

卫星轨道姿态

动力学与控制

章仁为 编著

北京航空航天大学出版社



卫星轨道姿态动力学与控制

章仁为 编著

北京航空航天大学出版社

内 容 简 介

本书以中低轨道遥感卫星和静止轨道通信卫星为重点,系统地阐述卫星轨道和姿态动力学的基本原理、轨道和姿态控制的设计思想及设计方法。主要内容包括:卫星轨道的基本特性、特殊轨道的设计,轨道摄动分析,入轨控制和轨道保持控制;卫星姿态运动特性,姿态确定,姿态稳定和机动的控制方式。内容丰富,文笔流畅,工程实用性强。

本书可作为有关高等理工科院校研究生的教材,也可供从事卫星研制和卫星应用工作的研究人员和工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

卫星轨道姿态动力学与控制/章仁为编著. —北京:北京航空航天大学出版社,1998.5

ISBN 7-81012-721-7

I.卫… I.章… III.①卫星姿态-动力学②人造卫星-姿态飞行控制 IV.V412.4

中国版本图书馆CIP数据核字(98)第10148号

卫星轨道姿态动力学与控制

章仁为 编著

责任编辑 王小青

责任校对 李宝田

北京航空航天大学出版社出版发行

(北京学院路37号,100083, 发行部电话 62015720)

涿州市新华印刷厂印装 各地书店经销

开本:787×1092 1/16 印张:20.75 字数:526千字

1998年8月第1版 1998年8月 第1次印刷 印数:1500册

ISBN 7-81012-721-7/V·047 定价:32.00元

前 言

卫星的飞行轨道和姿态指向是决定卫星应用功能的两项首要因素,是卫星总体工程设计的重要内容,直接影响卫星应用有效载荷的设计和卫星应用性能指标的制定。卫星被发射投入应用后,卫星轨道和姿态控制是卫星运营操作和管理的核心内容,直接影响卫星应用任务的实践和卫星的在轨寿命。

在地球引力场中的轨道动力学是认识、设计和控制卫星轨道飞行的理论基础。轨道特性的物理量描述是首要问题,它不仅是轨道控制工程操作的依据,而且是卫星姿态定向的参考基准。轨道摄动是轨道动力学的重要内容,是不同轨道不同特色的体现。对于轨道飞行和运营,轨道摄动起到有利和不利两方面的影响:有利影响是,由于摄动作用,某些轨道具备非常出色的性质,为卫星应用提供了良好的条件;不利影响是,轨道摄动又是轨道保持的主要障碍。轨道控制是卫星轨道运营的重要任务,根据不同轨道任务和动力学特点,建立轨道控制的模型,作为工程实现的基础。同时,基于轨道动力学的轨道定轨是控制的前提。

为实现轨道操作和完成卫星应用任务,卫星姿态应正确地定向在给定方向上或从原方向机动至另一指向或同时进行多目标指向。因此,卫星姿态定向问题与卫星的构形密切相关,是卫星系统设计的重要内容。基于刚体转动动力学的卫星姿态动力学是姿态稳定和控制的理论基础。它包含姿态的物理量描述,姿态运动的动力学分析和计算,以及多体姿态动力学的建模。作为姿态控制前提的姿态测定是基于多参考矢量定姿或状态参数估计的机理,可归纳出若干典型的工程实现模式。当今,卫星姿态控制的主要方式是基于角动量交换机理,同样可归纳出若干典型的包含动量飞轮的工程实现模式。在姿态测定、姿态动力学和姿态控制等建模的基础上,可运用古典控制或现代控制理论方法,建立高性能的卫星姿态控制系统。

本书限于地球应用卫星,并主要以中、低轨道遥感卫星和地球同步轨道通信卫星为研究对象,不涉及月球探测和行星际探测,也不涉及载人航天的两大课题

——空间交会和返回再入,但绕地球飞行的主题是共同的。

本书的原著是《静止卫星的轨道和姿态控制》(1987)。该书受到有关高等院校和卫星研制部门的普遍欢迎,作者常被告之,该书是卫星工作中常备的参考资料。作者经常接到索书和再版的询问。经同事和朋友们的鼓动,于1995年秋着手修订和补充工作。为适应空间卫星应用的发展,在书中纳入中、低轨道卫星的控制问题,将书名作了更改;同时根据教学实践,将章节作了适当调整。

