【美】Vasile I. Istratescu 著
王濯缨 李秉友 王向东 译
张石生 张茂孝 校

不动点理论及其应用

上海科学技术文献出版社

不动点理论及其应用

[美] Vasile I. Istrǎtescu 著

王渥缨 李秉友 王向东 译

张石生 张茂孝 校

上海科学技术文献出版社

(沪)新登字 301 号

不动点理论及其应用

王濯缨　李秉友　王向东　译

张石生　张茂孝　校

*

上海科学技术文献出版社出版发行

(上海市武康路 2 号)

全国新华书店经销

上海科技文献出版社昆山联营厂印刷

*

开本 787×1092 1/32　印张 14.75　字数 360,000

1991 年 9 月第 1 版　1991 年 9 月第 1 次印刷

印数：1—1,700

ISBN 7-80513-781-1/G·116

定　价：7.60 元

《科技新书目》241-258

序

本书作为不动点理论及其应用的入门，讨论的范围从相当标准的结果（如压缩映射原理，Brouwer 和 Schauder 的不动点定理）直到已知的最新结果。但是我们不打算在各方面都详细地论述，对此感兴趣的读者可查阅本书引用的参考文献。

本书采用了泛函分析的方法。对代数拓扑方法感兴趣的读者，可参阅书后添加部分。泛函分析的知识并不是必须的，当然懂一点这方面的基础知识更好。本书有两章预备知识，一章是关于一般拓扑学的，另一章是关于 Banach 和 Hilbert 空间的。这两章的特点是注意了非紧测度的研究，首先是在度量空间的情况，其次是在 Banach 空间的情况。

第三章详细论述了压缩原理（即著名的不动点定理），其中包括压缩原理的许多推广形式。同时注意到射影几何的观念同压缩映射之间的联系，并给出了计算压缩映射不动点的一些方法。然后，讨论了在各方面的一些应用。

第四章介绍了 Brouwer 不动点定理。Brouwer 的证明对于（Alexander 和 Birkhoff 和 Kellogg）不动点理论的发展是有影响的。在对其证明作了某些历史的详论之后，我们对于不同范畴感兴趣的读者，给出许多关于 Brouwer 定理的证明方法。我们给出一个初等的证明，这个证明只需要连续函数和多项式的基本性质；第二个证明使用微分的方式；另一个使用微分拓扑，还有一个借助于组合拓扑的方法。这些不同的证明可以在计算映射的不动点的不同方法中使用。就此而论，这就给出不动点

的一些计算法。本章后部举出一些应用，其中谈到有关经济的平衡价值。

第五章是第四章自然的延续，其中介绍了由 Schauder 得出的 Brouwer 定理的推广和与其相联系的新结果。介绍了各种各样的重要的和有趣的著作；这些著作是由 Krasnoselskii, Rothe, Altman, Kyfan, F. Brouwer 所著；还介绍了一些应用，其中有由 Lomonosov 给出的关于在同非：有界线性紧算子交换的 Banach 空间上，对于有界线性算子，非平凡超不变子空间存在性的证明。

在第六章中，我们介绍了关于映射的一些结果，这些映射不增加距离，即所谓非膨胀映射。首先我们介绍关于非膨胀映射扩张的结果。举了一个简单的例子来说明，如果映射或空间没有一定的限制，非膨胀映射不动点就不再存在。我们还介绍一些关于非膨胀映射或确定的 Banach 空间类上关联的映射类不动点的存在性和关于叠代的收敛性的一些结果。本章的末尾列举了这类映射不动点的例子和计算方法。

第七章讨论映射序列关于不动点的结果。首先我们给出压缩映射的一些结果；接着给出了凝聚映射的结果。

在第八章中我们介绍对偶性映射理论的原理以及它同单调的和非膨胀算子的联系，同样也介绍了主观性定理，这些定理在偏微分方程理论中有多方面的有益的应用。

第九章包括以 Markov-Kakutani 的结果为中心的一些结论。其中有 Ryll-Nardzewski 的一个漂亮的结果；同样也包括半群上不变平均同不动点之间联系的一些结果。

作为单值映射不动点理论的推广，在第十章中讨论了集值映射的情况．首先我们给出了关于 Pompeiu-Hausdorff 度量和关于集值压缩映射的一些结果，其中包含 Brouwer 和 Schauder

的扩张,也包含 Tichonov 对于集值映射的结果。

概率度量空间是 1942 年由 Karl Mengerin 引入的,从那时起,人们对于这样空间的兴趣不断地增长。在第十一章我们介绍了概率度量空间(缩写为PM-空间)上压缩映射不动点的一些结果,和这空间上非紧测度以及某些映射类不动点的某些结果.

