随机过程教程

李漳南　　吴荣

高等教育出版社

内 容 提 要

本书用测度论的观点叙述近代随机过程论的基本理论，内容分随机过程的一般理论、正态过程、马尔科夫链、马尔科夫过程、鞅论、平稳独立增量过程、平稳过程等七章。本书经国家教委高等学校理科数学、力学教材编审委员会概率论与数理统计编审组委托严士健教授、刘秀芳副教授审阅通过；可作为高等学校理科数学系选修课试用教材使用。

随机过程教程

李漳南　吴　荣

*

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

国防出版社印刷厂印装

*

开本850×1168 1/32　印张11.625　字数300 000

1987年8月第1版　1987年9月第1次印刷

印数00 001— 4 110

书号 13010·01396　定价2.40元

序　言

随机过程经过近半世纪的蓬勃发展，已成为一门内容十分丰富的学科，而且在物理、生物、工程、经济等方面得到广泛的应用，它是近代科学技术工作者谋求掌握的一个理论工具。为此，有条件的高等院校已开始把随机过程论作为一门选修课。为了满足教学的需要，我们根据1984年4月理科数学、力学教材编审委员会概率论与数理统计编审小组提出的内容与要求写了这本书，供概率论方向的师生参考使用。

本书用测度论的观点叙述了近代随机过程论的基本理论，选材方面参考了国内外有关书籍及文献，所用各种符号也与惯用的基本一致。本书的另一特点是对马尔科夫过程作了较多的介绍，着重叙述了该类过程的基本理论以及与其它过程类的关系。突出了鞅论在这类过程中的应用。对于几类重要的马尔科夫过程，如Poisson 过程与 Wiener过程，也作了较详细的论述。在叙述时，我们力图直观和简明易懂，对基本概念尽量阐述清楚。所有定理，除个别外，也都给予了详细的证明。阅读本书的读者要熟悉测度论及概率论的基本内容，还要具备泛函分析的初步知识。

全书分四个部分：随机过程的一般理论（第一章）；马尔科夫过程（第三、四、六章）；鞅（第五章）；正态过程与平稳过程（第二、七章）。第四部分与中间两部分基本上独立。为加深理解所学内容，各节（章）后面都附有习题，其中有些习题是作为正文的补充。由于学时有限，随机过程论中其它重要内容，如扩散过程、随机点过程、随机微分方程以及时间序列分析等，在本书中就不作介绍了。本书后面的附录（一）和（二）收集了要用到的测度论知识，供读者查阅。

在本书的写作过程中一直得到王梓坤先生的关怀与鼓励；杨振民同志讲授此稿多次，提出了许多建设性的意见；徐沐、王洗兵同志校对了底稿，改正了不少错误；南开大学以及兄弟院校的许多同志对该书的底稿提出了很多宝贵意见；沈朝晖同志认真、细致地抄写了全部底稿。作者谨对以上同志敬致谢意。

由于我们的水平有限，尽管竭力而为，也未必符合需要，书中一定还有不少缺点和错误，恳请读者批评指正。

李漳南　吴　荣

1986.1.

目　录

第一章　随机过程的一般理论

§1.1　随机过程的基本概念

初等概率论所研究的随机现象，基本上可由一个或有限多个随机变量来描述。虽然在那里也考虑了随机变量序列，但假定它们是相互独立的。在实际中，我们还要研究一些随机现象的发展和变化过程，而且所考虑的随机事件要涉及无限（非可列）多个随机变量。这时，我们就需要用一族随机变量才能刻划这种随机现象的全部统计规律性。通常我们把一族随机变量称为随机过程。

例 1　在研究生物群体的增长问题时，为了描述群体的发展或演变过程。就要在每一时刻 t 记录群体的含量（个数）x_t，每一 x_t 是随机变量。假设我们从 $t=0$ 开始连续地观测，则 $\{x_t, t\in[0,\infty)\}$ 就是随机过程。

例 2　在海浪分析中，需要观测在固定点上海平面的垂直振动。设 x_t 表示在固定点上，于时刻 t 海平面相对于平均平面的高度，则 x_t 是随机变量，而 $\{x_t, t\in[0,\infty)\}$ 是随机过程。