针对卫星工程教学和设计的需求,本书以空间动力学与控制相结合的方式、以原理与应用相结合的方式,系统地阐述卫星轨道和姿态的理论概念以及控制方案的设计原理和方法。

本书的宗旨是为空间飞行器设计专业的研究生提供教材,为卫星研制、卫星运营和应用的科技人员提供设计参考资料。

本书得到北京航空航天大学沈士团校长、出版社许传安社长和王小青副总编的支持,作者谨向他们表示衷心感谢。

限于作者水平,文中欠妥及错误之处,敬请读者批评指正。

作 者

1997年4月于北航

目 录

第一章 卫星轨道的基本特性	(1)
1.1 二体轨道特性	(1)
1.1.1 卫星轨道要素	(2)
1.1.2 卫星位置和速度公式	(7)
1.1.3 卫星轨道定轨公式	(11)
1.2 星-地空间几何	(13)
1.2.1 星下点轨迹	(13)
1.2.2 可见覆盖区	(13)
1.2.3 通信波束服务区	(15)
1.2.4 遥感图像几何定位	(16)
1.3 发射窗口	(17)
1.3.1 发射三要素	(17)
1.3.2 阳光窗口	(18)
1.3.3 平面窗口	(21)
1.4 太阳同步轨道	(22)
1.5 临界和冻结轨道	(24)
1.6 回归轨道	(25)
1.7 静止轨道	(28)
1.8 星座轨道	(33)
1.8.1 全球连续覆盖卫星群	(33)
1.8.2 地球同步卫星群	(36)
第二章 卫星轨道的摄动	(39)
2.1 卫星轨道摄动方程	(39)
2.1.1 卫星的球坐标运动方程	(39)
2.1.2 卫星轨道要素的摄动方程	(41)
2.2 地球形状摄动	(48)
2.2.1 地球引力场的位函数	(48)
2.2.2 近地轨道的地球形状摄动	(50)
2.2.3 静止轨道的地球形状摄动	(52)
2.3 日、月摄动	(58)
2.3.1 日、月天文常数	(58)
2.3.2 日、月摄动引力	(60)

2.3.3	轨道平面内摄动	(62)
2.3.4	轨道倾角摄动	(63)
2.4	太阳光压摄动	(67)
2.5	大气摄动	(70)
第三章	卫星轨道的控制	(72)
3.1	轨道机动的基本关系	(72)
3.1.1	单脉冲变轨	(72)
3.1.2	双脉冲——霍曼变轨	(75)
3.1.3	双脉冲——拱线变轨	(77)
3.2	近地圆轨道的保持	(79)
3.3	静止卫星的入轨控制	(82)
3.3.1	上升段	(83)
3.3.2	近地点射入	(83)
3.3.3	远地点射入	(84)
3.3.4	漂移控制	(87)
3.3.5	定点置入	(89)
3.4	静止卫星的入轨最优化	(100)
3.4.1	射入误差的影响	(100)
3.4.2	远地点射入的最优偏置	(102)
3.4.3	最优远地点射入参数	(105)
3.4.4	多次远地点射入	(108)
3.5	静止卫星的位置保持	(110)
3.5.1	静止轨道的控制特性	(111)
3.5.2	东西位置保持	(115)
3.5.3	南北位置保持	(118)
第四章	卫星轨道的确定	(120)
4.1	地面站测固	(120)
4.2	初始轨道的确定	(121)
4.2.1	单站定轨	(121)
4.2.2	三站定轨	(124)
4.3	轨道改进	(127)
4.4	自主定轨	(129)
4.4.1	利用星敏感器的自主定轨	(129)
4.4.2	利用导航星的自主定轨	(132)
第五章	卫星姿态动力学	(137)
5.1	参考坐标系	(137)