最后,第十二章包括拓扑度的结果。首先探讨了有限维空间的情况,其中介绍所谓的 Brouwer 度。然后,把这个度扩充到 Banach 空间上恒等算子的确定扰动。本章也包括著名的 Leray 的例子。这个例子表明对任意的扰动定义度是不可能的。

其次,我们简短地介绍依 K-集压缩映射,度概念扩充到确定的恒等式的扰动。利用某些逼近定理(这些定理都有独自的意义)我们证明了拓扑度的唯一性。然后我们给出基于 Stenger 公式 Brouwer 拓扑度的某些计算法。本章的后部说明了度的一些应用。

我们对已获得的各种各样的结果以及那些可用来得到更进一步知识的参考资料(包括依次引证的许多较早结果)尽可能地指出原来的作者。当一个结果不知归于任何人时,对发明者我们没有提到。

VASILE I. ISTRĂTESCU

目　　录

第一章　拓扑空间和线性拓扑空间

1.1　度量空间

收敛的概念在分析中是基本的概念。如实数列的收敛，复数列的收敛，函数列的收敛等。值得注意的是在函数的情形中，有许多种收敛的形式，如点态收敛、一致收敛、依测度收敛等。以前，用点"接近"到点来定义数列或函数列的收敛。这个不确切的"接近"可以用被称为"度量"或"距离"的某函数使其精确化。

定义 1.1.1　设 S 是非空集，$d: S\times S\to R$. 函数 d 称为 S 上的度量（或距离）当且仅当下列诸性质成立：

1. $d(x, y)=0$，当且仅当 $x=y$；
2. $d(x, y)=d(y, x)$，对所有 $x, y\in S$；
3. $d(x, y)\leqslant d(x, y)+d(y, z)$，对所有 $x, y, z\in S$.

数 $d(x, y)$ 称为 x 与 y 之间的距离，偶 (S, d) 称为度量空间. 为了简单也可写作 S 并称 S 是度量空间。

命题 1.1.2　对任何 $x, y\in S$, $d(x, y)\geqslant 0$.

证明　设 x, y, z 是 S 中的任意点，则有

$$d(x, z)\leqslant d(x, y)+d(y, z)$$

于是对
$$x=z$$
得
$$0\leqslant d(x, y)+d(y, x)=2d(x, y)$$
从而结论成立。

如果 S_1 是度量空间 S 的一个子集，则我们在 S_1 上可用公式

$$d_1(x, y)=d(x, y)$$

定义一个度量并称 d_1 为 S_1 上的诱导度量。

现在给出一些度量空间的例。

例 1.1.3 设 E_n(或 R^n) $=\{x=(x_1, x_2\cdots\cdots x_n); x_i\in R, R$ 为实数集$\}$，并设 d 的定义如下：如果 $y=(y_1, y_2\cdots\cdots y_n)$，则

$$d(x, y)=(\sum_1^n |x_i-y_i|^p)^{\frac{1}{p}}=d_p(x, y)$$

这里 p 是 $[1, \infty)$ 中一个确定的数，由 Minkowski 不等式，可知 $d(x, u)$ 确是度量。在上面的 S 上也可定义另一度量：

$$d(x,y)=\sup_i\{|x_i-y_i|\}=d_\infty(x, y)$$

例 1.1.4 设 S 是所有实数列 $x=(x_i)_1^\infty$ 的集合，使对某确定的 $p\in(0, \infty)$

$$\sum_1^\infty |x_i|^p<\infty$$

这时，如果 $y=(y_i)$ 是 S 中另一点，定义

$$d(x, y)=(\sum_i |x_i-y_i|^p)^{1/p}=d_p(x, y)$$

由 Minkowski 不等式得知这是 S 上的一个度量。

例 1.1.5 设 $S=L^2_{(0,1)}=\left\{f; \int_0^1 |f|^2dt<\infty\right\}$并对任意两函数(函数类)$f, g$，定义

$$d_2(f, g)=\left(\int_0^1 |f-g|^2dt\right)^{\frac{1}{2}}$$

由积分形式的 Minkowski 不等式得知，这是 S 上的一个度量。

例 1.1.6 设 $S=C(0, 1)$是$(0, 1)$上所有连续的复值函数的集合。对 S 中任何 f, g，定义

$$d(f, g)=\sup\{|f(t)-g(t)|: t\in[0, 1]\}$$

容易看出这是 S上的一个度量。

例 1.1.7 对所有实数的集合 S，以下用 R 表示，并定义

$$d(x, y)=|x-y|$$

对任意两个实数x, y,则(R, d)是度量空间。

例 1.1.8 设X是R中所有有理数集Q并且度量是由d导出的,则(Q, d_1)是度量空间。

度量空间中的收敛概念定义如下:

