保险精算丛书

利息理论

S.G.凯利森 著　尚汉冀 译

上海科学技术出版社

李大潜主编

《保险精算丛书》

利 息 理 论

S.G.Kellison 著
尚 汉 冀 译

上海科学技术出版社

内 容 简 介

利息理论应用数学工具对金融保险业务中与利息有关的方面进行定量的分析。其内容包括利息的度量与利息问题的求解，年金，收益率，分期偿还表和偿债基金，债券与其他证券，以及一些对利息和现代金融业务的相当深入的分析研究。本书兼顾理论和实际应用，对于金融保险专业人员有重要的参考价值，也可用作高等学校中有关专业的教材或参考书。

S. G. Kellison
The Theory of Interest
(Second Edition)
RICHARD D. IRWIN, INC.

《保险精算丛书》
利 息 理 论
S.G.凯利森 著
尚 汉 冀 译
上海科学技术出版社出版、发行
(上海瑞金二路450号)
常熟市印刷八厂印刷
开本850×1156 1/32 印张16.25 字数416 000
1995年11月第1版 1998年11月第2次印刷
印数2 001－4 000
ISBN7－5323－4155－0/O·195
定价：37.90元
如遇印装质量问题，可直接向承印厂调换
地址：常熟市梅李镇通江路21号 邮编：215511

《保险精算丛书》编委会

总顾问： 何静芝　徐福生　钱建中

主　编： 李大潜

副主编： 尚汉冀　郑培明　郑韫瑜 (常务)

编　委： (按姓氏笔划为序)

李大潜　余跃年　尚汉冀　郑培明

郑韫瑜　徐诚浩　裘星熙

策划： 应兴国

《保险精算丛书》前言

保险，作为商品社会中处理风险的一种有效方法，已被全世界所普遍采纳。在现代保险业蓬勃发展的进程中，科学的理论和方法，特别是精确的定量计算，起着十分重要的作用。保险业运营中的一些重要环节，如新险种的设计、保险费率和责任准备金的计算、分保额的确定、养老金等社会保障计划的制定等等，都需要由精算师 (Actuary) 依据精算学 (Actuarial Science) 原理来分析和处理。有鉴于此，许多发达国家都以法律形式规定，保险公司的营业报告必须由精算师签字方为有效。这也是国家对保险业进行调控管理的一种手段。

所谓精算学，实际上是将数学方法应用于金融保险所形成的一套理论体系。它的基础包括精算数学、利息理论、风险理论、人口数学、修匀数学、生存模型和生命表构造等等，还包括一些更专门的内容。这一套理论的重要性和正确性，已经得到国际社会的公认。

在我国，虽然早在 1949 年就由中央人民政府批准成立了中国人民保险公司，但是，由于种种历史原因，在相当长一段时间内我国的保险业发展缓慢，人才培养远不能适应实际需要。特别是精算学的研究和精算人才的培养，未得到应有的重视。在保险业的实际运作中，也很少严格按照精算学的原理办事。这一切都影响了我国保险业的进一步发展及与国际接轨。这种情况已引起保险界、教育界和学术界的注意，正在采取积极措施改变现状。刚刚颁布的《保险法》更明确规定："经营人身保险业务的保险公司，必须聘用经金融监督管理部门认可的精算专业人员，建立精算报告制度。" 在此情况下，迫切需要引进国际上先进的精算学

理论，并结合我国的实际加以应用，本丛书就是在这样的背景下翻译出版的。

《保险精算丛书》(第一辑)是由复旦大学数学系、中国人民保险公司上海市分公司(以下简称人保上海分公司)合作翻译的，由上海科学技术出版社出版。全国政协副主席、中科院院士苏步青为丛书题写书名；复旦大学研究生院院长、中科院院士李大潜担任丛书主编；中国人民保险公司上海市分公司总经理何静芝、副总经理钱建中，上海市新闻出版局局长徐福生担任丛书总顾问。上海是我国保险业的发源地之一，历来是保险业的中心。成立于 1950 年的人保上海分公司，经过 45 年艰难曲折的发展，业务有了很大开拓，1994 年已实现业务收入 30 亿元人民币，占上海保险市场的 80% 。根据市场的需要，公司已开办了财产、人身、责任、信用四大类约 200 多个险种。特别是作为公司主要业务之一的国内人身保险业务，1994 年的业务收入已近 12 亿元。公司所开设的人身险种类也从 1982 年时的一种，扩展到各种形态的医疗保险、定期和终身保险及责任不同的各种人身意外伤害保险等多个品种，并逐步形成系列化。上海保险市场虽然在不断扩大，但竞争也日趋激烈。特别是一些实力雄厚的国际著名大保险公司的进入，促使国内各保险公司采取有力措施不断提高从业人员的业务素质，包括学习精算知识和培养精算人才。正是由于这样的需要，人保上海分公司决定与复旦大学数学系联手，在上海科学技术出版社的积极支持下，翻译了这套《保险精算丛书》。