5.2	姿态的描述	(139)
5.2.1	方向余弦式	(140)
5.2.2	欧拉角式	(141)
5.2.3	欧拉轴/角参数式	(143)
5.2.4	欧拉四元素式	(145)
5.3	姿态运动学方程	(147)
5.4	姿态动力学方程	(149)
5.5	自旋卫星姿态运动特性	(155)
5.5.1	轴对称卫星的自由运动	(155)
5.5.2	非轴对称卫星的自由运动	(161)
5.5.3	Poinsot 运动	(162)
5.5.4	绕主轴旋转的稳定性	(166)
5.6	双旋卫星姿态稳定性	(167)
5.6.1	双旋卫星的章动特性	(168)
5.6.2	能量耗散分析	(170)
5.7	三轴稳定卫星姿态运动特性	(172)
5.7.1	三轴姿态的稳定性	(173)
5.7.2	动量卫星姿态运动特性	(175)
5.7.3	动量控制原理	(177)
5.8	空间力矩	(180)
5.8.1	太阳光压力矩	(180)
5.8.2	重力梯度力矩	(181)
5.8.3	地磁力矩	(183)
5.8.4	气动力矩	(184)
第六章	卫星姿态的确定	(185)
6.1	自旋姿态的参考测量	(185)
6.1.1	太阳方向的测量	(186)
6.1.2	天底方向的测量	(187)
6.1.3	陆标和星光方向的测量	(189)
6.2	自旋姿态的几何确定	(191)
6.2.1	双矢量确定姿态的算法	(191)
6.2.2	姿态确定的太阳-地球方式	(195)
6.2.3	双矢量确定姿态的最优估计	(196)
6.2.4	姿态测量几何的分析	(197)
6.3	三轴姿态的参考测量	(202)
6.3.1	天底方向的测量	(202)
6.3.2	太阳方向的测量	(204)
6.3.3	星光方向的测量	(207)

6.3.4	地磁场方向的测量	(208)
6.3.5	天线电信标方向的测量	(208)
6.3.6	惯性参考方向的测量	(210)
6.4	三轴姿态的代数法确定	(212)
6.4.1	双矢量确定姿态及精度估计	(212)
6.4.2	多矢量确定姿态	(213)
6.5	姿态确定的状态估计	(214)
6.5.1	状态估计法的应用	(214)
6.5.2	自旋姿态的估计	(216)
6.5.3	含陀螺的三轴姿态估计	(217)
6.5.4	无陀螺的三轴姿态估计	(222)
第七章	动量卫星的姿态控制	(223)
7.1	自旋卫星的被动章动阻尼	(223)
7.1.1	阻尼作用	(223)
7.1.2	摆式阻尼器	(226)
7.1.3	液体阻尼器	(228)
7.2	双旋卫星的主动章动阻尼	(230)
7.2.1	平台质量特性的阻尼作用	(230)
7.2.2	章动反馈的阻尼作用	(232)
7.3	自旋卫星的喷气控制	(234)
7.3.1	喷气章动控制	(234)
7.3.2	喷气进动控制	(236)
7.4	动量轮卫星的喷气控制	(239)
7.4.1	偏置外力矩控制	(239)
7.4.2	伪速率喷气控制	(243)
7.4.3	双脉冲喷气控制	(244)
7.4.4	极限环	(247)
7.5	单自由度动量控制	(249)
7.5.1	单自由度动量构形	(249)
7.5.2	俯仰控制	(250)
7.5.3	滚动-偏航控制	(250)
7.5.4	非最小相位控制	(253)
7.6	两自由度动量控制	(255)
7.6.1	双轮动量控制	(255)
7.6.2	双框架动量控制	(255)
7.7	失控和定向恢复	(258)
7.7.1	卫星的平旋运动	(258)
7.7.2	常值力矩法	(260)

7.7.3	脉冲力矩法	(261)
7.7.4	动量转移法	(262)
第八章	零动量卫星的姿态控制	(265)
8.1	重力梯度被动稳定	(265)
8.1.1	重力梯度卫星的姿态稳定性	(265)
8.1.2	天平动的捕获	(267)
8.1.3	天平动的阻尼	(268)
8.2	全喷气控制	(269)
8.3	反作用轮动量控制	(270)
8.3.1	反作用轮的控制模型	(271)
8.3.2	三正交反作用轮系统	(272)
8.3.3	四斜装反作用轮系统	(273)
8.4	力矩陀螺动量控制	(278)
8.4.1	单框力矩陀螺群的构形	(279)
8.4.2	单框力矩陀螺群的构形奇异	(285)
8.4.3	单框力矩陀螺群的控制律	(291)
8.5	姿态大角度机动控制	(293)
第九章	挠性卫星的姿态控制	(297)
9.1	带挠性附件的卫星姿态动力学	(297)
9.1.1	系统动力学方程	(298)
9.1.2	挠性位移简化模型	(300)
9.1.3	挠性附件模态分析	(302)
9.1.4	混合坐标动力学方程	(303)
9.2	控制模型	(306)
9.2.1	共位模型	(307)
9.2.2	非共位模型	(311)
9.3	控制回路设计分析	(312)
9.3.1	比例-微分控制	(312)
9.3.2	模态溢出	(312)
9.3.3	增益-相位稳定	(313)

