规划数学入门

〔日〕木下栄藏 著

李殷元 译
蒋增荣 校

+ − × ÷ √ / = 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 + − ×

湖南科学技术出版社

GUIHUASHUXUERUMEH

规划数学入门

【日】木下荣藏著

李殿元译　蒋增荣校

湖南科学技术出版社

规划数学入门

李殿元 译

责任编辑：胡海清

*

湖南科学技术出版社出版发行

（长沙市展览馆路8号）

湖南省新华书店经销　湖南省新华印刷二厂印刷

*

1991年1月第1版第1次印刷

开本 787×1092毫米 1/32 印张：6.75 插页：1 字数：153,000

印数：1——1,300

ISBN 7—5357—0791—2

O·83　定价：2.80元

地科 60—018

中译本序言

不久前，在浏览《美国数学的现在和未来》（1984年原版）一书时，我见到一篇报告，其中提到这样的观点，即认为："当今科技发达的社会，扫除'数学盲'的任务已经替代了昔日扫除'文盲'的任务而成为当今教育的重要目标，因为人们可以把数学对我们社会的贡献比喻为空气和食物对生命的作用。"这个观点看来是符合实情的。

说到规划数学，它是现代运筹学的重要组成部分。它在自然科学、社会科学、生产实际、工程设计和现代化管理中的巨大作用，已是众所熟知的事实。所以，为了建设一个现代化国家，规划数学在我国科技知识界与各种重要管理部门的普及与广泛运用，已是势在必行。这里也出现了一个需要逐步扫除'规划数学盲'的问题。

最近国防科技大学的李殿元同志把日本学者木下荣藏著的《规划数学入门》（1984年原版）一书翻译了出来（校订者为长沙国防科技大学的蒋增荣教授），这是十分令人高兴的，因为这是一本深入浅出、富有特色的好书，它对于帮助减少'规划数学盲'是能起到积极作用的。

从上述《入门》一书的内容目录即可看出，作者对题材的精选是经过深思熟虑的。例如在线性规划、动态规划、排队论、对策论等各章中，只讲述了最必不可少的项目。各章还配有认

真研究过的例题和习题，这都反映了作者写书时的明确目标：即希望此书能使得广大读者较顺利地学会规划论中最切实用的数学知识和技巧。

不同于一般常见的数学规划论教材，《入门》还专章讲述了Monte Carlo模拟、经济学与运筹学、体育与运筹学。这无疑是此书的重要特色，也反映了作者面向社会、联系实际的见地。

特别值得一提的是，当今世界各国的领导层似乎都已或多或少地认识到发展社会生产力与发展体育事业之间相辅相成的关系。日本这个国家向来重视体育运动，故作者在《入门》此书中专列一章介绍了体育中的运筹学方法，这显然是符合时代潮流需要的。我国的体育运动已经走向世界，而且必将成为体育大国。这样看来，《入门》此书译成中文出版，就我国体育界人士发展体育运动事业而言，或许也会有参考价值。

湖南科技出版社的编辑同志认识到出版这本《入门》的中文译本的意义，要我对此书略作介绍。我就乘此机会顺便谈到了在科技界与管理部门逐步扫除'规划数学盲'的问题，提法如有不当，敬请读者指正。

徐利治

1988年3月于大连理工大学

目　　录

注 附录由姚亚君译。

前　言

本书对规划学中的数学加以集中和概括，使之通俗易懂，以飨学习规划学的学生和从事规划法实际业务的广大工作者。

笔者在长期从事数理规划法的实际工作中，对数理规划法做了深入的研究，并根据多年的教学经验，编著了《规划数学入门》这本书．笔者认为，本书对广大读者来说，既实用，又容易理解。

笔者对书中的例题、习题也进行了悉心研究，读者如果一题不漏地认真做一遍，更有利于提高学习效果．

本书在编写过程中，大量参考了前辈的著作，在此向各位先生谨致谢忱．本书的出版，承蒙启学出版社各位先生多方关照，在此致以衷心地感谢。

作　者

1983年9月

序　言

近几年来，随着科学技术的发展，数理规划法有了显著的进步，尤其是最优化方法（Optimization Technique）和运筹学(Operations Research)等在实际运用中日趋重要。这些规划法，多方面广泛地应用于国家、集体、企业等系统的生产布局，以及经营、管理等方面，通过与系统力学（SD）、系统分析(SA)等系统工程各学科结合，扩大了应用范围，提高了它们的可靠性。

那么，在数理规划成为重要课题的今天，“规划数学”在我们社会上占着什么样的位置呢？很多有识之士指出：“当今社会孕育着许多动态因素”。所以，笔者认为正确“规划”这项工作，在当今社会的各个方面都日益重要、为达到某个“目的”，选择某种“手段”，以分级系统来实现该目的和手段，是闯过当今这个动荡时代的一个必要条件。