复旦大学数学系不仅在数学的基础理论研究方面成就卓著，而且历来重视数学在国民经济中的应用，并取得多项重大研究成果。近年来，他们为了拓宽数学应用的领域，又开辟了精算学研究的新方向，并进行了大量的实际工作。他们在数学系研究生和本科生中开设了有关精算的课程和专题讨论，努力培养精算人才；他们还与各大保险公司合作，从事保险精算实际课题的研究，招收应用数学(保险)大专班，举办面向社会的保险精算培训班，培

训了一批人员参加 A.S.A (北美精算师学会准会员) 资格考试 (该项考试的上海考点就设在复旦大学内), 并于第一期考试中取得通过率超过 90% 的优异成绩。与人保上海分公司合作翻译这套《保险精算丛书》，不仅是复旦数学系理论和实践相结合的一项新的举措，也是他们面向社会培养国家急需的精算人才的重要措施。

"保险精算丛书" (第一辑) 共六本，分别为：

《利息理论》, S.G. 凯利森著, 尚汉冀译;

《风险理论》, N.L. 鲍尔斯著, 郑韫瑜、余跃年译;

《精算数学》, N.L. 鲍尔斯著, 余跃年、郑韫瑜译;

《人口数学》, R.L. 布朗著, 郑培明译;

《修匀数学》, D. 伦敦著, 徐诚浩译;

《生存模型》, D. 伦敦著, 陈子毅译。

所依据的原书均是北美精算师学会 (Society of Actuaries) 为其准会员 (A.S.A) 资格考试所指定的教材和参考书，具有一定的权威性。阅读这套丛书，不论对读者了解和掌握精算学基本原理并应用于保险业实践，还是对读者准备参加 A.S.A 资格考试 (该项考试在中国的北京、上海、天津、长沙等地已设有考点), 均会有很大帮助。

保险精算在我国是一项刚刚起步的新事物，这套丛书是高等院校、保险公司和出版社三方共同合作，编写翻译出版学术水平较高、填补国家缺门的专业书籍的一种有益的探索。我们热诚希望广大读者提出宝贵意见，以利于我们改进工作，做好这套丛书的出版工作，促进保险精算事业在中国的发展。

编者谨识

1995 年 11 月于上海

第一章　利息的度量

§1.1　引　言

"利息"一词可以定义为向人借资本以供自用者给予出借资本者的报酬。这样，利息可被视为借款者付给出借者的租金，用以赔偿出借者由于不再能使用这笔出借的资本而蒙受的损失。从理论上说，资本和利息不一定要是同类的东西。例如，农夫 A 可以出借一台拖拉机给农夫 B, 用以收割 B 的小麦，而 B 则用收割到的小麦的一定的百分比给 A 作为回报。在这个例子中，拖拉机是资本而一部分小麦则是利息。然而，在几乎所有的实际应用中，资本和利息都是用货币来表示的。

在第一章中，将分析利息的各种定量的度量。本章中包括了利息度量中所涉及的大多数基本原则。第二章至第八章则详细描述这些基本原则并将其拓展到更复杂的金融业务之中。这些章节研究计算利息及借款方向贷款方偿还本金和利息的各种方法。

第一至第八章在本质上涉及利息在决定性基础上的 *数学理论* 。第九章向读者介绍利息的 *经济与金融* 理论及相关的论题。最后，第十章则是从 *随机* 的角度而不是 *决定性* 的角度来处理利息。

§1.2　积累函数与金额函数

一笔通常的金融业务可视为投资一定数量的钱款以产生利息。例如，某人可在银行投资于一储蓄帐户。初始投资的金额 (资本) 称为 *本金*, 而过了一定时期后收到的总金额称为 *积累值*, 积累值与本金的差额就是 *利息的金额*, 也就是投资期间所得到的 *利*

息。

现在让我们假定，一旦给定了原始投资的本金数额，则在此后任何时刻的积累值均可确定下来。我们还假定在投资期间不再加入或抽回本金，也就是说，资金数额的任何变化严格地说都是由利息的效应而造成的。以后我们将会放松这一假设而允许在投资期间加入或抽回本金。