例 3　在地震预报中，若每半年统计一次发生在某区域的地震的最大震级。令 x_n 表示第 n 次统计所得的值，则 x_n 是随机变量。为了预测该区未来地震的强度，我们就要研究随机过程 $\{x_n, n=0, 1, 2, \cdots\}$ 的统计规律性。

下面我们给出随机过程的正式定义。

（一）随机过程的定义

定义 1　设给定参数集合 T 和可测空间 $(E, \mathscr{B})$，若对每个

$t\in T$，有一个定义在概率空间（Ω，$\mathscr{F}$，P）上的$\mathscr{B}$可测函数 $x_t(\omega)$，$\omega\in\Omega$，与它对应，则称依赖于参数 t 的可测函数集合

$$\{x_t(\omega),\quad t\in T\} \tag{1}$$

为定义在（Ω，$\mathscr{F}$，P）上取值于（E，$\mathscr{B}$）中的**随机过程**；或简称为**随机过程**（如（E，$\mathscr{B}$）已明确固定）。（E，$\mathscr{B}$）称为**状态空间**或**相空间**。E 中的元素称为**状态**。

如不引起混淆，常把（1）简写成 $\{x_t\}$。

称$\{x_t\}$为**实（复）值随机过程**，若E为实数（复数）集，$\mathscr{B}$是E中Borel可测集全体。如果（E，$\mathscr{B}$）$=(R_n, \mathscr{B}_n)$，（R_n——n 维欧氏空间，$\mathscr{B}_n$——R_n中Borel可测集全体），就称$\{x_t\}$为 n 维**随机过程**。

注意，随机过程的参数 t 可以指通常的时间，也可以指别的。例如 t 指高度，x_t 表示高度为 t 的气温。t 也可以是向量，例如 t 指空间的点，而x_t 表示在这点的风速等等。这种依赖于几个参数的随机过程（即 t 是向量的过程）称为**随机场**。随机过程的状态空间中的E可以是任一抽象的集合。E中的状态可以代表某种数量（例如在例 1 中的状态表示生物群体的个数，在例 2 中的状态是海浪的高度，在例 3 中的状态是地震的震级等），也可以指非数量（例如在天气预报中，E中的状态是晴、阴、雨。在观测某随机试验时，E是试验的各种可能结果的集合等）。

为叙述简单起见，我们以后总设$T\subset(-\infty,\ \infty)$，并把 t 理解为时间。如不特别声明，我们考虑的随机过程均指实值的，即（E，$\mathscr{B}$）$=(R_1, \mathscr{B}_1)$。

由随机过程的定义知，对每一固定的 $t\in T$，$x_t(\omega)$ 是定义在概率空间（Ω，$\mathscr{F}$，P）上的随机变量，对每一固定的$\omega\in\Omega$，$x_t(\omega)$ 是定义在T上的实值函数。我们称这函数为随机过程$\{x_t,\ t\in T\}$对应于此ω的一个**样本函数**（或**轨道**，或**现实**）。有时我们需要把 $x_t(\omega)$ 看成（t，ω）的二元函数，这时常把 $x_t(\omega)$ 写成 $x(t,\ \omega)$。

根据参数集T及状态空间E是可列集或非可列集，可把随机过程分为四种：

1° T及E都可列，

2° T可列，E非可列，

3° T及E都非可列，

4° T非可列，E可列。

参数集T可列（即1°，2°的情形）的随机过程，也称为**随机序列**，或**时间序列**。状态空间E可列（即1°，4°的情形）的随机过程也称为**可列过程**（或**有限过程**，如E是有限集）。