参考文献

第一章 卫星轨道的基本特性

关于人造地球卫星绕地球运动的问题,在天体力学、卫星轨道运动理论等专著中有详尽的论述,可参看文献[1~3]。在说明卫星轨道的设计和控制问题时,常引用卫星轨道运动的基本概念和公式。本章扼要叙述卫星轨道的基本特性,星-地空间几何和若干特殊轨道的特点。

1.1 二体轨道特性

在卫星轨道的分析问题中,常假定卫星在地球中心引力场中运动,忽略其他各种摄动力的因素(如地球形状非球形、密度分布不均匀引起的摄动力和太阳、月球的引力等)。这种卫星轨道称为二体轨道,分析这种轨道的特性称为二体问题。二体轨道代表卫星轨道运动的最主要特性。

令二体的质量分别为 m_1, m_2 , 两者的集中质点相对空间惯性参考点 O 的距离矢量分别为 r_1, r_2 , 见图 1.1-1, 两者之间的相对距离矢量为 r , 由 m_1 指向 m_2 , 两者之间的相互引力为 F_1, F_2 , 有

$$F_1 = \frac{Gm_1m_2}{r^2} \cdot \frac{r}{r}$$

$$F_2 = -F_1$$

式中, G 为万有引力常数。由此, 两者对惯性空间的运动方程为

$$m_1 \frac{d^2 r_1}{dt^2} = Gm_1m_2 \frac{r}{r^3}$$

$$m_2 \frac{d^2 r_2}{dt^2} = -Gm_1m_2 \frac{r}{r^3}$$

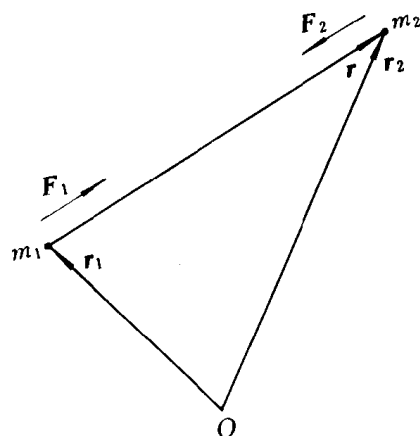


图 1.1-1

将上面两式相减, 并引用几何关系 $r_1 + r = r_2$, 可得相对运动方程

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{d^2 r_2}{dt^2} - \frac{d^2 r_1}{dt^2} = -G(m_1 + m_2) \frac{r}{r^3}$$

令 m_1 为地球质量, 有 $m_1 = m_e \gg m_2$, 则描述卫星 m_2 相对地球的二体问题基本方程为

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = -\frac{\mu}{r^2} \cdot \frac{r}{r} \tag{1.1-1}$$

式中, $\mu = Gm_e$ 是地心引力常数, $\mu = 398\ 600.44 \text{ km}^3/\text{s}^2$ 。作用在卫星上的地球中心引力仅与卫星的质量成正比, 与卫星的地心距的平方成反比; 由引力产生的加速度幅值 $(-\mu/r^2)$ 与卫星质量无关, 引力加速度的方向与地心距单位矢量 (r/r) 的方向相反。二体运动方程(1.1-1)的形式简单, 但其精确求解较复杂。

早在 17 世纪初, 通过对行星运动的精确观测和数据分析, 开普勒总结出行星运动的三大定律——开普勒三大定律。

第一定律：各行星的轨道均为椭圆，太阳位于该椭圆的一个焦点上。

第二定律：行星与太阳的连线在相等时间内扫过的面积相等。

第三定律：行星轨道周期的平方与行星至太阳平均距离的三次方成正比。

二体运动方程的解与此三大定律完全符合，因此二体轨道又称为开普勒轨道。

1.1.1 卫星轨道要素

为描述卫星在空间的位置，定义赤道惯性坐标系 $OXYZ$ ：坐标原点 O 在地球中心； X 轴沿地球赤道面和黄道面的交线，指向春分点 Υ ； Z 轴指向北极； Y 轴在赤道平面上垂直于 X 轴，见图 1.1-2。在此坐标系中卫星的运动方程式(1.1-1)可以分解为

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} + \frac{\mu x}{r^3} &= 0 \\ \ddot{y} + \frac{\mu y}{r^3} &= 0 \\ \ddot{z} + \frac{\mu z}{r^3} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.1-2)$$