定义 1.1.9 度量空间(X, d)中的序列$\{x_n\}$收敛到X中的一个元x.若对任何$\varepsilon>0$, 存在N_ε, 使对所有的$n\geqslant N_\varepsilon$, 有

$$d(x_n, x)\leqslant\varepsilon$$

在度量空间中, 有一类重要的序列——Cauchy 序列。其定义如下:

定义1.1.10 度量空间(X, d)中的序列$\{x_n\}$称为Cauchy序列.若对任$\varepsilon>0$, 存在N_ε, 使对所有的n, $m\geqslant N_\varepsilon$, 有

$$d(x_n, x_m)\leqslant\varepsilon$$

容易看出,任意一个收敛的序列是Cauchy 序列。

有一类重要的度量空间, 在这样的空间中上述命题的逆也是成立的,这就是所谓的“完备度量空间”,这类空间的正式引入如下。

定义 1.1.11 度量空间(X, d)称为完备的,若这空间中的任一 Cauchy 序列均是有收敛到X中一点。

例 1.1.12 例 1.1.5~例 1.1.7 中的所有空间都是完备的度量空间;例 1.1.8 中的度量空间是不完备的。

设X为度量空间,对任一$r>0$和$x\in X$定义,

1. $Sr(x)=\{y|d(x, y)\leqslant r\}$是以$x$为心$r$为半径的圆;
2. $\mathring{S}_r(x)=\{y|d(x,y)<r\}$是以$x$为心$r$为半径的开圆;
3. $\delta S_r(x)=\{y|d(x,y)=r\}$是以$x$为心$r$为半径的圆的边界或是以$x$为心$r$为半径的圆周。

定义 1.1.13 设(X, d)是度量空间, G为X的子集。点

$x\in G$，若存在一个开圆 $S_r(x)\subset G$，则称点 x 是 G 的内点。若 G 的所有点都是内点或是空集，则称 G 为开集。

定义 1.1.14 度量空间中的集 F 称为闭的，若集

$$C_F=\{x\mid x\in X,\ x\overline{\in}F\}$$

是开集。

度量空间中任一集 A 的直径是数

$$d(A)=\operatorname{Sup}\{d(x,\ y)\mid x,\ y\in A\}$$

从点 $x\in X$ 到集 A 的距离是数

$$d(x,\ A)=\inf\{d(x,\ y)\mid y\in A\}$$

现在我们定义度量空间中点的邻域概念。

定义 1.1.15 如果 X 是度量空间，$x\in X$ 是一个任意的点，则 x 的邻域是任意一个包含含有 x 的开集的集。

下面引入重要的连续概念。

定义 1.1.16 设 X 和 Y 是两个度量空间，$f: X\to Y$ 是任意函数，则 f 在 $x\in X$ 是连续的，如果对 $f(x)$ 的任何邻域 V，存在 x 的邻域 U 使得对所有的 $z\in U$，$f(z)\in V$。若函数 $f(x)$ 在 X 的每个点连续，则称它在 X 上是连续的。

函数在 x 处连续有如下的性质：

定理 1.1.17 如果 X 和 Y 是两个度量空间，$f: X\to Y$ 是任意函数，则 f 在 $x\in X$ 是连续的充分必要条件是对任何收敛于 x 的序列 $\{x_n\}\subset X$，序列 $\{f(x_n)\}$ 收敛于 $f(x)$。

证明 本定理的证明可简化为定义在[0,1]上的函数情形，这里省略。

定义 1.1.18 如果 X 是度量空间，S 是 X 中任意的集，则 S 的闭包是所有包含 S 的闭集的交集，并记为 $\overline{S}$。

例 1.1.19 存在这样的度量空间，使得

$$\overline{S_r^{\circ}}(x)\neq S_r(x)$$

如取

$$X=\{x,\ 0\leqslant x\leqslant 1\}\cup\{e^{i\theta},\ 0\leqslant\theta\leqslant\pi/2\}$$

则显然

$$S_1(0)=X$$

和

$$\overset{0}{S}_1(0)=\{x,\ 0\leqslant x\leqslant 1\}$$

这就给出

$$\overline{\overset{0}{S}}_1(0)=\{x,\ 0\leqslant x\leqslant 1\}$$

对于完备度量空间和非完备度量空间（即度量空间不是完备的）之间的联系，有下面叙述的结果，证明如同 $X=Q$ 的情形，Q 是所有有理数的集。

定义 1.1.20 设$(X,\ d)$是度量空间，则子集 X_1 在 X 中稠密，如果对 X 中任意的 x，存在序列$\{x_n\}$，$x_n\in X_1$，使得

$$\lim_{n\to\infty}(x_n,\ x)=0$$

于是有下面定理。

定理 1.1.21 如果$(X,\ d)$是非完备的度量空间，则存在一个完备的度量空间$(X^{\sim},\ d^{\sim})$使对某函数 f，有

1. $f: X\to X^{\sim}$；
2. $d(x,\ y)=d^{\sim}(f(x),\ f(y))$；
3. $f(X)$在 $X^{\sim}$ 中稠密。