随机过程的分类，除上述按集T与E是可列与否外，还可进一步依据x_t之间的概率关系进行分类。下面是按后者分类的几种研究得较多且用途较广的随机过程类型。

1. **马尔科夫过程**（见第三、四章）。**独立增量过程**，也称为**可加过程**（见第六章）是马尔科夫过程的重要子类。

2. **平稳过程**（见第七章）。

3. **鞅**（见第五章）。

（二）随机过程的分布函数及其特征

设$\{x_t,\ t\in T\}$是随机过程，对任意$t_1,\ t_2,\ \cdots,\ t_n\in T$及$(c_1,\ \cdots,\ c_n)\in R_n$，记随机变量$x_{t_1},\ x_{t_2},\ \cdots,\ x_{t_n}$的$n$维联合分布函数为

$$F_{t_1,t_2,\cdots,t_n}(c_1,\ c_2,\ \cdots,\ c_n)=P(x_{t_1}\leqslant c_1,\ x_{t_2}\leqslant c_2,\ \cdots,\ x_{t_n}\leqslant c_n),\tag{1}$$

当n和t_i变动时，得一族分布函数

$$F=\{F_{t_1,\cdots,t_n}(c_1,\ \cdots,\ c_n),\ n=1,\ 2,\ \cdots t_i\in T\},\tag{2}$$

称F为随机过程$\{x_t,\ t\in T\}$的**有限维分布函数族**。

分布函数族F具有下列性质（称为相容性条件）：

（A）对1，2，…，n的任意排列$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_n$有

$$F_{t_1,\cdots,t_n}(c_1,\ \cdots,\ c_n)=F_{t_{\alpha_1},\cdots,t_{\alpha_n}}(c_{\alpha_1},\ \cdots,\ c_{\alpha_n});$$

（B）如$m<n$，则

$$F_{t_1,\cdots,t_m}(c_1,\ \cdots,\ c_m)$$
$$=F_{t_1,\cdots,t_m,t_{m+1},\cdots,t_n}(c_1,\ \cdots,\ c_m,\ \infty,\ \cdots,\ \infty).$$

有限维分布函数族满足条件（A），（B）的随机过程的存在性，由下面的定理保证。

定理 1 设已给参数集T及满足相容性条件（A），（B）的分布函数族（2），则必存在概率空间（Ω，$\mathscr{F}$，P）及定义在其上的随机过程$\{x_t,\ t\in T\}$，使对任意自然数n，任意实数c_i及任意$t_i\in T$，$i=1,2,\cdots,n$，有

$$P(x_{t_1}\leqslant c_1,\ \cdots,\ x_{t_n}\leqslant c_n)=F_{t_1,\cdots,t_n}(c_1,\ \cdots,\ c_n). \tag{3}$$

证明 取（Ω，$\mathscr{F}$）为无穷维波雷耳（Borel)可测空间(R_1^T，$\mathscr{B}_1^T$)，亦即

$\Omega=R_1^T=\{$定义在T上的实值函数$\lambda(t)$全体$\}$，

$\mathscr{F}=\mathscr{B}_1^T=R_1^T$中包含一切形如（$\lambda(\cdot):\lambda(t_1)\leqslant c_1,\ \cdots,\ \lambda(t_n)\leqslant c_n$)的集的最小$\sigma$代数，其中$t_i\in T$，$-\infty<c_i<\infty$任意，$i=1,\cdots,n$，$n\geqslant 1$。$c_i$可取$\infty$，但此时$\lambda(t_i)\leqslant c_i$要换成$\lambda(t_i)<c_i$。

根据测度论中关于在无穷维空间（R_1^T，$\mathscr{B}_1^T$）上产生测度的柯尔莫果洛夫（Колмогоров）扩展定理❶，以及分布函数族（2）满足相容性条件的假定，可知F可产生唯一的、定义在$\mathscr{B}_1^T$上的概率测度P_F，使得对任意$t_1,\ t_2,\ \cdots,t_n\in T$及实数$c_1,c_2,\cdots,c_n$，

$$P_F(\lambda(\cdot):\lambda(t_1)\leqslant c_1,\ \cdots,\ \lambda(t_n)\leqslant c_n)$$
$$=F_{t_1,\cdots,t_n}(c_1,\ c_2,\ \cdots,\ c_n). \tag{4}$$

