助，我们以哈佛大学为首的合作组，尝试创立一门新的微积分课程以期恢复它的洞察力。本书是这一努力的一部分。

基本原则

我们的努力遵循两条原则。为了恢复微积分的数学内容，我们制定的第一条原则是：

三项准则：课程的每一主题都应当从几何、数值和代数三个方面加以体现。

我们不断地鼓励学生思考他们所做一切的几何意义和数值意义。我们不打算削弱微积分的纯代数方面，而宁愿通过给出代数符号的意义来加强这一点。对于涉及应用的课后作业，我们总是要求学生口头解释他们答案的实际意义。

受阿基米德(Archimedes)的启发，为恢复对实际问题的理解力，我们制定的第二条原则是：

阿基米德方法：正式的定义与方法是根据对实际问题的调查研究而得出的。

阿基米德认为，获得数学问题的洞察力首先要根据力学或物理学的观点来考虑它们。^①出于同样的理由，我们的课本是问题驱动式的。只要有可能，我们总是从实际问题出发，并由此推导出一般性结果。所谓实际问题，我们通常是(但并不总是)指现实世界的应用问题。上述两条原则导致了一门引人注目的新课程——其新颖性远比粗略地看一看目录所得到的提示多得多。

^① “……我认为……还是把可能用力学手段研究某些数学问题的方法写给你并加以详细说明的好。我相信这个过程甚至对定理证明本身同样是有用的：我最初是通过力学方法明白某些问题的，虽然它们还须以后在几何上加以证明，因为由所述方法进行的研究并没有给出真正的证明。但是我们通过这个方法事先获得了这些问题的某些知识来给出证明，比事先没有这些知识显然要容易些。”引自 Sir Thomas L. Heath 编译的《阿基米德著作中的有关方法》(Dover, NY)

技术手段

我们利用计算机和具有绘图功能的计算器来帮助学生学会从数学角度思考问题. 例如, 利用具有绘图功能的计算器放大函数图象是观察局部线性的最佳方法之一. 而且有效地利用技术手段作为工具的能力本身也是极其重要的. 我们期望学生用自己的判断力去决定技术手段在哪些方面是有用的.

然而, 本书并不需要任何特别的软件和技术手段. 试验场合所用的工具包括具有绘图功能的计算器、绘图软件及计算机代数系统. 任何能够绘制函数图象和演示数值积分的技术手段就足够了.

对学生的基础有何要求?

我们认为这门课程既能激发基础好的学生多思考, 同时也能使那些代数基础薄弱的学生容易理解. 书中既提供数值方法和图示方法, 也提供代数方法, 给予学生掌握内容的几种途径. 这种处理方式是为了鼓励学生坚持不懈地学习, 以降低失败率.

内容

我们设计这一课程时, 不受任何传统想法的限制. 教材中添加了某些新课题, 如, 微分方程; 也删去了一些传统课题, 因为在与数学家、工程师、物理学家、化学家、生物学家及经济学家讨论后, 不能认为它们是合理的内容. 同时, 我们还改变了某些课题传统的注意中心. 为了满足个别的需要或课程的要求, 可以很容易地增删某些课题, 或改变其顺序.

第一章 函数库

第一章引进了本书所用的所有初等函数. 虽然这些函数可能是读者所熟悉的, 但函数的图示方法、数值方法和建模方法对读者来说却是新鲜的. 我们的目的是使学生了解每个函数的特性: 图象的形状、特征、相对增长率和一般用途. 我们希望学生获得观察图象和借助图象思考的能力, 获得阅读数据表格和借助数值思考的能力. 同时能结合他们的代数技巧发挥这些能力来模拟现实世界. 我们在尽可能早的阶段引入了指数函数, 因为指数函数是理解真实世界事物发展进程的基础. 另外, 我们也注意介绍从一些已知函数构造新函数的方法, 通过平移、旋转和拉伸、压缩, 从任何基本函数得到一个新的相关函数.

我们希望读者完全掌握这一章的内容, 因为在这些内容上付出时间对于学好微积分是值得的.