比如：经济、环境、交通、通信，……等等，在我们周围有许多急需解决的问题，为解决这些问题，首先面临的是检验现有的各机能系统是否发挥了最优作用。倘若变更某个系统，它的最合理运用方法是什么？在求这个最优解的过程中，“规划数学”扮演了非常重要的角色。

本书着重阐明上述内容，并力求深入浅出，使初学者能够浅显易懂地理解“规划数学”。

下面介绍一下各章内容：

1.线性规划：以原问题、对偶问题、运输问题为例，阐述管理数学内容。

2.动态规划：分成多阶段解决问题，处理多阶段最优分配问题和最短路线探索问题。

3.排队论：处理排队系统$M/M/1(\infty)$型和$M/M/1(N)$型的数学模型。

4.蒙特卡罗模拟：以解析方法难以解决的问题为例，来说明蒙特卡罗法的基础和应用。

5.对策论：说明作为经济现象基础的二人零和对策和混合策略。

6.经济学与运筹学：阐述产业关联分析、费用效益分析、哈佛模型，来作为分析社会现象的方法。

7.体育与运筹学：通过对棒球与运筹学的各种计算，来说明运筹学在文娱体育里普及的重要性。

1. 线 性 规 划

1.1 线性规划概要

我(笔者)的父母家是从事纸箱制造业的．有一天，他们向我提出这样一个问题："做一个装线香的纸箱，需要甲种纸 8 张，乙种纸 5 张，浆糊 4 克．做一个装豆包的纸箱，需要甲种纸 5 张，乙种纸 6 张，浆糊 9 克．但是现在家里能用的甲种纸不超过400张，乙种纸不超过300张，浆糊不超过360克．假设做一个装线香的纸箱可得利润 6 单位，做一个豆包箱可得利润12单位，为了用上述条件得到最大的利润，问应各生产多少个纸箱？这时的利润是多少单位？"

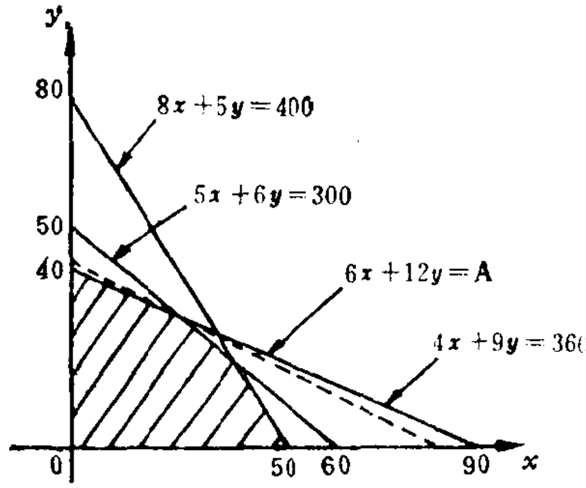
首先用初等数学来解决这个问题．设生产装线香的纸箱和豆包的箱子分别为x、y个，若这时的利润为A单位，则问题成为

$$A=6x+12y \longrightarrow \text{MAX}.$$

这时应取A为最大值，但，x、y有下面条件限制，即甲种纸不超过400张，乙种纸不超过300张，浆糊不超过360克．因为x、y是个数，所以都是正数．如果用式子表示，则为

注：甲种纸——日本纸．乙种纸——西洋纸（用纸浆为原料造的纸）．

$$\left.\begin{aligned}8x+5y&\leqslant 400,\\5x+6y&\leqslant 300,\\4x+9y&\leqslant 360,\\x\geqslant 0,\quad y&\geqslant 0.\end{aligned}\right\}$$



满足以上 4 个约束条件的点(x, y)的存在范围，相当于图上的斜线部分。

现在我们来考虑表示利润的式子$A=6x+12y$。只要该直线与图的斜线部分有公共点，A就取最大值，因此，表示利润的直线通过二条直线

$$\left.\begin{aligned}5x+6y&=300,\\4x+9y&=360\end{aligned}\right\}$$

的交点(25.7，28.6)时，A为最大。

因此，得到最大利润的生产量是

装香的纸箱：25.7个；

装豆包的纸箱：28.6个；

这时最大利润是497.2单位。

这样，就解决了父母家做纸箱的问题．这类问题一般称为线性规划(Linear programming)问题。把线性规划作为经营管理数学中的一个分支，进行多方面分析研究，对经济、政治、社会的各个方面大有裨益．另外，线性规划应用于实际时，变量不只是2或3，很多时候是100或100以上．近年来，由于计算机的发展，这些问题可以迅速得出正确解答。