设 t 为从投资之日算起的时间，在理论上，时间可以用许多不同的单位来度量，例如，日、月、十年等等。用来度量时间的单位称为“*度量时期*”或“*时期*”。最常用的度量时期是 1 年，以后除非另外申明均假设如此。

考虑投资 1 单位的本金。我们将原始投资为 1 时在任何时刻 t 的积累值定义为 *积累函数* $a(t)$ 。这个函数具有哪些性质呢？

1. 显然 $a(0)=1$ 。

2. $a(t)$ 通常是递增函数。当 t 增加时函数值减少将意味着利息为负。虽然负利息在数学上是可能的，但实际遇到的大多数情形不会如此。然而，确实在有些情况下会出现负利息，例如，一笔投资资金在经过一定时间后却亏本了。函数值为常数将意味着利息为零，这种现象偶然也会发生。

3. 如果利息象通常那样连续增加，此函数将为连续函数。然而，确实也有这样的情形：利息在支付日期之间并不连续增加，此时 $a(t)$ 具有间断性。

一般说来，原始投资不是 1 单位而是金额为 $k>0$ 。今定义一个 *金额函数* $A(t)$, 它给出原始投资为 k 时在时刻 $t\geq 0$ 的积累值。于是有

$$A(t)=k\cdot a(t) \tag{1.1}$$

及

$$A(0)=k.$$

上面所列举的 $a(t)$ 的第 2 条和第 3 条性质显然对 $A(t)$ 也是成立的。

将从投资日起第 n 个时期所得到利息金额记为 I_n 。则

$$I_n = A(n) - A(n-1) \quad 对整数 n \geq 1. \tag{1.2}$$

应当指出 I_n 包括着利息在一个时间区间内的效应，而 $A(n)$ 则是在某一特定时刻的量。

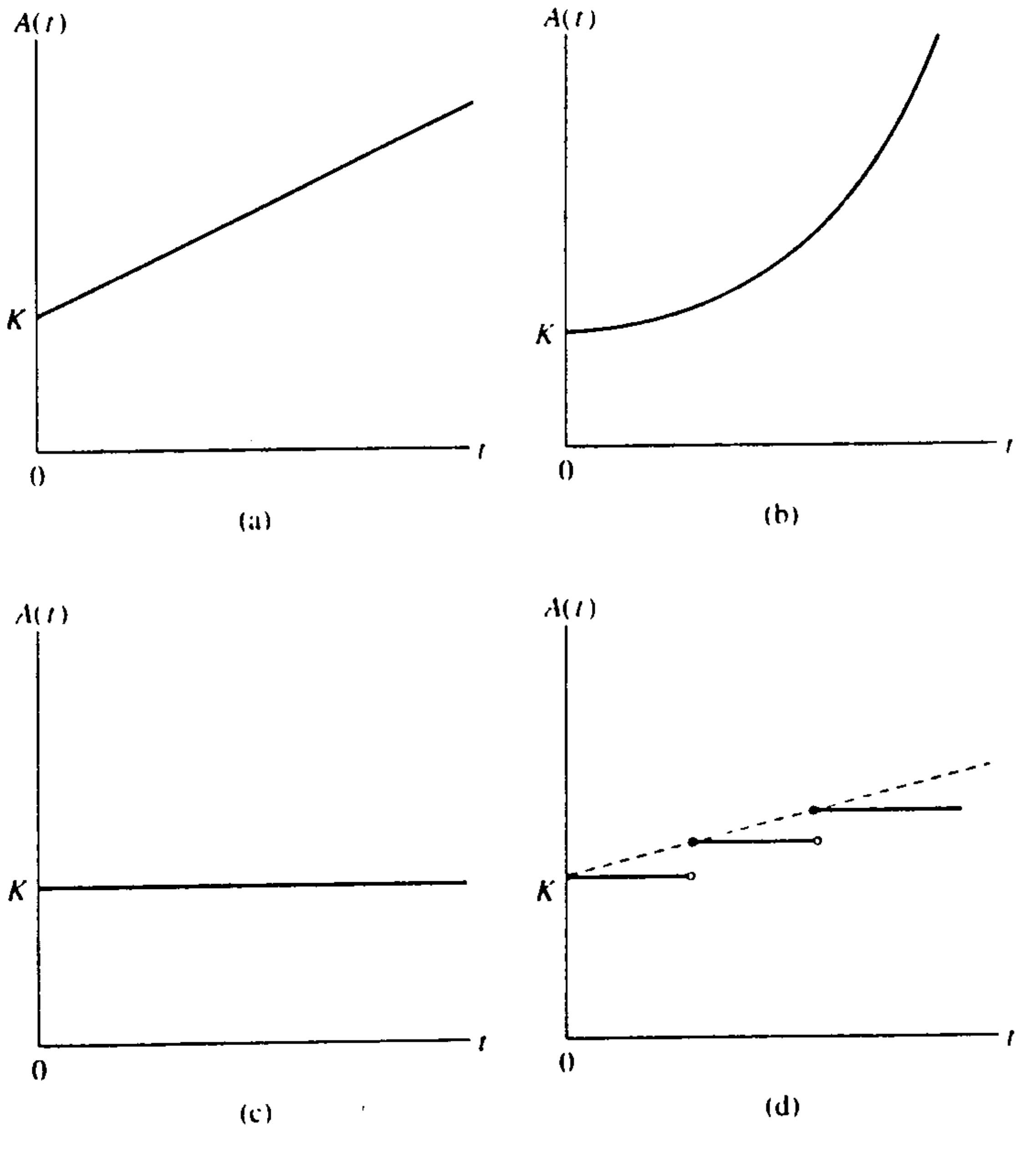

图 1.1　四例金额函数

实际上，积累函数可视为金额函数取 $k=1$ 的特殊情形。然而，积累函数本身也是足够重要，以致在本章的余下部分保持它

单独的定义。在许多情形下，积累函数和金额函数可以互相替换使用。

图 1.1 表示金额函数的四个例子。图 (a) 是一线性金额函数。图 (b) 是非线性的，此处为一指数曲线。图 (c) 为一水平的金额函数，即斜率为零。这一图形表示这样一种金额函数，其本金不产生利息。图 (d) 所示的金额函数，其利息不是连续地产生，而是在离散的时段内产生，在利息的支付日期之间不产生利息。