第二章 导数

第二章根据我们的三项准则给出了导数的关键概念. 本章的目的是让学生对导数的极限定义及其作为瞬时变化率的解释有实际的理解, 而不使关于微分法则的讨论复杂化. 通过本章的学习, 学生将能在数值上求出导数(通过取任意合适的差商), 能从图示上把导数具体想象为一个图象的斜率, 并能在各种应用问题中解释一阶和二阶导数的意义. 学生还将理解局部线性性质, 并认识到导数本身也是函数.

第三章 定积分

沿第二章同一思路,第三章给出了定积分的关键概念.某些教师在使用本书最初的版本时,把第三章推迟到第五章之后讲授也毫无困难.

本章的目的是让学生实际理解定积分是黎曼和的极限,并且用微积分基本定理给出导数与定积分之间的联系.我们用与第二章相同的方法深入阐明这一基本概念,而不过多讨论计算技巧.一个有启发性的问题是根据速度函数计算运行的总距离.学生完成本章学习时,应很好地掌握作为黎曼和极限的定积分,能计算定积分的数值,懂得如何解释在不同场合下的定积分.

第四章 简明微分

第四章给出了微分的符号法,本章的题目就是要提醒学生不要认为微分的基本方法就是微分的定义.这里介绍了第一章中所有函数的导数,同时也介绍了第一章讨论的复合函数的微分法则.本章还介绍了隐函数微分法,并用它求出几种基本函数的导数.我们在适当的场合进行了图象和数值上的推理,这种推理虽然不是正式的,但从数学角度看也是合情合理的.学完本章内容,学生应熟练掌握基本微分法并懂得各种微分法则成立的理由.

第五章 导数的应用

第五章给出了导数的应用,其中包括根据阿基米德方法对具有参数的函数族的研究.我们利用图示方法观察函数的基本性质,并通过微积分来证实这些性质.

本章的目的是使学生能够利用导数来解决问题,而不是仅仅学习所罗列的一个个模型.这里所举出的模型并不全面,不必讲授所有各节内容.学完本章时,学生应具备成功处理一些问题的经验,这些问题可能需要持续思考一个学期以上的时间.

第六章 从函数的导数重新构造函数本身

第六章重点介绍了从导数“返回”原来函数的问题.首先从图象上和数值上讨论这一问题,然后再给出分析.本章首先给出了定积分的性质,并把它解释为面积(6.1节和6.2节),章末则分析了重力作用下的运动.学完本章后,学生应懂得如何从导函数“返回”到原来函数.

第七章 积分

第七章研究的是求积分的方法.我们的注意力不局限于具有确定原函数的函数,而强调数值积分的法则是基本的工具.这一章包括若干积分方法,另一些方法则在积分表中给出.一方面我们没有特别强调使用计算机代数软件,另一方面我们当然了解软件的存在改变了学生所需要掌握的技巧.

本章贯穿了实用的技巧,同时要求明白其中的道理.定积分的计算分为两大部分.7.1节至7.5节这部分主要是微积分基本定理的应用,7.6节至7.7节则是数值方法的应用.7.8节和7.9节是广义积分.学完本章,学生应熟练掌握积分的基本方法.

第八章 定积分的应用

第八章叙述了定积分的应用. 我们强调剖分一个量的概念, 以便产生其极限是一个定积分的黎曼和. 这样做的目的是给出应用定积分的方法而不依赖各种模型. 本章首先讨论了如何建立定积分来表示已知的物理量, 然后举出几何、物理、经济以及概率论方面的例子. 你不必讲完所有各节内容. 学完本章, 学生将懂得如何构成黎曼和, 并知道怎样用黎曼和.

第九章 微分方程

第九章引进的微分方程概念并没有太多的技术性问题, 我们想表明前面所学到的各种方法有能力解决更复杂、更实际的应用问题. 方向场用来显示一阶微分方程解的特性. 重点是定性地解答问题、建模及解释. 本章的应用问题包括人口模型(指数型与逻辑斯蒂型)、疾病传播、弱肉强食方程及优胜劣汰模型. 另外还有关于二阶常系数微分方程的一些例子, 包括阻尼与非阻尼弹簧方程及方程的复数解. 学完本章, 学生应了解微分方程是什么, 如何从图象和数值上近似它的解, 以及如何求某些解析解, 所有这些问题都可在本章大量应用例子的上下文中找到答案.