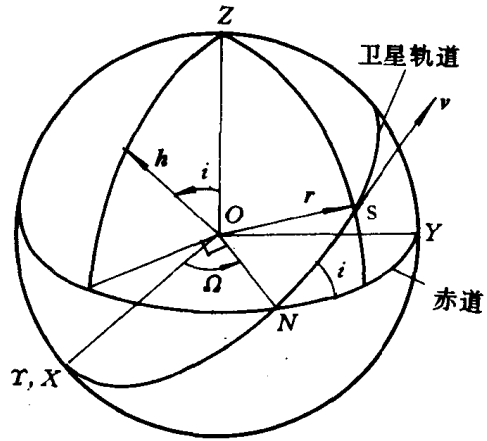


图 1.1-2

式中 $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}$ 。这是一个六阶的非线性微分方程，如给定了六个初始条件—— t_0 时刻卫星的位置 $x(t_0), y(t_0), z(t_0)$ 和速度 $\dot{x}(t_0), \dot{y}(t_0), \dot{z}(t_0)$ ，则此方程组完全可解。这些初始条件确定六个积分常数，每个积分常数都描述卫星轨道的一种特性。

将方程组(1.1-2)各式交叉乘以 x, y, z ，再两两相减、消去 $\frac{1}{r^3}$ 项，可得

$$\begin{aligned} x\dot{y} - y\dot{x} &= 0 \\ y\dot{z} - z\dot{y} &= 0 \\ z\dot{x} - x\dot{z} &= 0 \end{aligned}$$

将这三个方程式各个进行积分得

$$\left. \begin{aligned} x\dot{y} - y\dot{x} &= c_1 \\ y\dot{z} - z\dot{y} &= c_2 \\ z\dot{x} - x\dot{z} &= c_3 \end{aligned} \right\} \quad (1.1-3)$$

c_1, c_2, c_3 是三个积分常数。再将以上各式顺序乘以 z, x, y ，然后相加，得

$$c_1 z + c_2 x + c_3 y = 0$$

这是一个平面方程，它说明在二体问题中卫星绕地球运转的轨道总是在一个平面上，积分常数 c_1, c_2, c_3 确定了卫星轨道平面在空间坐标中的位置。由图1.1-2可知，卫星相对于地心的动量矩 h 等于卫星地心矩矢量和速度矢量的矢积：

$$h = r \times v$$

根据矢积的公式，方程组(1.1-3)的左端是动量矩 h 在坐标轴上的分量 h_x, h_y, h_z ，并有 $h_x^2 + h_y^2 + h_z^2 = h^2$ 。式(1.1-3)表明，在地心中心引力场中，卫星相对地心的动量矩 h 保持恒定，其方向和幅值决定于积分常数 c_1, c_2, c_3 。显然，动量矩 h 的方向和卫星轨道面的法线是平行的，称 h 和

Z 轴的夹角为轨道倾角 i ; 轨道平面和地球赤道面的交线为节线 ON , 在图 1.1-2 中节点 N 为轨道的升交点, 节线 ON 与 X 轴的夹角称为升交点赤经 Ω , 这两个参数 (i, Ω) 确定了轨道平面在空间坐标中的方位。

从图 1.1-2 中可直接得到动量矩 h 的三个分量与 i, Ω 的关系:

$$\left. \begin{aligned} h_x &= h \sin i \sin \Omega \\ h_y &= -h \sin i \cos \Omega \\ h_z &= h \cos i \end{aligned} \right\} \quad (1.1-4)$$

或

$$i = \arccos\left(\frac{h_z}{h}\right), \quad \Omega = \arctan\left(\frac{-h_x}{h_y}\right)$$

因此, 积分常数 c_1, c_2, c_3 确定了与轨道特性直接有关的三个要素 i, Ω, h , 前两个决定轨道平面的方位, 第三个决定轨道的周期。

描述卫星在轨道平面内的运动只需用二维坐标。令此坐标为 (ξ, η) , 卫星的运动方程可写成

$$\ddot{\xi} + \frac{\mu}{r^3} \xi = 0$$

$$\ddot{\eta} + \frac{\mu}{r^3} \eta = 0$$

式中 $r = (\xi^2 + \eta^2)^{\frac{1}{2}}$, 再令 $\xi = r \cos \theta$, $\eta = r \sin \theta$, 将上式化成极坐标形式, 见图 1.1-3, 有

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\frac{\mu}{r^2} \quad (1.1-5)$$

$$r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 0 \quad (1.1-6)$$

式(1.1-6)的积分是

$$r^2\dot{\theta} = h \quad (1.1-7)$$

显然, 这个积分常数 h 就是卫星相对于地心的动量矩。参看图 1.1-3, 卫星在轨道平面上运动时, 在 Δt 时间内卫星从 B 点移动到 B' 点, 相应的地心距从 r 变到 r' , 三角形 OBB' 的面积等于

$$\Delta A = \frac{1}{2} r r' \sin \Delta \theta$$

此面积的变化率是

$$\frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{1}{2} r r' \frac{\Delta \theta \sin \Delta \theta}{\Delta t \Delta \theta}$$