在下节中，将从积累函数展开利息的各种度量。在实践中，两种特定的积累函数可应付出现的大多数情形；虽然如此，读者仍应理解本节中定义的一般积累函数的性质，并能运用它。

§1.3　实质利率

利息的第一种度量称为*实质利率*，并记为 i，其精确定义为：

实质利率 i 是指在某一时期开始时投资 1 单位本金时，在此时期内应获之利息，此处利息是在期末支付的。

注意从积累函数来看，此定义等价于说

$$i = a(1) - a(0)$$

或

$$a(1) = 1 + i. \tag{1.3}$$

对此定义以下几点是重要的：

1. “实质”一词的使用在直观上是不明显的。用于利率的这一术语是指利息在每一度量时期之末支付。这与“名义”利率不同，后者 (在 1.8 节中考虑) 利息的支付比每个度量时期一次更为频繁。

2. 实质利率常用百分比来表示，例如 $i = 8\%$ 。实质利率作为百分比这一概念与前面给出的实质利率定义并无矛盾，在那个定义中利率为一定的金额，而象 8% 可以视为 .08 本金单位。

3. 本金在整个时期内视为常数，即在此期间既无新的本金加入也不抽回本金。

4. 实质利率是一种度量，其中利息在期末支付。这种叙述的重要意义并非一望而知，但在 1.7 节中将变得明显起来，在那一节中将描述一种利息在期初支付的状况。

实质利率也可用金额函数来确定如下：

$$\begin{aligned} i &= \frac{(1+i)-1}{1}=\frac{a(1)-a(0)}{a(0)} \\ &= \frac{A(1)-A(0)}{A(0)}=\frac{I_1}{A(0)}. \end{aligned} \tag{1.4a}$$

这样就可给出另外一种定义：

实质利率 i 是某时期内得到利息的金额与此时期开始时投资的本金金额之比。

前面所讲的四点对此定义也同样适用。

实质利率可以对任何度量时期进行计算。设 i_n 为从投资日算起的第 n 个时期的实质利率，则

$$i_n=\frac{A(n)-A(n-1)}{A(n-1)}=\frac{I_n}{A_{n-1}} \quad 对整数n \geq 1. \tag{1.4b}$$

由此看来，公式 (1.4a) 中的 i 表示为 i_1 更为合适。

虽然公式 (1.4b) 允许对不同的 n 有不同的实质利率 i_n，但在 1.5 节中将说明，对某一种非常重要的积累函数来说，实质利率对各个连续度量时期，即所有整数 $n \geq 1$ 保持为常数。