取$P=P_F$，在概率空间（Ω，$\mathscr{F}$，P）上定义随机过程$\{x_t(\omega),\ t\in T\}$如下：

对任一$\omega\in\Omega$，令

$$x_t(\omega)=\lambda(t),\ 如\ \omega=\lambda(\cdot). \tag{5}$$

---

❶ 参看〔Ⅰ〕附篇定理4。

换言之，x_t 在"点" $\omega=\lambda(\cdot)$ 的值等于函数 $\lambda(\cdot)$ 在 t 点的值。容易看出，$x_t(\omega)$ 是随机变量，且如上定义的 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 及 $\{x_t,\ t\in T\}$ 满足定理的要求（3）。实际上

$$(\omega: x_{t_1}(\omega)\leqslant c_1,\ \cdots,\ x_{t_n}(\omega)\leqslant c_n)=(\lambda(\cdot): \lambda(t_1)\leqslant c_1,\ \cdots,\ \lambda(t_n)\leqslant c_n)\in\mathscr{B}^T=\mathscr{F}.$$

其次由（5）及（4）知

$$\begin{aligned}P(\omega: x_{t_1}(\omega)\leqslant c_1,\ \cdots,\ x_{t_n}(\omega)\leqslant c_n)&=P_F(\lambda(\cdot): \lambda(t_1)\leqslant c_1,\ \cdots,\ \lambda(t_n)\leqslant c_n)\\&=F_{t_1,\cdots,t_n}(c_1,\ \cdots,\ c_n).\end{aligned}$$

在实际中，要知道随机过程的全部有限维分布函数是很困难的。而且涉及多维分布函数的计算也很烦杂，因此，在多数应用中，只限于给出随机过程的某些统计特征来代替 F，这与概率论中用随机变量的数学期望和方差等来代替分布函数一样。随机过程 $\{x_t,\ t\in T\}$ 最有用的特征是**均值函数** $m(t)$ 及**协方差函数** $K(s,\ t)$。其定义为

$$m(t)=Ex_t,\quad t\in T,$$

$$\begin{aligned}K(s,\ t)&=E(x_s-m(s))(x_t-m(t))\\&=Ex_sx_t-m(s)m(t),\quad s,\ t\in T.\end{aligned}\tag{6}$$

称 $D(t)=K(t,\ t)$，$t\in T$ 为 $\{x_t\}$ 的**方差函数**。特别对正态随机过程（见第二章），$m(t)$，$K(s,\ t)$ 完全决定 F。

如果 $\{x_t\}$ 是复值随机过程，（6）要改为

$$\begin{aligned}K(s,\ t)&=E(x_s-m(s))\overline{(x_t-m(t))}\\&=Ex_s\bar{x}_t-m(s)\overline{m(t)},\end{aligned}\tag{7}$$

$$D(t)=E|x_t-m(t)|^2,\tag{8}$$

其中符号 $\bar{a}$ 表示 a 的共轭复数。由 Cauchy-Schwarz 不等式知，如 $E|x_t|^2<\infty$，$t\in T$。则 $m(t)$ 及 $K(s,\ t)$ 都存在。

定理 2 设 $\{x_t,\ t\in T\}$ 为复值随机过程，且 $E|x_t|^2<\infty$，$t\in$

T，则$K(s,t)$有性质

（a）对称性：$K(t,s)=\overline{K(s,t)}$；

（b）非负定性：对任意$t_i\in T$及任意复数a_i，$i=1,2,\cdots,n$有

$$\sum_{i,j=1}^{n} K(t_i,t_j)a_i\bar{a}_j\geqslant 0. \tag{9}$$

证明（a）$\overline{K(s,t)}=E\overline{\{(x_s-m(s))\overline{(x_t-m(t))}\}}$

$$=E\overline{(x_s-m(s))}(x_t-m(t))$$

$$=K(t,s).$$

（b）$\sum\limits_{i,j=1}^{n} K(t_i,t_j)a_i\bar{a}_j$

$$=E\left\{\sum_{i,j=1}^{n}(x_{t_i}-m(t_i))\overline{(x_{t_j}-m(t_j))}a_i\bar{a}_j\right\}$$

$$=E\left[\left\{\sum_{i=1}^{n}(x_{t_i}-m(t_i))a_i\right\}\overline{\left\{\sum_{j=1}^{n}(x_{t_j}-m(t_j))a_j\right\}}\right]$$

$$=E\left|\sum_{i=1}^{n}(x_{t_i}-m(t_i))a_i\right|^2\geqslant 0.$$

上面是先给$\{x_t\}$，后有$m(t)$及$K(s,t)$且满足（a），（b）。反过来的问题见第二章定理3。

习　题

1．设已给n维分布函数$F(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$，证明存在概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$及定义在其上的随机变量$x_1$，$x_2,\cdots,x_n$，使它们的联合分布函数为$F(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$。