取极限, 可得

$$\dot{A} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta} = \frac{1}{2} h \quad (1.1-8)$$

因此, 式(1.1-8)的几何意义是单位时间内向径 r 在轨道平面上扫过的面积是常数, 这就是开普勒第二定律。而动量矩的幅值 h 等于此面积速度的两倍。

利用式(1.1-7), 将式(1.1-5)中自变量替换为 θ , 可得

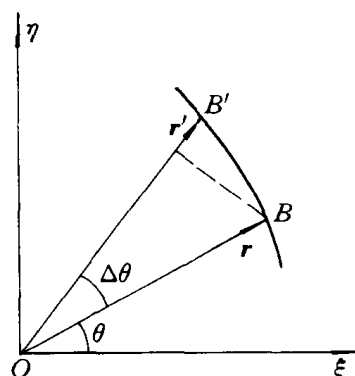


图 1.1-3

$$-\frac{1}{r^2} \frac{d^2 r}{d\theta^2} + \frac{2}{r^3} \left(\frac{dr}{d\theta} \right)^2 + \frac{1}{r} = \frac{\mu}{h^2}$$

上式可改写成 $\left(\frac{1}{r} \right)$ 的方程:

$$\frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{\mu}{h^2}$$

它的解是调谐函数,可以写成

$$\frac{1}{r} = \frac{\mu}{h^2} [1 + e \cos(\theta - \omega)]$$

e, ω 是两个积分常数,此方程又可改写成标准的极坐标形式:

$$r = \frac{p}{1 + e \cos(\theta - \omega)} \quad (1.1-9)$$

式中 $p = \frac{h^2}{\mu}$ 。这就是卫星的轨道方程,它说明卫星沿圆锥曲线运动,圆锥曲线的焦点位于极坐标的原点,也就是地心。对于地球卫星,此圆锥曲线是椭圆,而地球位于此椭圆的一个焦点上,这就是开普勒第一定律。由解析几何得知, e 是椭圆的偏心率, $e < 1$; p 是椭圆的半通径,是在半个椭圆内通过焦点 F 的垂线(垂直于椭圆的长轴)的长度。见图 1.1-4,半通径 p 和偏心率 e 与椭圆半长轴 a 、半短轴 b 的关系是

$$p = a(1 - e^2) = b \sqrt{1 - e^2} \quad (1.1-10)$$

$$e = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a} \right)^2}$$

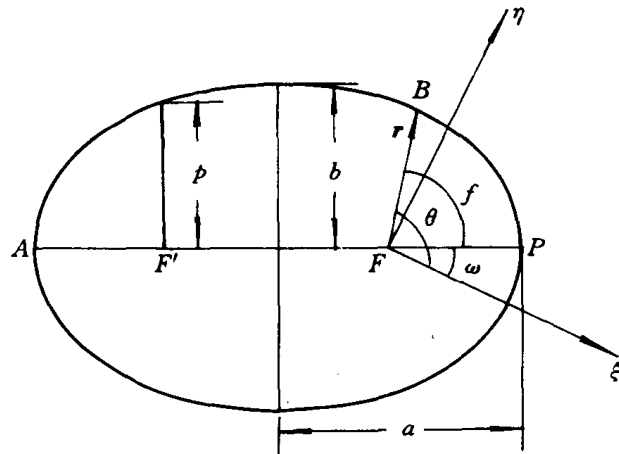


图 1.1-4

由于 $p = \frac{h^2}{\mu}$, 半长轴 a 与积分常数 h ($h = \sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}$) 的关系是

$$a = \frac{h^2}{\mu(1 - e^2)} \quad (1.1-11)$$

因为积分常数 e 是独立的,所以半长轴 a 与动量矩的幅值 h 是对应的。

在式(1.1-9)中,另一个积分常数是 ω 。当 $\theta - \omega = 0$ 时,卫星的地心距 r 为最小,该点称为近地点 P ; 当 $\theta - \omega = 180^\circ$ 时,地心距 r 为最大,该点称为远地点 A 。显然, A, P 点必定在椭圆的长