§1.4 单 利

前面已指出， $a(0)=1$ 及 $a(1)=1+i$ 。有无穷多种积累函数会通过这两点。其中有两种在实际中最为重要。本节将讨论第一种即单利，而 1.5 节中将讨论第二种即复利。

考虑投资 1 单位，使在每一时期中得到的利息为常数。1 单位的积累值在第一时期末为 $1+i$, 在第二时期末为 $1+2i$, 如此等等。这样，对一般情形，我们有线性积累函数

$$a(t)=1+it \quad 对整数 t\geq 0. \tag{1.5}$$

象这种类型产生的利息称为 *单利* 。

容易指出，常数单利并不意味着实质利率也为常数。设 i 为单利的利率，而 i_n 为第 n 时期的实质利率 (按 1.3 节的定义) 。则有

$$\begin{aligned} i_n &= \frac{a(n)-a(n-1)}{a(n-1)} \\ &= \frac{[1+in]-[1+i(n-1)]}{1+i(n-1)} \\ &= \frac{i}{1+i(n-1)}. \end{aligned} \tag{1.6}$$

对于整数 $n\geq 1$, 它是 n 的递减函数。这样，常数的单利意味着递减的实质利率。

单利的积累函数仅对 $t\geq 0$ 的整数值有定义。然而，可以很自然地将此定义拓展到 $t>0$ 的非整数值。这相当于把利息按比例地分配给一时期内的任何部分。如果是这种情况，金额函数如图 1.1(a) 所示。如果利息仅对一完整的时期才产生，而并不是分配到时期的各部分，则金额函数将是一个有间断的阶梯函数，见图 1.1(d) 。除非另外申明，在单利中，总认为利息是按比例分配到时期的各部分。

对于非整数的 t 值定义 $a(t)$ 的一个更严格的数学方法，可以从我们要求单利具有的下列性质出发：

$$a(t+s)=a(t)+a(s)-1 \quad 对 t\geq 0 及 s\geq 0. \tag{1.7}$$

本质上，公式 (1.7) 告诉我们，对于单利而言，1 单位的原始投资经过 $t+s$ 时期得到的利息，等于它经过 t 个时期得到的利息加上经过 s 个时期所得到的利息。在公式 (1.7) 中 -1 是需要的，因为假若不然，则在方程右端就会有一个 2 单位的投资了。

假设 $a(t)$ 为可导，由导数定义有

$$\begin{aligned}
a'(t) &= \lim_{s\to 0}\frac{a(t+s)-a(t)}{s} \\
&= \lim_{s\to 0}\frac{[a(t)+a(s)-1]-a(t)}{s} \\
&= \lim_{s\to 0}\frac{a(s)-1}{s} \\
&= \lim_{s\to 0}\frac{a(s)-a(0)}{s} \\
&= a'(0),\ \text{这是一个常数。}
\end{aligned}$$

在上式中以 r 代 t, 并将等式两端从 0 到 t 积分，就有

$$\begin{aligned}
\int_0^t a'(r)dr &= \int_0^t a'(0)dr \\
a(t)-a(0) &= t\cdot a'(0) \\
a(t) &= 1+t\cdot a'(0).
\end{aligned}$$

若取 $t=1$ 并记得 $a(1)=1+i$, 则有

$$a(1)=1+i=1+a'(0),$$

因而 $a'(0)=i$ 。

将此代回原式有类似的结果

$$a(t)=1+it \quad 对t\geq 0. \tag{1.5}$$

上述推导并不依赖于 t 为正整数，而是对一切 $t\geq 0$ 为有效。

例 1.1　若单利年息为 8%, 求投资 \$2000 在 4 年后的积累值。

答案为 $2000[1+(0.08)(4)]=\$2640$ 。注意所得利息金额为 $2640-2000=\$640$ 。这可以由 $2000(0.08)(4)$ 或一般地 $A(0)\cdot it$ 得到。在初中与高中里也讲过类似的结果，只是所用的符号不同。

$$I=Prt.$$

这就是说，利息金额等于本金金额、利率与时期的乘积。

§1.5　复　利

单利具有这样的性质：利息并不再投资以赚取附加的利息。例如，考虑 \$100 的本金以 10% 的单利投资 2 年。对于单利而言，投资者在两年中每一年末将收入 \$10, 但实际上，投资者在第 2 年中是有 \$110 可用以投资的。显然，如果用 10% 的利率投资 \$110 将会更好，因为投资者将在第 2 年收入 \$11 而不是 \$10 。