2．设已给一维分布函数列$\{F_n(\lambda)$，$n=1,2,\cdots\}$。造一概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$及定义在其上的一列随机变量$\{x_n$，$n=1,2,\cdots\}$，使x_n相互独立且x_n的分布函数为$F_n(\lambda)$。

3. 设$K(s,t)$为复值随机过程$\{x_t, \ t\in T\}$的协方差函数，$f(t)$，$t\in T$是普通的复值函数，求随机过程$\{x_t+f(t), \ t\in T\}$的协方差函数。

4. 设ξ，η为同分布的随机变量，其均值为零，方差为σ^2。若$E(\xi\eta)=0$，试求随机序列

$$x_n=\xi\cos(\omega_n)+\eta\sin(\omega_n), \quad n=0, \pm 1, \ \pm 2, \ \cdots$$

的均值及协方差函数。

5. 设$\{x_t, \ t\in T\}$及$\{y_t, \ t\in T\}$为$(\Omega, \mathscr{F}, P)$上的随机过程，其协方差函数分别为$K_1(s,t)$及$K_2(s,t)$。证明

(i) $K_1(s,t)+K_2(s,t)$,

(ii) $K_1(s,t)K_2(s,t)$

也是某随机过程的协方差函数。

提示 由题3不妨设$Ex_t=Ey_t=0$。造$(\Omega\times\Omega, \ \mathscr{F}\times\mathscr{F}, \ P\times P)$并在其上定义$\xi_t(\omega)=x_t(\omega_1)$，$\eta_t(\omega)=y_t(\omega_2)$，其中$\omega=(\omega_1, \ \omega_2)$，$\omega_i\in\Omega$。$i=1,2$则$\{\xi_t+\eta_t\}$及$\{\xi_t\eta_t\}$的协方差函数分别为(i)和(ii)。

6. 设$f_n(t)$，$t\in(-\infty, \ \infty)$，$n=1,2,\cdots$为复值函数列，定义

$$K(s,t) \quad \sum_{n=1}^{\infty} f_n(s)\overline{f_n(t)}.$$

试证若右方级数对一切s，t绝对收敛，则$K(s,t)$具有对称性及非负定性。

§1.2 随机过程的可分性与可测性

(一) 可分性

研究随机过程样本函数的性质，例如连续性、可微分或有界性时，常要遇到类似下面的非有限又非可列个事件的交

$$\begin{aligned} B &= (\omega: \sup_{a\leqslant t\leqslant b} x_t(\omega)\leqslant c) \\ &= \bigcap_{t\in[a,b]} (\omega: x_t(\omega)\leqslant c). \end{aligned} \tag{1}$$

由于概率空间（Ω，$\mathscr{F}$，P）中的σ代数$\mathscr{F}$只保证对可列多个事

件的并或交封闭，故B是否仍属于$\mathscr{F}$就成问题。如$B\notin\mathscr{F}$，就无法讨论B的概率。如扩大$\mathscr{F}$使$B\in\mathscr{F}$，自然还希望事件B应能由过程的有限维分布函数完全决定，换言之，如二过程$\{x_t, \ t\in[a, \ b]\}$与$\{y_t, \ t\in[a, \ b]\}$有相同的有限维分布函数族。那么由$\{x_t\}$与$\{y_t\}$决定的事件B应有相同的概率。然而，下例说明并非始终如此。

例1 设$\Omega=[0, \ 1]$，$\mathscr{F}=[0, 1]$上的勒贝格可测集所成的σ代数。P是$\mathscr{F}$上的勒贝格测度。定义