第十章 逼近

第十章通过简单函数逼近函数的想法介绍了泰勒级数和傅里叶级数. 泰勒级数是局部逼近, 傅里叶级数是全局逼近. 最初的重点是泰勒多项式和泰勒级数, 也讨论了几何级数及其应用. 收敛级数的概念是从泰勒多项式的研究中自然而然引伸出的. 本章自始至终贯穿了图象与数值的观点. 学完本章, 学生应很好地掌握泰勒逼近, 并且懂得它们与傅里叶逼近的差别.

附录

附录包括有关根与精确度、连续与有界、极坐标及复数方面的内容.

我们的经验

在我们酝酿构思本书的过程中, 就已经意识到需要在多种不同类型学生就学的各级学校中充分试用本书的内容. 合作组的成员在大大小小的文科大学、公立大学、两年制学院及高级中学中使用本书的前身讲授了好几年. 在 1991 至 1992 和 1992 至 1993 两个学年中, 我们得到全美范围内超过 100 所学校的教师的鼎力支持, 他们分级试用了本书, 并报告了他们的经验及学生的反映. 这些不同类型的学校, 有的用本书讲授过一个学期, 有的讲授过四分之一学年. 有的用本书在大班授课, 有的在小班授课. 有的则在计算机实验室, 在小组里, 在传统的研讨班上使用过本书, 并且应用了多种不同的技术手段. 我们衷心感谢他们提出了有价值的建议, 我们已经设法将这些建议纳入到这第一版教材中.

辅助材料

教师手册, 包括讲课提示、计算器程序、某些优秀的投影仪字幕片.

教师用题解手册, 包括全部习题的完整解答.

答案手册, 包括所有奇数习题的简短解答.

学生用题解手册,包括半数奇数习题的完整解答.

致谢

首先,我们想表达对美国国家科学基金会的诚挚感谢,他们始终不渝地相信我们有能力使微积分课程重新焕发活力,并且对 Louise Raphael, John Kenelly, John Bradley 和 James Lightbourne 表示特别的感谢. 我们还想对我们的顾问委员会的全体成员 Lida Barrett, Bob Davis, John Dossey, Ron Douglas, Seymour Parter 和 Steve Rodi 表示感谢,感谢他们始终不懈的指导和忠告.

此外,我们应当感谢国内外诸多人士为帮助我们的计划获得成功而做的一切. 这些人士包括, Wayne Anderson, Ruth Baruth, Maria Betkowski, Melkana Brakalova, Jackie Boyd-DeMarzio, Otto Bretscher, Morton Brown, Greg Brumfiel, Joan Carrafiello, Phil Cheifetz, Ralph Cohen, Bob Condon, Sterling G. Crossley, Ehud de Shalit, Bob Decker, Persi Diaconis, Tom Dick, Steve Doblin, Wade Ellis, Alice Essary, Sol Feferman, Hermann Flaschka, Patti Frazer Lock, Lynn Garner, Allan Gleason, Florence Gordon, Danny Goroff, Robin Gottlieb, JoEllen Hillyet, Luke Hunsberger, Richard Iltis, Rob Indik, Adrian Iovita, Jerry Johnson, Mille Johnson, Matthias Kowski, Gabriel Katz, David Kazhdan, Mike Klucznik, Donna Krawczyk, Robert Kuhn, Carl Leinbach, David Levermore, Don Lewis, John Lucas, Reginald Luke, Tom MacMahon, Dan Madden, Barry Mazur, Rafe Mazzeo, Dave Meredith, David Mumford, Alan Newell, Huriye Önder, Arnie Ostebee, Jose Padro, Mike Pavloff, Tony Phillips, John Prados, Amy Radunskaya, Wayne Raskind, Gabriella Ratay, Janet Ray, George Rublein, Wilfried Schmid, Marilyn Semrau, Pat Shure, Esther Silberstein, David Smith, Don Snow, Bob Speiser, Howard Stone, Steve Strogatz, "Suds" Sudholz, Cliff Taubes, Peter Taylor, Tom Timchek, Alan Tucker, Jerry Uhl, Bill Vélez, Gary Walls, Charles Walter, Mary Jean Winter, Debbie Yoklic, Lee Zia, Paul Zorn, 以及哈佛大学数学系的所有同行,他们为我们提供了计算机与场地.