1.2 线性规划的原问题

线性规划是在几个线性方程式或线性不等式的约束条件下，找出某个线性目标函数的最大或最小的解。一般来说，在线性规划中，作为目的的目标函数，可以选择利润、费用、生产量等，这时的约束条件，可以考虑经济方面，生产活动方面，资源方面，运输方面等。

现在，作为例子来研究下面的问题。

某个工厂用m台机器生产n种产品。把这些产品分别表示为T_1，T_2，…，T_n，机器用a_1，a_2，…，a_m表示。机器a_1生产一个T_1产品需要时间是a_{11}；一般地，机器a_i生产一个T_j产品需要时间是a_{ij}。约束条件是：机器a_1的工作时间不超过b_1小时；一般地，机器a_i的工作时间不超过b_i小时。这样，我们来考虑T_1产品生产x_1个，T_2生产x_2个，……，T_n生产x_n个时的利润。假设生产一个T_1产品利润为c_1，一个T_2产品利润为c_2，……，一个T_n产品利润为c_n，为使利润总和最大，求这时的x_1，x_2，……，x_n之值。

上述线性规划问题可规格化为：

目标函数

$$f(x)=c_1x_1+c_2x_2+\cdots\cdots+c_nx_n. \tag{1}$$

约束条件

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots\cdots+a_{1n}x_n\leqslant b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots\cdots+a_{2n}x_n\leqslant b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots\cdots+a_{mn}x_n\leqslant b_m, \\ x_1,\ x_2,\ \cdots\cdots,\ x_n\geqslant 0. \end{array}\right\} \tag{2}$$

从(1)、(2)式可知，所谓线性规划，就是在取正值或0值的n个变量(x_1，x_2，……，x_n)的联立线性不等式的约束条件下，求这些变量的线性式(目标函数$f(x)$)的最大值。因为这时的约束条件(2)是联立线性不等式，所以不一定就按原样来解，可以把不等式(2)变换成联立线性等式。设x_{n+1}，x_{n+2}，……，x_{n+m}分别是m个不等式两边的差，那么就变换成如下形式：

目标函数

$$f(x)=c_1x_1+c_2x_2+\cdots\cdots+c_nx_n+c_{n+1}x_{n+1}+\cdots\cdots+c_{n+m}x_{n+m}. \tag{3}$$

约束条件

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots\cdots+a_{1n}x_n+x_{n+1}=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n+x_{n+2}=b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n\quad+x_{n+m}=b_m, \\ x_1,\quad x_2,\ \cdots,\ x_n,\ x_{n+1},\ \cdots, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad x_{n+m}\geqslant 0. \end{array}\right\} \tag{4}$$

这里，把目标函数(3)中的变量x_{n+1}，x_{n+2}，…，x_{n+m}叫做松弛变量(slack valiable)，它们的系数c_{n+1}，…，c_{n+m}的值实际上是

$$c_{n+1}=c_{n+2}=\cdots=c_{n+m}=0.$$

再把(4)式变形，将x_1，x_2，…，x_n与松弛变量x_{n+1}，x_{n+2}，…，x_{n+m}分离，用向量可表作下式：

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots\cdots & & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & 1 & 0 \\ 0 & \cdots\cdots & & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{n+1} \\ x_{n+2} \\ \vdots \\ \\ x_{n+m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ \\ b_m \end{bmatrix}$$

$$
=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \cdots\cdots\cdots & & \\ & \cdots\cdots\cdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \tag{5}
$$

任意规定一组x_1，x_2，……，x_n值，如果从(5) 式确定x_{n+1}，x_{n+2}，……，x_{n+m}，这就得出(4) 式的解。

例如，(5) 式的x_1，x_2，……，x_n全部规定为

$$x_1 = x_2 = \cdots\cdots = x_n = 0. \tag{6}$$

由于b_1，b_2，……，b_m全部是0或正值，所以得出

$$x_{n+1} = b_1, \ x_{n+2} = b_2 \cdots\cdots, \ x_{n+m} = b_m. \tag{7}$$

这时，把(6)、(7)二式称为约束条件(4)式的可行解 (feasible soiution)。

但是该可行解不一定使目标函数$f(x)$取最大值，还必须与其他解进行优劣比较，为此，改变x_1，x_2，……，x_n之值，将其代入(3)式研究对$f(x)$的影响。

把(4)式代入(3)式，有

$$f(x) = y_0 - (y_1x_1 + y_2x_2 + \cdots\cdots + y_jx_j + \cdots\cdots y_nx_n).$$

其中 $y_0 = c_{n+1}b_1 + c_{n+2}b_2 + \cdots\cdots + c_{n+m}b_m$,

$$-y_j = c_j - (c_{n+1}a_{1j} + c_{n+2}a_{2j} + \cdots\cdots + c_{n+m}a_{mj}).$$

如设 $z_j = c_{n+1}a_{1j} + c_{n+2}a_{2j} + \cdots\cdots + c_{n+m}a_{mj}$,

就有 $y_j = z_j - c_j$.