复利 理论用假设得到的利息自动再投资来处理这个问题。“复”这个词在这里是指利息再投资以得到额外利息的过程。对复利而言，在任何时侯本金和到该时为止得到的利息，总是都用去投资。

现在需要对复利找出积累函数。考虑投资 1, 它在第一时期末积累值为 $1+i$ 。这一余额 $1+i$ 可以在第二时期开始时作为本金，并在第二时期内赚取利息 $i(1+i)$ 。第二时期末的余额将为 $(1+i)+i(1+i)=(1+i)^2$ 。类似地，余额 $(1+i)^2$ 可作为第三时期开始时的本金并在第三时期内赚取利息 $i(1+i)^2$ 。第三时期末的余额将为 $(1+i)^2+i(1+i)^2=(1+i)^3$ 。将此过程无限地继续下去我们得到

$$a(t)=(1+i)^t \quad 对整数 t\geq 0. \tag{1.8}$$

可以看出，常数的复利利率意味着实质利率也为常数，而且两者是相等的。设 i 为复利利率，而 i_n 为按 1.3 节定义的第 n 时期的实质利率，则有

$$i_n=\frac{a(n)-a(n-1)}{a(n-1)}=\frac{(1+i)^n-(1+i)^{n-1}}{(1+i)^{n-1}}=\frac{(1+i)-1}{1}=i.$$

它不依赖于 n。这样，虽然定义不同，复利利率与实质利率其实是相等的。

刚才得到的这个结果可以与 1.3 节中得到的结果相比较。在那里，单利的常数利率意味着递减的实质利率。这一结果直观上应该是明显的，因为随着投资时间的加长，单利对于投资者越来越不利。

复利的积累函数至今仅对 $t\geq 0$ 的整数值给出了定义，需要对 $t>0$ 的非整数值也定义积累函数。可以在类似于 1.4 节中对单利所用的基础上提出这一问题。

我们从要求复利具有的下述性质开始：

$$a(t+s)=a(t)\cdot a(s)\quad 对t\geq 0 及s\geq 0. \tag{1.9}$$

本质上，公式 (1.9) 告诉我们，对复利而言，初始投资 1 单位经过 $t+s$ 时期所得到的利息金额，等于这样一种利息金额：若投资在 t 时期末结束，并立即在同一时刻将积累值再投资附加的 s 个时期。

设 $a(t)$ 为可导，则由导数定义得

$$\begin{aligned}a'(t)&=\lim_{s\to 0}\frac{a(t+s)-a(t)}{s}\\&=\lim_{s\to 0}\frac{a(t)\cdot a(s)-a(t)}{s}\\&=a(t)\lim_{s\to 0}\frac{a(s)-1}{s}\\&=a(t)\cdot a'(0).\end{aligned}$$

这样

$$\frac{a'(t)}{a(t)}=\frac{d}{dt}\log_e a(t)=a'(0).$$

在上式中，将 t 换为 r, 并将等式两边从 0 到 t 积分，有

$$\begin{aligned}\int_0^t \frac{d}{dr}\log_e a(r)dr &= \int_0^t a'(0)dr\\ \log_e a(t)-\log_e a(0) &= t\cdot a'(0)\\ \log_e a(t)=t\cdot a'(0).\end{aligned}$$

(因 $\log_e a(0)=0$ 。)

若取 $t=1$ 并记住 $a(1)=1+i$, 则有

$$\log_e a(1)=\log_e(1+i)=a'(0).$$

代回原式有

$$\log_e a(t)=t\log_e(1+i)=\log_e(1+i)^t$$

或

$$a(t)=(1+i)^t \quad 对t\geq 0. \tag{1.8}$$

以上推导并不依赖于 t 为正整数，而是对一切 $t\geq 0$ 均有效。

除非另外申明，此处均假设对复利而言，利息在分数时期也都是按公式 (1.8) 产生的。这样金额函数是指数函数，且示于图 1.1(b) 。金额函数的这种指数形式并非不可预料，因为自然科学中遇到的许多增长曲线都是指数型的。

有些读者可能会感到困惑，因为一方面，我们说利息是在一时期之末支付的，而另一方面，利息又是连续产生的。初看起来，这两种说法是矛盾的。然而，这里其实并无矛盾。因为利息在分数时期也同在整数时期一样严格产生的。既然是这样，任何时刻的积累值在任一种观点下是相等的。