最后,我们要感谢表现卓越的工作人员,他们夜以继日地工作,将教材输入计算机(并再次将它们输出)、誊写习题答案、将书中全部插图编号排序,我们由衷地感激他们的灵巧而充满活力的工作以及奉献精神. 感谢 Stefan Bilbao, Ruvim Breydo, Will Brockman, Duff Campbell, Kenny Ching, Eric Connally, Radu Constantinescu, Radhika de Silva, Srdjan Divac, Patricia Hersh, Joseph Kanapka, Alex Kasman, Georgia Kamvosoulis, Dimitri Kountourogianis, Alex Mallozzi, Mike Mitzenmacher, Ed Park, Jessica Polito, Sulian Tay, Alice Wang, Eric Wepsic, Gang Zhang.

Deborah Hughes-Hallett	David Lovelock	Joe B. Thrash
Andrew M. Gleason	William G. McCallum	Karen R. Thrash
Daniel E. Flath	Brad G. Osgood	Thomas W. Tucker
Sheldon P. Gordon	Andrew Pasquale	Douglas Quinney
David O. Lomen	Jeff Tecosky-Feldman	

致学生：如何学习本教材

• 这本书可能与你用过的其他数学教材有所不同，所以事先了解这些差别可能是有帮助的。本书在每个阶段都强调你所使用的符号的意义（包括实际的、几何图象上的或数值上的）。本书对直接套用公式计算的重视程度可能比你预期的低，而围绕这些公式所做的解释，却远比你想象的要重视得多。我们会经常要求你对自己的思路做出文字解释，或用图象来解释答案。

• 本书用平易的英语叙述了微积分的主要概念。成功地使用本书取决于认真地阅读、不断提出问题和对给出的概念努力加以思考。仔细地阅读教材，而不是只看那些经过加工的例子对你将是有益的。

• 教材中的例子很少与课后的习题完全相仿，所以做课后习题不能指望那些看上去有类似“结果”的例子。努力掌握好微积分的概念才能很好地完成课后作业。

• 书中很多习题的结果是开放式的，这就是说有不只一种正确的解法和不只一种正确的答案。有时，问题的解决依赖于那些很普通的想法，尽管这些想法习题本身并没有明确给出，但却可以从日常生活中了解到。

• 我们假定你很容易找到一台计算机或计算器，它能画出函数图象、求出方程的（近似）解、计算积分的数值。在很多情况下，你无法求出问题的准确答案，但却能用计算器或计算机得到合理的近似值。用这种方式得到的答案通常与精确解一样有效。然而并不是所有问题都要用计算器来解答，需要你自己去做出判断。

如果你对现代技术表示不信任，听一听一位走过同样学习道路的学生是如何说的：

使用计算机是一件陌生的事，但却极其有益。我认为它可以使你成功地学好这门课。难于在自己头脑中显示出图象，通常是我学不好微积分的原因。在计算机的帮助下，这种困难不再存在，我能够集中精力研究用图形表示出的数学概念，并且由于概念变得更清楚，我也更善于画出图形的本质面貌。俗话说，没有已往的经验就得不到一份工作。但是没有一份工作，也不可能得到经验。依赖于计算机，免去我画图之累，从而引导我去关注图象的意义，而不必考虑如何把图象画正确。而且图象所揭示的概念正是这门课十分重要的基础。由于能够看到我试图描述和学习的对象，并且可以改变条件看到不同的结果，我就能更深刻地理解这些概念。我第一次能认识到事物是相互联系的……

这是一位亚利桑那大学的学生。在1990年秋天，我们第一次使用这一教材授课时，她参加了微积分这门课的学习。她害怕微积分，第一次测验只得个C，但却以A的高分结束这门课程。