轴上,而极角 ω 决定了此椭圆长轴在轨道平面上的方向,称 ω 为近地点幅角;卫星相对于椭圆长轴的极角称为真近点角 f , $f = \theta - \omega$,随着卫星的运转,真近点角不断地增大。轨道方程式(1.1-9)可以写成

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos f} \quad (1.1-12)$$

卫星近地点($f=0$)和远地点($f=180^\circ$)的地心距 r_P, r_A 与半长轴和偏心率之间的关系是

$$r_P = a(1 - e), \quad r_A = a(1 + e) \quad (1.1-13)$$

$$e = \frac{r_A - r_P}{r_A + r_P} \quad (1.1-14)$$

令卫星绕地球一圈的周期为 T ,在这段时间内卫星向径扫过的面积等于椭圆的面积 πab 。根据式(1.1-8),有

$$\frac{\pi ab}{T} = \frac{1}{2}h$$

再利用式(1.1-10),(1.1-11)可求得卫星轨道的周期为

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} \quad (1.1-15)$$

上式表明,卫星轨道周期的平方和椭圆轨道的半长轴的三次方成正比,这就是开普勒第三定律。令卫星沿椭圆轨道运行的平均速率(即真近点角的角速率平均值)为 n ,则

$$n = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} \quad (1.1-16)$$

以上说明了卫星运动方程式(1.1-2)的五次积分,它们的五个积分常数 i, Ω, a, e, ω 决定了卫星轨道的几何形状,定义为轨道要素。还需确定第六个要素,得出在任何时刻卫星的位置。参看图 1.1-5,卫星的椭圆轨道有一个半径为 b 的内接圆和一个半径为 a 的外接圆,如果将卫星

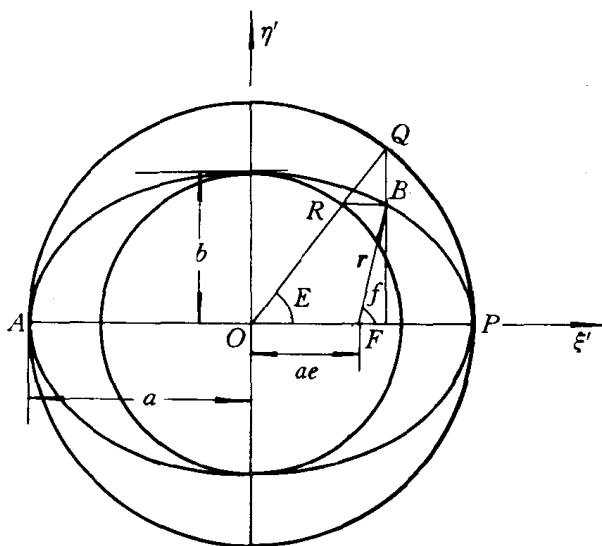


图 1.1-5

所在点 B 分别按垂直和水平方向投影到外圆和内圆上得 Q, R 两点,它们相对于椭圆中心的中心角是 E ,称为卫星的偏近点角。卫星在轨道平面上的直角坐标 (ξ', η') 中的位置可用偏近点

角的参数方程表示:

$$\xi' = a \cos E$$

$$\eta' = b \sin E$$

从几何图形可求得偏近点角 E 与真近点角 f 的关系是

$$a \cos E = ae + r \cos f \quad (1.1-17)$$

$$b \sin E = r \sin f \quad (1.1-18)$$

由此可导出下列关系式:

$$\sin E = \frac{\sqrt{1-e^2} \sin f}{1+e \cos f} \quad (1.1-19)$$

$$\cos E = \frac{e + \cos f}{1+e \cos f} \quad (1.1-20)$$

以及它们的反函数:

$$\sin f = \frac{\sqrt{1-e^2} \sin E}{1-e \cos E} \quad (1.1-21)$$

$$\cos f = \frac{\cos E - e}{1-e \cos E} \quad (1.1-22)$$

应用三角函数的倍角公式,有真近点角与偏近点角的关系:

$$\tan\left(\frac{f}{2}\right) = \left(\frac{1+e}{1-e}\right)^{\frac{1}{2}} \tan\left(\frac{E}{2}\right)$$

利用式(1.1-17), (1.1-22), 卫星在以焦点 F (地心) 为原点的坐标位置可描述为

$$\left. \begin{aligned} r \cos f &= a(\cos E - e) \\ r \sin f &= a \sqrt{1-e^2} \sin E \\ r &= a(1 - e \cos E) \end{aligned} \right\} \quad (1.1-23)$$