称具有性质 2 的任意函数是等距的。

1.2 度量空间中紧性、非紧性测度

我们知道，对任何有界实数集 E 中的任意序列$\{x_n\}\subset E$ 存在收敛的子序列（即 Bolzano-Weierstrass 定理）和任意的有界闭集可表示为如下的等价性质：

1. E 具有：对每个序列$\{x_n\}\subset E$，存在收敛到E中一个元的子序列。

2. 对任何使得 $E\subset\bigcup_{i\in I}V_i$ 的开集族 $(V_i)_{i\in I}$，存在 $i_1i_2\cdots i_m$ 使得 $E\subset\bigcup_{i=1}^{m}V_i$（即 Lebesgue-Borel 引理）。

这两个性质导出度量空间中紧集的概念。

定义 1.2.1 设 (X, d) 是度量空间，E 是 X 的子集，称 E 为紧的，如果 E 包含在任何开集族 $\{V_i\}_{i\in I}$ 的并集之中，则族中存在 $V_{i1}, V_{i2}, \cdots, V_{im}$ 使得

$$E\subset\bigcup_{j=1}^{m}V_{ij}$$

简称 E 是紧的．如果 E 的每个开覆盖具有有限子覆盖．

紧性还有另外的表示，这里给出其中的一个。首先给出下面的定义。

定义 1.2.2 设 X 是一个集并且 X_1 是 X 的一个子集，则称 X 的子集族 $\mathscr{F}$ 关于 X_1 有有限交性质，如果 $\mathscr{F}$ 的每个有限闭子集的交集与 X_1 相交。称 $\mathscr{F}$ 关于 X_1 具有完全有限交性质，如果 $\mathscr{F}$ 的所有元的交集与 X_1 相交。

下面定理利用上述概念给出紧的一个性质。

定理 1.2.3 度量空间 (X, d) 中的集 E 为紧集的充分必要条件是对任何关于 E 具有有限交性质的闭集族 $\mathscr{F}$ 必然是关于 E 有完全有限交性质。

证明 首先设 E 是紧的，$\mathscr{F}$ 是关于 E 具有有限交性质的一个族。如果 $\mathscr{F}$ 关于 E 没有完全有限交性质，则 E 在 $\bigcup C_F$，$F\in\mathscr{F}$ 之中，因 E 是紧的，存在 $F_1, F_2, \cdots, F_m$ 使得 $E\subset CF_1\cup\cdots\cup CF_m$，即

$$E\cap\left\{\bigcap_{i=1}^{m}F_i\right\}=\phi$$

矛盾．用相似的方法证明相反的论断。

对于以下的表述，需用度量空间中集的聚点概念。

定义 1.2.4 设(X, d)是度量空间,E是X中一个集。称点x为E的聚点(或极限点),如果在每个x的邻域V中至少存在E的一点。

集E的所有聚点的集称为导集，并用E'表示。对任何集$E\subset X$，用C/E或$\overline{E}$表示X中包含E的最小闭集。则有下面的定理。

定理 1.2.5 对于度量空间(X,d)的任何子集E是闭的，当且仅当

$$\overline{E}=E$$

用上面的概念,度量空间中紧集可表述为,

定理 1.2.6 完备度量空间X中的集E是紧的当且仅当满足下列诸条件:

1. E是闭的;
2. 每个序列$\{x_n\}\subset E$在E中有聚点。

因为在下一节将证明更一般的定理,这里就省去。

由定理立即得出下面推论。

推论 1.2.7 若X和Y是度量空间，$f:X\to Y$是连续的，则对于X的任何紧子集E，$f(E)=\{y, y=f(x), x\in E\}$是$Y$的紧子集。

推论 1.2.8 度量空间的每个紧子集是闭的。

定义 1.2.9 度量空间中的集E是有界的，如果它的直径是有界的。

此时即有推论.

推论 1.2.10 度量空间中每个紧集是有界的。

推论 1.2.8 和推论 1.2.10 指出的性质是R^m中紧集的特征。现在给出一例,说明在任意的度量空间中这性质不再成立。

例 1.2.11 考察所有的无限序列$x=\{x_i\}_1^\infty$的空间l^2,其中