• 本书试图让描述函数的三种方法：图示法（一幅图）、数值法（一张数值表）和代数法（一个公式），具有同等重要的地位。有时很容易将所给问题从一种表示方法转变为另一种表示方法。例如，你可用抛物线的方程代替它的图象，或画一张数值表来看出它的特性。处理方法灵活是很重要的，如果一种方法观察问题不奏效，就试另一种方法。

• 正在使用本书的学生发现小组讨论问题是有益的。很多问题的解决不能墨守成规，用你的同学所提供的其他观点处理它们可能是有帮助的。如果小组讨论不可行，看看你的教师能否组

织研讨班对各种附加问题展开讨论.

• 你可能想知道,从这本书中将能学到什么.答案是,如果你做出扎实的努力,你将会真正懂得一千年来最重要的成就之一——微积分,也会真正理解在这个技术时代如何应用数学.

Deborah Hughes-Hallett

David Lovelock

Joe B. Thrash

Andrew M. Gleason

William G. McCallum

Karen R. Thrash

Daniel E. Flath

Brad G. Osgood

Thomas W. Tucker

Sheldon P. Gordon

Andrew Pasquale

Douglas Quinney

David O. Lomen

Jeff Tecosky-Feldman

责任编辑 郭思旭
封面设计 王 睢
责任绘图 吴文信 孟庆祥 尹文君
版式设计 胡乃同
责任校对 郭思旭
责任印制 王彦鸿

目 录

第一章 函数库	1
1.1 什么是函数	2
1.2 线性函数	8
1.3 指数函数	15
1.4 幂函数	26
1.5 反函数	35
1.6 对数函数	39
1.7 数 e 和自然对数	45
1.8 关于复利的注释	51
1.9 来自原来函数的新函数	57
1.10 三角函数	64
1.11 多项式函数和有理函数	77
第一章复习题	85
第二章 关键概念:导数	93
2.1 如何测量速度的大小	94
2.2 在一点的导数	102
2.3 导函数	112
2.4 对导数的解释	120
2.5 二阶导数	127
2.6 逼近和局部线性性质	134
2.7 极限的注释	140
2.8 可微性的注释	143
第二章复习题	148
第三章 关键概念:定积分	151
3.1 如何测定走过的距离	152
3.2 定积分	159
3.3 做为面积或平均值的定积分	165
3.4 微积分基本定理	172
3.5 有关极限概念的进一步说明	180
第三章复习题	182
第四章 简明微分	187
4.1 有关导函数的公式	188
4.2 幂函数和多项式函数	191
4.3 指数函数	200
4.4 乘积法则与商法则	206
4.5 链式法则	212

4.6 三角函数	216
4.7 链式法则的应用	224
4.8 隐函数的导数	228
4.9 关于切线逼近的注释	232
第四章复习题	236
第五章 利用导数	241
5.1 利用一阶导数	242
5.2 利用二阶导数	252
5.3 曲线族性质的研究	262
5.4 经济应用:边际函数	271
5.5 最优化方法	279
5.6 最优化(二) 建模初步	285
5.7 牛顿法	292
第五章复习题	296
第六章 由函数的导数重新构造函数本身	301
6.1 再谈定积分	302
6.2 定积分的性质	309
6.3 用图象法和数值法建立原函数	314
6.4 用代数方法建立原函数	321
6.5 关于运动方程的注释:加速度产生的原因	330
第六章复习题	332
第七章 积分	337
7.1 原函数和基本定理	338
7.2 换元积分法:第一部分	343
7.3 换元积分法:第二部分	349
7.4 分部积分法	354
7.5 积分表	360
7.6 逼近定积分	370
7.7 逼近误差与辛普森(Simpson)公式	378
7.8 广义积分	385
7.9 广义积分的更多知识	394
7.10 关于构造原函数的注记	400
第七章复习题	407
第八章 定积分的应用	411
8.1 建立黎曼和	412
8.2 在几何上的应用	419
8.3 在物理上的应用	429
8.4 在经济上的应用	439
8.5 分布函数的应用	447
8.6 有关分布的概率及其它	456
第八章复习题	465
第九章 微分方程	475