将式(1.1-20), (1.1-22)两边微分,利用式(1.1-19), (1.1-21)可得出真近点角与偏近点角之间的微分关系:

$$df = \frac{\sqrt{1-e^2}}{1-e \cos E} dE \quad (1.1-24)$$

$$dE = \frac{\sqrt{1-e^2}}{1+e \cos f} df \quad (1.1-25)$$

有了上述的基本关系式,可将式(1.1-7)进行积分,由于 ω 是常数, $\dot{\theta} = \dot{f}$, 式(1.1-7)的积分可改写成

$$\int_0^f r^2 df = h(t - t_p)$$

式中 t_p 就是第六个积分常数,它是卫星经过近地点的时刻,对应的真近点角 $f=0$ 。利用式(1.1-11), (1.1-12)和(1.1-23), (1.1-24)等,可将上式化成

$$\begin{aligned} t - t_p &= \frac{h^3}{\mu^2} \int_0^f \frac{df}{(1+e \cos f)^2} = \frac{h^3}{\mu^2} \int_0^E \frac{1-e \cos E}{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}} dE \\ &= \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} (E - e \sin E) \end{aligned}$$

由此得到描述卫星位置与时间关系的开普勒方程:

$$n(t - t_p) = E - e \sin E \quad (1.1-26)$$

定义 $M = n(t - t_p)$ 为卫星的平近点角, 它表示卫星从近地点开始按平运动速度 n 转过的角度, 或者说卫星在一个假想的面积等于轨道椭圆面积的圆上以等速 n 运动, 它转过的中心角就是平近点角 M 。在给定的时刻 t , 三种近点角 M, E, f 都是对应的。平运动速度 n 和偏心率 e 是先给定的, 解开普勒方程求得 E , 才能得知卫星的位置。用迭代法求解, 令第 0 步的 E 值为 E_0 , 第一步以后的各次 E 值为

$$E_1 = M + e \sin E_0$$

$$E_2 = M + e \sin E_1$$

...

如令迭代初值 $E_0 = M$, 并且每次迭代后进行解析运算, 可得出角 E 的级数计算式:

$$E = M + \left(e - \frac{e^3}{8} \right) \sin M + \frac{1}{2} e^2 \sin 2M + \frac{3}{8} e^3 \sin 3M + \dots \quad (1.1-27)$$

真近点角 f 的级数计算式是:

$$f = M + \left(2e - \frac{e^3}{4} \right) \sin M + \frac{5}{4} e^2 \sin 2M + \frac{13}{12} e^3 \sin 3M + \dots \quad (1.1-28)$$

至此, 给出了卫星运动方程的六个积分以及六个积分常数 ($a, e, i, \Omega, \omega, t_p$), 通常称此六个常数为轨道要素。由于 t_p 和 M 是对应的, 也可用 M 表示第六个要素。

1.1.2 卫星位置和速度公式

以上仅局限于分析卫星在轨道平面上的运动特性。还需分析卫星在赤道惯性坐标系中的空间位置和速度问题, 用六个轨道要素描述卫星在空间中的运动特性, 即卫星的向径 r 和速度 v 可以表达成此六个轨道要素的函数。图 1.1-6 归纳了上述要素在空间坐标中的几何意义。

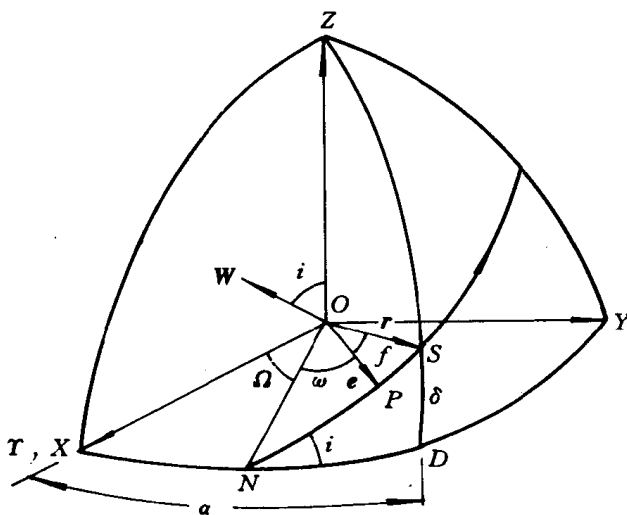


图 1.1-6

图中, $OXYZ$ ——赤道惯性坐标系, X 轴指向春分点 T ;

ON ——卫星轨道的节线, N 为升交点;

S ——卫星的位置;