$x_t(\omega)=0$，对一切$t\in[0, \ 1]$及$\omega\in\Omega$。

$$y_t(\omega)=\begin{cases}1, & \text{如 } t=\omega, \\ 0, & \text{如 } t\neq\omega, \quad t\in[0, \ 1], \quad \omega\in\Omega.\end{cases}$$

易见，对每一t，$P(\omega: x_t(\omega)=y_t(\omega))=P(\omega:\omega\neq t)=1$，从而$\{x_t\}$与$\{y_t\}$具有相同的有限维联合分布。但是

$$P\left(\omega: \sup_{0\leqslant t\leqslant 1} x_t(\omega)\leqslant\frac{1}{2}\right)=1, \quad P\left(\omega: \sup_{0\leqslant t\leqslant 1} y_t(\omega)\leqslant\frac{1}{2}\right)=0.$$

为了避免上述问题，在随机过程的样本函数分析中，就要对过程的样本函数施加某种“光滑性”条件，使得如同（1）中那种涉及非可列多个随机变量的ω集，能用只涉及可列个随机变量的事件来“代替”。为此，下面引进可分性的概念。

为了叙述简便，以下总假定$(\Omega, \ \mathscr{F}, \ P)$是完备的概率空间，参数集$T$是区间，所讨论的过程允许取$\pm\infty$为值，但恒设对每个$t$，有

$$P(x_t=\pm\infty)=0.$$

定义1 称随机过程$\{x_t, \ t\in T\}$为**可分的**，如存在T的可列稠密子集R及概率为零的集N。使对任一$\omega\notin N$，样本函数$x(\cdot, \ \omega)$具有下述性质：对任一$t\in T$，存在点列$r_n\in R$满足

$$\lim_{n\to\infty} r_n=t \text{ 且 } \lim_{n\to\infty} x_{r_n}(\omega)=x_t(\omega),$$

称上述集R为$\{x_t\}$的**可分集**。N为（关于R的）**例外集**。

有时为了强调R，此时也称$\{x_t\}$**关于R可分**。

称随机过程$\{x_t,\ t\in T\}$为**完全可分**的，如$\{x_t\}$关于T的任意可列稠密子集R都可分。

例 2 **连续随机过程**，即样本函数连续的过程，它是完全可分的。例1中的随机过程$\{y_t,\ t\in[0,\ 1]\}$是不可分的。

回顾（1）式中的集B，如设$\{x_t\}$可分，R为其可分集，并考虑如下的事件：

$$\hat{B}=(\omega:\sup_{r\in R}x_r(\omega)\leqslant c)$$

$$=\bigcap_{r\in R}(\omega:x_r(\omega)\leqslant c)\in\mathscr{F},$$

由可分性有$B\doteq\hat{B}$，$\doteq$表示左、右两边最多相差一零测集（它是例外集N的子集）。因$\mathscr{F}$完备，所以$B\in\mathscr{F}$，于是解决了B可能不属于$\mathscr{F}$的问题。

定义 2 定义在同一$(\Omega,\ \mathscr{F},\ P)$上的两个随机过程$\{x_t,\ t\in T\}$与$\{y_t,\ t\in T\}$称为随机等价的，并记为$\{x_t\}\sim\{y_t\}$，如对每一$t\in T$，有

$$P(x_t=y_t)=1. \tag{2}$$

由（2）可知，如$\{x_t\}\sim\{y_t\}$，则它们具有相同的有限维联合分布，即对任意$t_i\in T$及实数c_i，$i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$，有

$$P(x_{t_i}\leqslant c_i,\ 1\leqslant i\leqslant n)=P(y_{t_i}\leqslant c_i,\ 1\leqslant i\leqslant n).$$

Doob证明了任一随机过程总可以把它可分化。即对任一随机过程$\{x_t,\ t\in T\}$，必存在与它随机等价的可分过程$\{y_t,\ t\in T\}$。称此$\{y_t\}$为$\{x_t\}$的**可分修正过程**❶。因此，当我们研究的问题只涉及过程的有限维分布函数时，我们就不妨假定原过程为可分过程。

---

❶ 可分修正存在性的证明，可参看〔1〕§3.1。