9.1 什么是微分方程?	476
9.2 斜率场	481
9.3 欧拉法	489
9.4 分离变量法	494
9.5 增长与衰减	499
9.6 应用与建模	510
9.7 人口增长模型	524
9.8 微分方程组	540
9.9 对相平面进行分析	552
9.10 二阶微分方程: 振动	559
9.11 阻尼振动及数值方法	568
9.12 二阶线性微分方程	575
第九章复习题	583
第十章 逼近	587
10.1 泰勒多项式	588
10.2 泰勒级数	598
10.3 求泰勒级数和用泰勒级数	606
10.4 几何级数	614
10.5 泰勒逼近中的误差	625
10.6 傅里叶级数	633
第十章复习题	648
附录	653
附录 A 根与精确度	654
附录 B 连续性和界	664
附录 C 极坐标	669
附录 D 复数	670
索引	676

第 一 章

函 数 库

函数确实是数学最基本的概念. 例如, 用日常生活的语言我们会说, “票价是观众所在位置的函数”, 或者“火箭的速度是其负载的函数”. 上述情形, 函数一词都表达了这样一种思想: 通过某一事实的信息去推知另一事实. 数学上, 最重要的函数是那些可根据某一数值而推知另一数值的函数. 如果我们知道了一个正方形的边长, 那么它的面积的大小也就确定了. 如果已知一个圆的周长, 则它的直径也就确定了.

微积分是从研究函数开始的. 本章将通过研究对最一般函数性态的概括研究为微积分的学习打下基础. 这些函数包括幂函数、指数函数、对数函数以及三角函数. 除了研究这些函数本身的性态, 我们也将进一步学习掌握表示函数的图象法、表格法和公式法.

1.1 什么是函数

让我们看一个例子. 1990年夏天, 美国西南部持续高温(气温之高, 以至一些航空公司认为无法保证飞机的安全降落). 表 1.1 给出了亚利桑那(Arizona)州菲尼克斯(Phoenix)城 6月 19日—29日每天的最高气温.

表 1.1 亚利桑那州菲尼克斯城 1990年 6月气温

日期: 6月(1990)	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
气温/°C	43	45	46	45	45	45	49	50	48	48	42

尽管你可能还没有把如此难以预测的温度想象成是一种函数, 然而温度确实是日期的函数. 因为每一天都产生出一个唯一的最高气温. 这里不存在任何计算温度的公式(否则我们就需要气象局了), 然而温度确实满足函数的定义: 对每个日期 t , 都有一个与 t 相应的唯一最高气温 H .

我们给出函数定义如下:

称一个量 H 是另一个量 t 的函数, 如果 t 的每一个值都有一个与 t 相应的 H 的唯一值. 我们称 H 是函数的值, 或因变量, 称 t 是自变量, 或独立变量. 也可以说 t 是输入量, 而 H 是输出量. 我们记作 $H = f(t)$, 其中 f 是函数名.

函数的定义域是自变量所有可能值的集合, 函数的值域是因变量值的相应集合.

在上述温度例子中, 自变量是日期, 因变量是温度. 定义域是一切可能的日期, 而值域是关于那些日期的诸相应最高气温.

函数在科学上有重要的作用. 人们常常可观察到一个量是另一量的函数, 进而要设法求出表达这一函数的合理公式. 例如, 在大约 1590 年以前还根本没有关于温度数量的概念. 当然那时人们知道较热、较冷这样的相对概念, 也知道某些像沸点、冰点、体温这样的绝对概念, 但却无法对温度进行数值测量. 后来多亏天才的伽利略(Galileo)意识到流体受热膨胀是测量温度的关键. 正是他首先把温度看成是流体体积的函数.

求出表示某个已知现象的函数称作建立数学模型. 这种模型能够阐明变量之间的关系, 因而也有助于我们做出预测.

函数的表示法: 表格法、图象法及公式法

函数可以用至少三种不同的方法来表示: 表格法、图象法和公式法. 例如, 给出菲尼克斯城温度的函数, 它作为时间的函数既可以由图 1.1 的图象表示, 也可以由表格法表示.