考虑(6)式确定的条件， 由于约束条件 (4)式的可行解中有$x_1 = x_2 = \cdots\cdots = x_n = 0$，所以得出

$$f(x) = y_0.$$

一般来说，因为b_i取正值或0，所以很明显可以把各x_i的值从0向正方向移动。如果只把x_1，x_2，……，x_n中的x_j向正方向移

动，其他x_i均为0，那么当$y_j>0$时，$f(x)$减少一个c_j。另一方面，当$y_j<0$时，$f(x)$增加一个c_j。因此，当$y_j<0$时，x_j的值逐渐增大，x_{n+1}，x_{n+2}，……，x_{n+m}中的每一个都成为0.这样，使$f(x)$增加而改变所有的x_j值，结果在x_1，x_2，……，x_n，x_{n+1}，x_{n+2}，……，x_{n+m}的（$n+m$）个的变量中，n个的变量成为0，这时达到了最优解的状态。

显然，最优解是一个可行解，所以有下面线性规划的重要定理。

定理

（I） 对于所有的j来说，如果单纯形基准

$$y_j=z_j-c_j\geqslant 0 \tag{8}$$

成立，则这个可行解是最优解。

（II） 某个可行解是最优解的充分必要条件是单纯形基准(8)式成立.倘若单纯形基准不成立，对于不成立的j来说，有更优的可行解存在。

1.3 线性规划原问题的单纯形法（普列麦尔法）

下面举例说明单纯形法的计算顺序。

某工厂生产四种产品，把这四种产品分别用T_1，T_2，T_3，T_4表示。另外，要生产这些产品需要用三种机器，这些机器也分别用a_1，a_2，a_3表示。机器a_1生产一个T_1产品，需要的时间是a_{11}；一般地，机器a_i生产一个T_j产品，需要时间a_{ij}，如表1—1所示。但约束条件是机器a_1的工作时间不能超过20小时，机器a_2工作时间不能超过58小时，机器a_3工作时间不能超过25小时。而生产一个T_1产品的利润是2单位，生产一个T_2产品的利润是3单位，生产一个T_3产品的利润是5单位，生产一个T_4

产品的利润是6单位。在这种条件下，为使利润总和最大，产品T_1，T_2，T_3，T_4各应生产多少？产品T_1，T_2，T_3，T_4生产的个数分别用x_1，x_2，x_3，x_4表示。

表1—1 a_{ij}

$a_{11}=1.0$	$a_{12}=2.0$	$a_{13}=3.0$	$a_{14}=4.0$
$a_{21}=8.0$	$a_{22}=7.0$	$a_{23}=5.5$	$a_{24}=6.5$
$a_{31}=3.0$	$a_{32}=2.0$	$a_{33}=4.5$	$a_{34}=1.0$

把该线性规划问题规格化如下：

目标函数

$$f(x)=2x_1+3x_2+5x_3+6x_4 \longrightarrow \mathrm{MAX}. \tag{9}$$

约束条件

$$\left.\begin{array}{l} x_1+2x_2+3x_3+4x_4\leqslant 20, \\ 8x_1+7x_2+5.5x_3+6.5x_4\leqslant 58, \\ 3x_1+2x_2+4.5x_3+x_4\leqslant 25, \\ \quad x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4\geqslant 0. \end{array}\right\} \tag{10}$$

此问题因在约束条件(10) 的情况下，可以求得目标函数的最大值，所以可给(10) 式附加松弛变量x_5，x_6，x_7，于是得

$$\left.\begin{array}{l} 20=x_1+2x_2+3x_3+4x_4+x_5, \\ 58=8x_1+7x_2+5.5x_3+6.5x_4+x_6, \\ 25=3x_1+2x_2+4.5x_3+x_4+x_7, \\ \quad x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ x_6,\ x_7\geqslant 0. \end{array}\right\} \tag{11}$$

表1—2是按下列(i)～(x)的顺序作成的单纯形法表．首先，第一级的各行各列按(i)～(vii)的步骤进行计算。

(i) 把单纯形法基准$y_j=-c_j$的$-c_j$值写入第一行（第一级z_j的值是0)。

(ii) 将(11)式的系数写入第二行～第四行。